

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLIV

1947

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

(2° semestre 1947)



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1947





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Ferie 1947 - Luglio-àgosto*

## NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

**Meccanica.** — *Asismica delle torri.* Nota (\*) del Corrisp. G. KRALL.

Si sta attualmente agitando il problema — già apparso or saranno 25 anni — dell'attraversamento dello stretto di Messina con una terna di cavi aerei per trasporto di energia elettrica.

La grande portata ( $\sim 4$  km.), la necessità di tenersi alti sul livello del mare più di quanto è alto l'albero della più alta nave veliera ( $\sim 70$  m.) porta a considerare torri di altezza eccezionale; sui m. 200 o pressochè.

Se la loro costruzione e relativo montaggio implica difficoltà compendiate già nell'altezza impressionante, la circostanza che trattasi di zona in cui le perturbazioni sismiche sono particolarmente violente rende ancor più difficile la loro attuazione.

Per superarle, nessun dubbio, occorre saperle valutare.

Di tali quistioni mi avvenne d'occuparmi in un primo tempo per incarico avuto dalla *Coniel* — che redige, con la direzione del prof. G. Silva, il progetto generale —; poi, disegnando, per un concorso ancora aperto, le torri sumenzionate.

Così, fui portato a considerare per le torri, la loro *asismica*, per i cavi, l'*aerodinamica dei fili* della quale riferisco in altra Nota, con questa contemporanea. Cercai subito di vedere se non potevo dire qualcosa più di quanto già si sapeva e qualcosa ho tratto in luce, che parmi meritevole d'esser, sia pur lievemente, accennato; alludo soprattutto all'*effetto neutralizzante* delle funi, effetto, ch'io mi sappia, mai considerato. Per quel che già si sapeva rileverò che esiste, notissimo agli ingegneri, un nostro regolamento antisismico, un modello di semplicità ed opportunità in ogni sua norma, direttamente o indirettamente dovuto a P. Alfani, C. Guidi, Battelli, Panetti,

(\*) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.



Albenga e Danusso. Esiste anche una Nota del Danusso<sup>(1)</sup>, veramente notevole, apparsa soli 2 anni dopo quel tragico dicembre 1908 che vide devastate le contrade di cui si parla.

Il regolamento apparso già nel 1909 è prezioso quanto mai, ha però solo un valore *in media*, e non potrebbe esser altrimenti; non si può forse applicare in sì eccezionale caso. La Nota del Danusso mette a punto la questione, dà consigli, dettami e considerazioni che non hanno trovato pari che in una Nota del Panetti<sup>(2)</sup> altrettanto preziosa.

Nelle successive ristampe non venne mai fatto all'Autore di mutarla, salvo ad accennare, nell'ultima, all'applicazione che potrebbero avere i *criteri sul massimo cimento dinamico* del Levi-Civita, criteri che, in certo senso, applico in questa Nota.

La ricerca del Danusso addita *la risonanza come pericolo irrimediabile*, precisa un indice  $\Phi$ , rapporto tra accelerazione  $\ddot{s}$  indotta nel sistema oscillante ridotto ad un grado di libertà  $s$  (spostamento assoluto) ed accelerazione sismica  $\ddot{s}_0$  di un moto tellurico, cosiddetto con *urto iniziale*, armonico, del tipo

$$s_0 = r_0 \sin vt,$$

con la relazione e con la sua limitazione superiore,

$$\Phi = \frac{\vartheta^2}{\vartheta^2 - 1} (\vartheta \sin \omega t - \sin vt) < \left| \frac{\vartheta^2}{\vartheta - 1} \right|.$$

In questa,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  è il periodo del sistema (ad un solo grado di libertà) e  $\vartheta = \frac{\omega}{v}$  è il rapporto tra frequenza  $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$  del sistema oscillante e frequenza  $\left(\frac{v}{2\pi}\right)$  del moto tellurico. Da questo indice si trae la conseguenza che per  $\vartheta \rightarrow 1$  (tendenza alla risonanza),  $\Phi \rightarrow \infty$  (tendenza alla rovina).

Occorre perciò tenersi lontani dalla risonanza e possibilmente fare sì che sia  $\vartheta \ll 1$ ; cioè stare con la costruzione sulle basse frequenze, quasi a realizzare un pendolo sismico pressochè insensibile alle scosse. Per  $\vartheta > 1$  occorre portarsi intorno al punto di minimo di  $\Phi$  che si ha per  $\vartheta = 2$  ed è  $\Phi = 4$ . Ma questa è una condizione già alquanto gravosa, si ha nientemeno che una amplificazione 1:4 dell'accelerazione del suolo; al solo VII grado della *scala Mercalli*, 4,  $50 = 200 \text{ cm sec}^{-2}$ , ciò che vuol dire forze orizzontali  $\sim \frac{1}{5}$  del peso.

Ora, i periodi delle azioni sensibili si aggirano, per quanto ho potuto trovare nei massimi trattati di Sismologia (tanto incuranti nel fornire dati statistici che interessano i costruttori quanto precisi nel fornire tutto quanto con l'asismica ha nulla a che vedere), i 0,25-1,50 sec.; evidentemente non

(1) A. DANUSSO, *Sulla statica delle costruzioni asismiche*. Cfr. l'ed. nei «Rendiconti del Sem. Mat. del Politecnico di Milano», vol. II, 1928.

(2) M. PANETTI, *Sulla tecnica delle costruzioni asismiche*. «Atti Società degli ingegneri ed architetti di Torino», 1919.



resta che tenersi su periodi bassi, così che sia almeno  $\Phi = 1$ , ciò che si ha per  $\frac{\omega}{v} < 0,62$  e quindi per  $T > 2,42$  sec.

Ma questo è ben difficile realizzare nelle costruzioni usuali, sicchè ci si accontenta di seguir i suaccennati dettami statici regolamentari e tutta una serie di norme costruttive che l'esperienza ha ormai canonizzate.

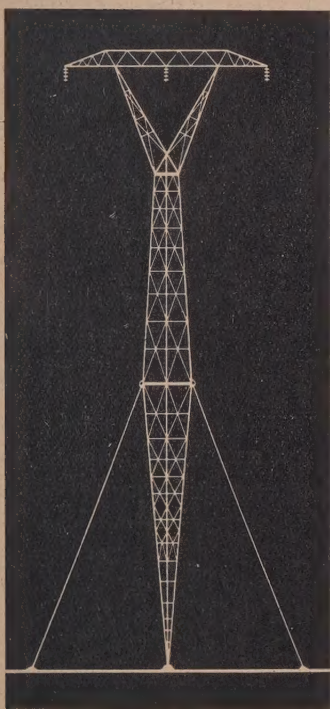


Fig. 1.

Per torri di qualunque altezza credo che sia facile raggiungere alti periodi con sistemi strallati del tipo indicato in fig. 1; risultano allora veri *pendoli sismici* capovolti. Ma in caso diverso? Non resta che affrontare la realtà, sfruttando tutte le risorse del sistema, anzitutto tenendo conto della dissipatività, poi, di una scossa più rispondente ai sismogrammi di quanto non sia stato fatto sino ad ora. Si fisserà l'attenzione sul tipo smorzato *con urto*

$$(1) \quad s_0 = r_0 e^{-kt} \sin vt, \quad \frac{1}{k} = m \frac{2\pi}{v} \quad (2 < m < 4)$$

oppure sul tipo ad *inizio dolce*, pure smorzato,

$$s_0 = r_0 \beta t e^{-kt} \sin vt.$$

Sia come si vuole, poichè l'equazione del moto, per  $s$  spostamento assoluto, azioni dissipative proporzionali ad  $\dot{s}$  (anzichè a  $\dot{s} - \dot{s}_0$ ) è, con simboli ovvi,

$$(2) \quad M\ddot{s} + c^2 s + r\dot{s} = c^2 s_0(t)$$

ovvero, posto

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{M}, \quad 2h = \frac{r}{M},$$

$$\ddot{s} + \sigma^2 s + 2h\dot{s} = \sigma^2 s_0(t).$$

Si ha in generale, per la soluzione nulla con  $\dot{s}$  per  $t = 0$ ,

$$(2a) \quad s = \frac{\sigma^2}{\omega} \int_0^t s_0(\tau) e^{-h(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

con

$$\omega = \sqrt{\sigma^2 - h^2}, \quad s(0) = \dot{s}(0) = 0.$$

Di questa soluzione e della sua derivata  $\dot{s}$  si trovano agevolmente limiti superiori. Sono purtroppo sempre elevati, sicchè conviene esplicitarla caso per caso per il dato valore di  $\omega$ ,  $h$ ,  $k$  e per alcuni valori di  $v$  nel tratto  $0,25 < \frac{2\pi}{v} < 1,50$ . La fatica è ben lieve rispetto allo spreco che può corrispondere ad un limite di calcolo facile ma di cui non si sa neanche l'errore.

Ad ogni buon conto dirò che, adottando la formola per la maggioranza degli integrali secondo Schwarz risulta subito

$$(3) \quad s < \frac{\sigma^2}{\omega} \sqrt{\frac{1 - e^{-2ht}}{2h} \int_0^t s_0^2(\tau) d\tau}$$

e questa dà per la (2a) particolarizzata con la (1)

$$(4) \quad s < \frac{r_0 \sigma^2}{\omega} \sqrt{\frac{1 - e^{-2ht}}{2h} \frac{1 - e^{-2kt}}{2k}}.$$

Per l'accelerazione si trova in tal caso

$$(5) \quad \ddot{s}_{\max} \leq r_0 \sigma^2 \left\{ e^{-kt} + \left( \frac{\sigma^2}{\omega} + \frac{2h(h+\omega)}{\omega} \right) \sqrt{\frac{1 - e^{-2ht}}{2h} \frac{1 - e^{-2kt}}{2k}} \right\}.$$

Per  $t \rightarrow \infty$

$$(4a) \quad s < \frac{r_0 \sigma^2}{2\omega} \sqrt{\frac{1}{hk}},$$

$$(5a) \quad \ddot{s}_{\max} < \frac{r_0 \sigma^2}{2} \left( \frac{\sigma^2}{\omega} + \frac{2h(h+\omega)}{\omega} \right) \sqrt{\frac{1}{hk}}.$$

Per alti smorzamenti  $h$  e  $k$  tali relazioni possono anche servire; sono in ogni caso un limite a quel  $\Phi \rightarrow \infty$  che vieta al costruttore tutto lo spettro

$$0,20 \leq \frac{2\pi}{\omega} \leq 1,50 \text{ sec.}$$



Resta a valutare  $h$ .

Dipende dall'isteresi, da attriti interni ecc. (per questi si dovrebbe porre nella (1),  $2h(\dot{s} - \dot{s}_0)$ ) ma non è su questi che voglio contare; mi voglio riferire al caso specifico, cioè allo smorzamento dovuto alle funi.

All'uopo conviene rifarsi subito alla soluzione del Rayleigh per una propagazione ondosa in una fune di cui l'equazione è

$$(6) \quad V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

con

$V = \sqrt{\frac{H_0}{\mu_0}}$  velocità della propagazione,  $H_0$  tensione,  $\mu_0$  massa per unità di lunghezza,  $\kappa = \frac{r}{\mu_0}$  con  $r$  coefficiente di resistenza viscosa. La propagazione sia sostenuta da un moto prefissato  $Ae^{i\nu t}$  ad un estremo.

Si ha, ponendo

$$(7) \quad w = Ae^{-(\alpha + i\beta)x + i\nu t}$$

$\alpha, \beta$  essendo costanti da determinare in base alle relazioni che ovviamente seguono

$$(8) \quad V^2 (\alpha + i\beta)^2 + \nu^2 - i\nu\kappa = 0$$

dunque

$$(8a) \quad V^2 (\alpha^2 - \beta^2) + \nu^2 = 0, \quad 2V^2 \alpha\beta - \nu\kappa = 0.$$

Per  $\kappa$  piccolo del 1° ordine,

$$(8b) \quad \alpha = \frac{\kappa}{2V}, \quad \beta = \frac{\nu}{V}.$$

Orbene, con riguardo a oscillazioni trasversali, con che  $w$  è misurato nel piano orizzontale, la perturbazione della fune sulla testa della torre è

$H_0 \frac{\partial w}{\partial x}$  e la (1) diviene

$$(1a) \quad \ddot{s} + \sigma^2 s + 2h\dot{s} = \sigma^2 s_0(t) + \frac{H_0}{M} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Per  $s_0(t) = r_0 e^{i\nu t}$ ,  $s(t) = A e^{i\nu t}$ , posto  $\Gamma_0 = r_0 \sigma^2$ ,

$$(-\nu^2 + \sigma^2 + 2h\nu)A = \Gamma_0 - \frac{H_0}{M} A(\alpha + i\beta).$$

e quindi si ha per  $A$  nella (7),

$$(7a) \quad A = \frac{\Gamma_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{i\theta}$$

con

$$(7b) \quad a = \left( \sigma^2 + \alpha \frac{H_0}{M} \right) - \nu^2, \quad b = \left( 2h + \frac{H_0}{MV} \right) \nu, \quad \text{tg } \theta = \frac{b}{a}.$$

Per il moto armonico forzato le cose vanno come se per virtù delle funi l'originario sistema variasse le caratteristiche da  $\sigma^2$  in  $\sigma^{*2}$ , da  $h$  in  $h^*$  secondo le relazioni

$$(7c) \quad \sigma^{*2} = \sigma^2 + \alpha \frac{H_0}{M}, \quad 2h^* = 2h + \frac{H_0}{MV}.$$

Attraverso l'evidente aumento di dissipatività si manifesta l'azione neutralizzante della fune.

L'ampiezza  $\rho$  della vibrazione del sistema risulta, in termini di  $\sigma^*$  e  $2h^*$ ,

$$(9) \quad \rho = \frac{\Gamma_0}{\sqrt{(\sigma^{*2} - v^2)^2 + 4h^{*2}v^2}}$$

ed il massimo si ha notoriamente per

$$v^{*2} = \sigma^{*2} - 2h^{*2}$$

ed è

$$\rho = \frac{\Gamma_0}{2h^* \omega^*}$$

con

$$\omega^* = \sqrt{\sigma^{*2} - h^{*2}}.$$

L'accelerazione massima è

$$|\ddot{s}| = \rho v^{*2} = \frac{\Gamma_0}{2h^* \omega^*} v^{*2} = \frac{\Gamma_0}{2h^*} \sigma^* \frac{1 - 2\left(\frac{h^*}{\sigma^*}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{h^*}{\sigma^*}\right)^2}}.$$

onde segue, in condizioni di regime,

$$(10) \quad \Phi = \frac{|\ddot{s}|_{\max}}{|\ddot{s}_0|_{\max}} = \frac{\sigma}{2h^*} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h^*}{\sigma^*}\right)^2}} \frac{\sigma}{\sigma^*}.$$

Per  $h^* \rightarrow 0$ ,  $\Phi \rightarrow \infty$  come si sa.

A regime raggiunto, per  $v$  qualunque, si ha (cfr. le (9), (9a) e (9b))

$$(10a) \quad \Phi = \frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v}{\sigma^*}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h^*}{\sigma^*}\right)^2 \left(\frac{v}{\sigma^*}\right)^2}}.$$

Per il caso di una scossa di tipo generale  $s_0 = s_0(t)$  occorrerebbe rifarsi dalle (7a, b, c) attraverso l'integrale di Fourier per arrivare alla soluzione effettiva. La scrittura ne è vana dal punto di vista applicativo e perciò la ometto. Credo che si può ammettere che, per il moto forzato, una torre con funi in testa si comporta, grosso modo, come la stessa senza funi, nella quale sia sostituito  $\sigma$  con  $\sigma^*$  e  $h$  con  $h^*$  secondo le (7c). Tutte queste considerazioni sono valide per fili attaccati in testa o per fili a spinta costante passanti su scarpe



solidali con le torre. Se invece le scarpe sono sospese su una catena di isolatori, il sistema aumenta un grado di libertà; l'efficacia può venir fortemente ridotta come è del resto intuibile in quanto la fune costituisce una massa di un vero e proprio pendolo sismico di cui l'asta è costituita dalla catena di isolatori. Si potrebbe ovviare l'inconveniente inserendo due catene di isolatori inclinate a V. Rileverò che la torre è stata schematizzata con un sistema ad un solo grado di libertà, ma ciò sembra abbastanza legittimo, quando per  $M$  si sostituisca la cosiddetta *massa ridotta*, e  $\frac{2\pi}{\sigma} = T_0$  sia il periodo effettivo da calcolare con i tanti metodi che sono ben noti.

Una formola usuale dà per il periodo fondamentale  $T_0$ ,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\delta_0 \cdot M}$$

con  $\delta_0$  spostamento che provoca la forza orizzontale in testa  $F = 1$  nel suo senso d'azione;  $M$  cosiddetta *massa ridotta* data da

$$M = \sum_i \frac{G_i}{g} w_i^2$$

essendo  $w_i$  gli spostamenti dei carichi  $G_i$ , concentrati nei nodi, provocati dalla forza  $F = \frac{1}{\delta_0}$  applicata in testa (cioè da quella forza che provoca in testa lo spostamento 1),  $g = 9,81 \text{ m sec}^{-2}$ . Spostamenti e forza si intendono trasversali all'asse della torre.

Per lo spettro completo od almeno per i periodi successivi sono noti procedimenti classici su cui non è il caso di intrattenersi.

*Moto libero.* — Fissiamo ora l'attenzione sul caso del moto libero onde calcolare il periodo fondamentale e lo smorzamento delle oscillazioni susseguenti ad una perturbazione iniziale. Poniamo nella (9)

$$v = v' + iv''$$

con  $v'$ ,  $v''$  reali. Si ottiene dalla (1 a) per  $s_0 = 0$

$$\sigma^2 - v'^2 - 2iv'v'' + v''^2 + 2bv'i - 2bv'' = -\frac{H_0}{M}(\alpha + i\beta).$$

Da qui, partendo da  $v'' = 0$  ed avvalendosi quindi delle (8 b) attese le (8 b) valide per  $\alpha$  piccolo del 1° ordine, risulta

$$(11) \quad \begin{aligned} v'^2 &= \sigma^2 + v''^2 + \gamma V\alpha - 2bv'' \\ v'' &= \frac{2b + \gamma}{2}, \quad \gamma = \frac{H_0}{MV}. \end{aligned}$$

Si ha così per il periodo  $T^*$  della torre solidale con la fune indefinita

$$(12) \quad T^* \cong \frac{2\pi}{v'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma^2 + v''(v'' - 2b) + \gamma V\alpha}}.$$



Per lo smorzamento si ha il fattore  $e^{-\gamma''t}$  che, per  $h = 0$  diviene  $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$  e questo dà la vera misura della dissipazione dell'energia incanalata dalla torre nella fune.

Concludendo rileverò che usando schematizzazioni a più gradi di libertà non si presentano in ogni caso difficoltà tecnico-analitiche a prendere il problema per quel che è, ma, alla fine, per passare ai numeri si ricade nelle attuali formole, almeno in prima approssimazione.

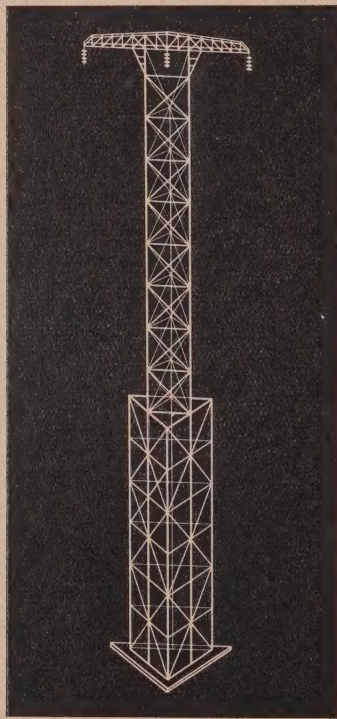


Fig. 2.

*Esempio.* - Con riguardo alla torre di cui alla fig. 2, alta 200 m., base triangolare di lato 27,50 m., su 6 rispettivamente 3 colonne  $\Phi$  700 mm. spessore medio  $\delta = 6,5$  mm.; si trova un limite inferiore (perchè si suppone rigido l'incastro) del periodo fondamentale dato da  $T_0 = 2,77$  sec. Si ha infatti da calcoli a parte

$$\delta_0 = 5,1058 \cdot 10^{-3} \text{ cm kg}^{-1} \quad \text{e} \quad Mg = 37800 \text{ kg.}$$

La terna di funi scorrevoli sulle scarpe sospese agli isolatori a V equivale negli effetti sulle oscillazioni trasversali al piano delle catenarie a  $2 \cdot 3 = 6$  funi. Ognuna ha un tiro di 22700 kg., quindi  $H_0 = 6 \cdot 22700 = 136200$  kg. Il peso per ogni fune è  $\mu_0 g = 2,24 \text{ kg m}^{-1}$ . Da qui si ha  $V = 308,41 \text{ m sec}^{-1}$



e  $\gamma = 0,11652$ . Ponendo  $x = 0$  è  $\sigma^* = \sigma = 2,267$  e quindi, per  $h = 0$ ,  $h^* = H_0 : 2 MV = 0,0583$ .

Per azioni sismiche armoniche le più vicine al sincronismo, quindi aventi periodo  $T = 2\pi/\nu = 1,50$  sec. si ha  $\frac{\nu}{\sigma^*} = \frac{T_0}{T} = 1,847$  e  $h^* : \sigma^* = 0,02569$ , onde segue il rapporto di amplificazione  $\Phi$ , secondo la (10a),  $\Phi = 0,4142$ , quindi le accelerazioni del sistema sono meno della metà dell'accelerazione sismica con periodo il più sfavorevole. Per condizioni di sincronismo (che potrebbero aver luogo per terremoti lontani,  $T \approx 1,60$  sec.) si ha secondo la (10)  $\Phi = 19,466$  anziché  $\Phi \rightarrow \infty$  come si avrebbe in assenza delle funi (e si rilevi che si è trascurata ogni altra azione dissipativa). Naturalmente, atteso il notevole periodo, il sincronismo su terremoti pericolosi si può escludere, nel caso specifico, sicchè si possono evitare gli isolatori a V, non troppo ortodossi nella trasmissione elettrica. Per torri meno elevate, con periodi più piccoli, i fili vengono adirittura attaccati (isolatori sulla tangente alla catenaria) e lo smorzamento ha luogo senz'altro anche per vibrazioni nel piano della catenaria. Naturalmente occorre fissare l'attenzione sui periodi successivi al 1° che in realtà è alquanto più elevato di quello qui considerato ed anzi sorpassato dal periodo dei moti rigidi consentiti dalle fondazioni. La problematica si complica materialmente in modo sensibile e non è il caso di insistere in queste pagine dove ho riportato dei soli cenni.

Per la  $\Phi$  secondo la relazione del Danusso si ha infine, poichè  $\vartheta = 1 : 1,847 = 0,541$ ,  $\Phi \cong 0,640$ .

Si rilevi ancora che, applicando le (11) e (12) si trova per  $\alpha = 0$ ,  $h = 0$ ,  $\nu'^2 = \sigma^2 + \nu''^2$  e  $\nu'' = \frac{1}{2}\gamma$  dunque, essendo  $\gamma = 0,11652$ ,  $\nu'' = 0,05826$  e quindi un innalzamento, sia pur lieve, della frequenza.

Il periodo  $T^*$  secondo la (12) resta praticamente eguale all'originario valore  $T = 2,77$  sec.

### **Meccanica.** — *Dinamica ed aerodinamica dei fili. Premesse. Vibrazioni visibili.* Nota I (\*) del Corrisp. G. KRALL.

Fenomeni vibratorii, dinamici od aerodinamici dei fili appaiono, più o meno preoccupanti in ogni caso fuori dallo sperimentato, particolarmente nell'ambito della trasmissione elettrica su grandi portate<sup>(1)</sup>. Tali fenomeni si possono dividere in due categorie ben distinte:

I. Le oscillazioni visibili, di grande ampiezza, pericolose per l'avvicinamento tra due funi e corto circuito conseguente.

(\*) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Quanto viene qui esposto riflette parte degli studi che ho svolti in relazione al progetto — diretto con suggestiva competenza dal prof. Ing. G. Silva della *Coniel* — per l'attraversamento con linea aerea dello Stretto di Messina.

II. Le oscillazioni invisibili, acustiche, prodotte dal vento costante, che minano per la loro azione persistente la resistenza dei cavi particolarmente in corrispondenza agli attacchi.

In riguardo alle oscillazioni della I categoria, verrebbe fatto di credere che il loro studio analitico sia ormai quasi completo. Ed infatti è un problema particolare della dinamica dei fili lo studio delle oscillazioni di una corda tesa, studio che ha inaugurato con Bernoulli, d'Alembert, Lagrange, la Fisica matematica.

La fune disposta secondo una catenoidale ha fornito a sua volta una serie completa di problemi dinamici assai più complessi (portati però a buon fine solo per i casi simmetrici), dal Routh nella sua classica *Dinamica* <sup>(2)</sup>.

Questi studi sono stati ripresi in particolare da K. Wolf in un articolo <sup>(3)</sup> in cui si studiano le oscillazioni (simmetriche) conseguenti ad una improvvisa perdita di tutto il carico accidentale (ghiaccio) e conseguenti oscillazioni attorno alla configurazione d'equilibrio. Ma, naturalmente, la più completa trattazione quand'anche riuscisse, perde ogni pratico significato se la precisazione dei dati del problema è del tutto affidata all'arbitrio come avviene necessariamente nel caso di cui si tratta.

Come prevedere infatti l'entità delle perturbazioni dinamiche esterne di una fune: vento, vortici, caduta o formazione improvvisa del ghiaccio su tutta o parte della portata?

Ogni risultato dipende quindi, evidentemente, da condizioni che si debbono stabilire per semplici presunzioni. Sicchè, sia come si vuole, è sempre aperto ed attuale, se non si vorrà considerare soddisfacente la soluzione in certo senso probabilistica che qui vien data, il problema tecnico che sta nello stabilire la minima distanza  $\Delta$  tra due fili paralleli sufficiente a garantire che le oscillazioni indotte da azioni esterne possibili non porti al contatto (più precisamente ad una distanza inferiore a  $\sim 12$  cm per ogni 10.000 Volt di tensione).

Dirò per completezza che taluna disposizione consiglia di ammettere, tanto per fissare le idee, che, dati due fili, sotto l'azione del vento e tutti e due ugualmente sovraccaricati da ghiaccio (pari  $0,160 \sqrt{r}$  kgm<sup>-1</sup> per  $r$  in mm) uno di essi perda istantaneamente tutto il carico accidentale.

Il vento, problematico però in presenza del ghiaccio, provoca allora uno sbandamento maggiore del piano della catenaria del filo meno caricato; la possibilità del contatto è evitata purchè le distanze tra i due assi di rotazione dei piani delle due catenarie sia superiore a quanto risulta con ben ovvio calcolo grafico. L'impostazione più semplice, ma assai meno semplicista, che qui si addotta, è invece la seguente: *Ammesso che per una catenaria di corda  $L$ , freccia  $f$ , fune di raggio  $r$ , peso per unità di lunghezza  $\mu_0 g$ , un distanziamento  $\Delta$  si sia dimostrato in pratica sufficiente, quale sarà il distanziamento  $\Delta'$  per dati diversi:  $L', f', r', \mu_0'?$*

(2) ROUTH, *Dynamics*. Macmillan and Co. London - New-York, 1892.

(3) R. WOLF, «Z. f. A. M.», 1927.



Passando alle oscillazioni della II categoria, mi rifaccio alla teoria delle *scie vorticose* di Kármán ed al bel risultato di Krüger e Lauth sulla frequenza  $N$  della nota emessa da un filo di diametro  $D$  investito da una corrente stazionaria di velocità  $V$ , frequenza data da

$$N = \frac{0,20 V}{D}.$$

In una Nota II completo quel lavoro calcolando l'intensità delle vibrazioni indotte, intensità che non mi risulta esser stata ancora calcolata; da più parti anzi mi è stata proposta la quistione che è interessante per lo studio delle vibrazioni delle torri circolari, camini industriali, ecc.

Dopo queste premesse comincio senz'altro a discutere il

*Problema delle oscillazioni visibili* (Categoria I). — Su una fune tesa con tensione  $H_0$  agisca una distribuzione di carico funzione del tempo  $p = p(x, t)$ . Sia  $\mu_0 = q_0 : g$  la massa per unità di lunghezza. Contato l'asse  $x$  da un estremo, ove agisca una resistenza viscosa  $-k_0 \frac{\partial w}{\partial t}$ , si ha, sotto condizioni ben note, l'equazione

$$(1a) \quad H_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_0 \frac{\partial w}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p(x, t).$$

Con riguardo ad una perturbazione del tipo

$$(2) \quad p(x, t) = \sum_n \Pi_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

attesa la linearità della (1a) potremo fissare l'attenzione su un solo termine della serie, quello  $n^{\text{imo}}$  ad esempio. Posto  $w = w_n = u_n(x) \cdot \varphi_n$  con  $u_n = \sin \frac{n\pi}{L} x$  la (1a) porge senz'altro:

$$(3) \quad \ddot{\varphi}_n + 2h_n \dot{\varphi}_n + \sigma_n^2 \varphi_n = A_n(t),$$

il punto indicando derivazione rispetto al tempo  $t$  ed essendo

$$(4) \quad \sigma_n^2 = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{H_0}{\mu_0}, \quad 2h_n = 2h = \frac{k_0}{\mu_0}, \quad A_n = \frac{\Pi_n}{\mu_0}.$$

La soluzione della (3) che rispecchia il solo moto forzato, e si annulla quindi con  $\varphi$  in,  $t = 0$ , è

$$(5) \quad \varphi_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t A_n(\tau) e^{-h_n(t-\tau)} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau.$$

La soluzione della (1) diviene

$$w = \sum w_n = \sum u_n \varphi_n.$$

Ciò posto, consideriamo alcuni tipi di sollecitazione particolarmente notevoli.

*Sia agente una perturbazione periodica qualsiasi.* - Fissando l'attenzione su un termine generico, omettendo la scrittura dell'indice  $n$  sia  $p(x, t) = \Pi \sin vt \sin \frac{\pi}{L} x$  con  $v$  tale da dar luogo alla condizione di risonanza in presenza di smorzamento. Risulta dalla (5) l'ampiezza massima

$$(6) \quad \varphi_{\max} = \frac{A}{2b\omega} \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\sigma^2 - b^2}, \quad A = \frac{\Pi}{\mu_0}$$

e quindi:

$$(7) \quad w_{\max} = \frac{A}{2b\omega} \sin \frac{\pi}{L} x = \frac{\Pi}{2\mu_0 b\sigma \sqrt{1 - \left(\frac{b}{\sigma}\right)^2}} \sin \frac{\pi}{L} x.$$

Per una fune di lunghezza  $L'$ , applicando l'apice ad ogni elemento che ad essa si riferisce, indicando con  $\Pi'$  l'ampiezza della sollecitazione ed ammettendo naturalmente la distribuzione sia secondo  $\sin \frac{\pi}{L'} x'$  anzichè  $\sin \frac{\pi}{L} x$ , sarà

$$w' = \frac{\Pi'}{2\mu'_0 b' \sigma' \sqrt{1 - \left(\frac{b'}{\sigma'}\right)^2}} \sin \frac{\pi}{L'} x'.$$

Avendosi per la spinta  $H_0$ ,

$$H_0 = \frac{q_0 L^2}{8f},$$

sarà

$$\sigma_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \frac{H_0}{\mu_0} = \frac{n^2 \pi^2}{8} \frac{g}{f}, \quad \sigma'_n = \frac{n^2 \pi^2}{L'^2} \frac{H'_0}{\mu'_0} = \frac{n^2 \pi^2}{8} \frac{g}{f'}.$$

Segue, riscrivendo l'indice  $n$ ,

$$\frac{w'_n}{w_n} = \frac{\Pi'_n}{\Pi_n} \frac{\mu_0}{\mu'_0} \frac{b}{b'} \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{\sigma_n}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b'}{\sigma'_n}\right)^2}}.$$

Supponendo  $p: p' = \text{cost.}$  per ogni valore di  $x$  e  $t$ , quindi, come è naturale, ammettendo sieno affini rispetto ad  $x$  le distribuzioni  $p$  e  $p'$  sarà

$$\frac{\Pi'_n}{\Pi_n} = \frac{p'}{p}.$$

Poichè infine, per esser  $\sigma_n < \sigma_{n+r}$ ,

$$1 - \left(\frac{b}{\sigma_n}\right)^2 < 1 - \left(\frac{b}{\sigma_{n+r}}\right)^2 \quad (r \geq 1)$$



potremo scrivere, come risulta con semplici sviluppi

$$(8) \quad \frac{w'}{w} \leq \frac{p'}{p} \frac{k}{k'} \sqrt{\frac{f'}{f}} \gamma - \frac{\Delta'}{\Delta}$$

$$\gamma = \frac{1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{k f}{g}}{1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{k' f'}{g}}$$

Se la perturbazione deriva dal vento,

$$\frac{p'}{p} = \frac{r'}{r}$$

e quindi

$$(8a) \quad \frac{w'}{w} \leq \frac{r'}{r} \frac{k}{k'} \sqrt{\frac{f'}{f}} \gamma = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Per una brusca applicazione o eliminazione di un carico  $\hat{p} = \Pi \sin \frac{\pi}{L} x$  (colpo di frusta), si ha, ponendo adirittura  $k = 0$  (4),

$$(9) \quad w = \frac{\Pi}{\mu_0 \sigma^2} (1 - \cos \sigma t) \sin \frac{\pi}{L} x.$$

Segue per il massimo di  $w$ ,

$$(10) \quad w_{\max} = \frac{2 \Pi}{\mu_0 \sigma^2}.$$

Per la fune di caratteristiche accentate sarà:

$$w'_{\max} = \frac{2 \Pi'}{\mu'_0 \sigma'^2}.$$

Risulta così

$$(11) \quad \frac{w'}{w} = \frac{\Pi'}{\Pi} \frac{f'}{f} \frac{q}{q'} = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Se  $\Pi$  deriva dal ghiaccio bruscamente caduto

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \sqrt{\frac{r'}{r}}$$

e quindi

$$(11a) \quad \frac{w'}{w} = \sqrt{\frac{r'}{r}} \frac{f'}{f} \frac{q}{q'}$$

ovvero, poichè  $\frac{q}{q'} \cong \frac{r^2}{r'^2}$ ,

$$(11b) \quad \frac{w'}{w} = \left(\frac{r}{r'}\right)^{3/2} \frac{f'}{f} = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

(4) Op. cit. in (1), p. 38.

La condizione è per  $\frac{f'}{f} > 1$  più sfavorevole della (8 a), ma è difficile che possa realizzarsi per grandi luci. Consideriamo un'azione impulsiva del tipo

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \Pi dt = \mathfrak{J} \sin \frac{\pi}{L} x.$$

Sarà (5)

$$\varphi = \frac{\mathfrak{J}}{\mu_0 \sigma} \sin \sigma t$$

quindi  $w_{\max} = \frac{\mathfrak{J}}{\mu_0 \sigma}$  rispettivamente  $w'_{\max} = \frac{\mathfrak{J}'}{\mu' \sigma'}$ .

Dunque

$$(12) \quad \frac{w'}{w} = \frac{\mathfrak{J}'}{\mathfrak{J}} \frac{q}{q'} \sqrt{\frac{f'}{f}} = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Se  $\mathfrak{J}$  ed  $\mathfrak{J}'$  derivano dal vento,  $\frac{\mathfrak{J}'}{\mathfrak{J}} = \frac{r}{r'}$  e perciò

$$(12a) \quad \frac{w'}{w} = \frac{r'}{r} \frac{q}{q'} \sqrt{\frac{f'}{f}}$$

ovvero, per  $\frac{q}{q'} = \frac{r^2}{r'^2}$ ,

$$(12b) \quad \frac{w'}{w} = \frac{r}{r'} \sqrt{\frac{f'}{f}} = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Per un'azione localizzata (puntuale in rigore) il distanziamento è indipendente dalla freccia. Inutile dire che la freccia nasconde sostanzialmente la luce L, si ha infatti

$$\left( \frac{L'}{L} \right)^2 = \frac{f'}{f} \frac{q_0}{q'_0}.$$

Le formole (8) (8 a), (11) (11 a), (12) (12 a) debbono ritenersi molto sfavorevoli per L grande e  $< L'$ .

Infatti è sfavorevole ammettere che, poniamo, una causa accidentale su L, si dilati tutta su  $L'$  se  $L \ll L'$ .

Dette formole consentono di scegliere il materiale ( $\mu_0 g$ ), il raggio  $r'$  e  $\Delta'$  con ragion veduta, da un modello tratto dalla realtà con i dati  $\mu_0, r, \Delta, f$ .

*Esempio.* - Per una terna esistente sia

$$\mu_0 g = 1,50 \text{ kgm}^{-1} \quad ; \quad f = 50 \text{ m.} \quad ; \quad \Delta = 8,00 \text{ m.} \quad ; \quad 2r = 2,00 \text{ cm.}$$

Si domanda il distanziamento per una terna per cui

$$\mu_0 g = 2,34 \text{ kgm}^{-1} \quad ; \quad f = 180 \text{ m.} \quad ; \quad 2r = 2,64 \text{ cm.}$$

(5) Op. cit. in (1), cap. I, p. 37.



Risulta secondo la (8a) per  $k \simeq k'$ ,  $\gamma \simeq 1$ ;

$$\Delta' = 8,00 \frac{2,64}{2,00} \cdot \sqrt{\frac{180}{50}} = 20,04 \text{ m.}$$

Secondo la (11b) (colpo di frusta su *tutta* la campata), molto problematico per frecce e quindi portate così notevoli,

$$\Delta' = 8,00 \left( \frac{2,64}{2,00} \right)^{3/2} \frac{180}{50} = 43,67 \text{ m.}$$

Secondo la (12b) per un'azione impulsiva su tutta la campata

$$\Delta' = 8,00 \frac{2,64}{2,00} \sqrt{\frac{180}{50}} = 20,04 \text{ m.}$$

Infine, ripeto, per azioni localizzate il distanziamento non dipende da  $f$  e quindi da  $L$ .

**Meccanica.** — *Dinamica ed aerodinamica dei fili. Vibrazioni acustiche.* Nota II (\*) del Corresp. G. KRALL.

È noto che il vento costante su un filo o su di un'asta genera vibrazioni.

Dipendono queste da una scia vorticoso, scoperta da BÉNARD (1) e magistralmente studiata da KÁRMÁN (2) in una memorabile ricerca. In questa si dimostra l'esistenza di 2 possibili (non coesistenti) schiere vorticoso dietro

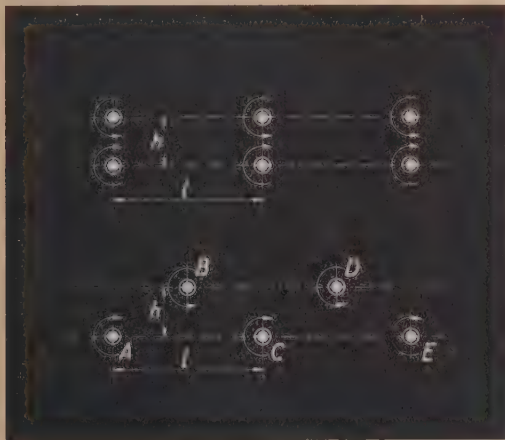


Fig. 1.

ad un corpo investito da una corrente stazionaria. Una è costituita da vortici disposti simmetricamente, l'altra da vortici alternati a zig zag come in fig. 1.

(\*) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) BÉNARD, «Compt. rend.», 147 p. 839 (1908), pp. 1003 e 1225 (1913).

(2) KÁRMÁN, «Physik-Zschrift», 13, p. 42 (1912).

*La schiera simmetrica è instabile, l'asimmetrica è stabile. Ci riferiremo pertanto alla sola schiera asimmetrica.*

Se il vento ha velocità  $V$  la schiera ha, relativamente al corpo, una velocità  $V - v$  (con  $v < V$ ). Se il fluido è in quiete ed il corpo è mobile con velocità  $V$ , la schiera ha una velocità  $v$  e la velocità relativa è sempre  $(V - v)$ . Il rapporto  $a = \frac{v}{V}$  è un numero fondamentale *sperimentalmente* misurabile in base al conteggio dei vortici che si liberano nell'unità di tempo. *Per il cilindro* si ha

$$(14) \quad a = \frac{v}{V} \cong 0,14.$$

Il rapporto  $b = \frac{l}{D}$  tra la distanza tra 2 vortici della stessa fila ed una dimensione  $D$  di riferimento del corpo è, al pari di  $a$ , un numero base, da misurare *sperimentalmente*. *Per il cilindro*, identificando  $D$  con il diametro, si ha

$$(14a) \quad b = \frac{l}{D} \cong 4,3.$$

Infine, per il rapporto  $\frac{b}{l}$  risulta dal calcolo, come condizione di stabilità trovata da Kármán,

$$(14c) \quad \frac{b}{l} = 0,283.$$

La frequenza  $N$  con cui si libera una coppia coniugata di vortici è, evidentemente,

$$(15) \quad N = \frac{V - v}{l}.$$

In termini di  $a$  e  $b$  si ha subito

$$(15a) \quad N = \frac{V \left(1 - \frac{v}{V}\right)}{D \frac{l}{D}} = \frac{V(1 - a)}{D \cdot b};$$

segue la relazione di suggestiva semplicità dovuta a Krüger e Lauth<sup>(3)</sup>.

$$(16) \quad \frac{ND}{V} = \frac{1 - a}{b} \cong 0,20.$$

In base a questa, data la velocità del vento e il diametro del filo, si calcola la frequenza della perturbazione, cioè la nota emessa.

Quale *portanza*  $Y$  ha questa perturbazione?

Krüger e Lauth giustamente osservano che essa deve essere proporzionale alla intensità  $\Gamma$  del vortice e rilevando che, secondo Kármán, tale intensità vale

$$(17) \quad \Gamma = \sqrt{8} \, l \cdot v$$

(3) KRÜGER, LAUTH, «Ann. d. Physik», p. 801 (1914).



poichè  $l = bD$ ,  $v = aV$ , scrivono per  $\Gamma$

$$(17a) \quad \Gamma = \sqrt{8} \cdot ba \cdot VD,$$

ma arrestano a questo punto ogni ulteriore considerazione.

Ora io mi propongo di far vedere che  $Y = Y(t)$  ha un andamento periodico, che per il momento non resta che ritenere quasi costante a tratti nell'intervallo  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$  con  $T$  periodo

$$T = \frac{l}{N} = \frac{D}{0,20 \cdot V}$$

$$(18) \quad Y = Y_0 = \pm \kappa DV^2$$

con

$$(18a) \quad \kappa = \sqrt{8} \cdot ba \cdot \frac{1-a}{2}.$$

La dimostrazione di questa relazione è molto semplice. Basta rilevare che corrispondendo ad ogni coppia coniugata di vortici che si stacca in un periodo una quantità di moto  $\rho\Gamma \cdot d$  normale alla congiungente i loro centri <sup>(4)</sup>, la sua proiezione su un asse normale a  $V$  vale

$$\rho\Gamma \cdot d \cdot \frac{l}{d} = \rho\Gamma \frac{l}{2}.$$

Ora, per vortici coniugati potremo ammettere tanto le coppie  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ , ...; quanto le  $BC$ ,  $DE$ ,  $FG$ , ...

Nell'unità di tempo, l'incremento della quantità di moto, normalmente a  $v$  è dunque

$$Y_0 = \pm \rho\Gamma \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{V-v}{\frac{l}{2}};$$

+ o - a seconda che deriva da una coppia coniugata  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  o  $BC$ ,  $DE$ ,  $FG$  ecc. Perciò daremo ad ognuna della 1<sup>a</sup> serie la quantità di moto  $\rho\Gamma \frac{l}{4}$ , ad ognuna della 2<sup>a</sup>, la quantità  $\rho\Gamma \frac{l}{4}$ . Ma l'incremento della quantità di moto nell'unità di tempo dà il valor medio della forza. Nel caso attuale la forza è, *in media*, costante a tratti, eguale  $\pm Y_0$ , lo scambio di

segno avvenendo ogni mezzo periodo  $\frac{l}{V-v}$ .

Si ha quindi

$$Y_0 = \rho\Gamma V \frac{V-v}{2} = \rho\Gamma V^2 \frac{1-a}{2}$$

(4) PISTOLESI, *Aerodinamica*, p. 354, U. T. E. T., Torino 1932.

ovvero; poichè  $v:V = a$ ,  $\Gamma = \sqrt{8} ba VD$ , posto

$$\kappa = ba \frac{1-a}{\sqrt{a}}, \quad Y_0 = \kappa \rho DV^2; \quad \text{c. d. d.}$$

Segue per il cilindro, introducendo i noti valori di  $b$  ed  $a$ ,  
(18 b)  $Y_0 = 0,73 \rho DV^2$ .

Esprimendo  $Y = Y(t)$  con uno sviluppo di Fourier dell'ipotetico diagramma spezzato, risulta

$$(18 c) \quad Y(t) = \rho \kappa DV^2 \left\{ \sin \frac{2\Pi}{\tau_0} t + \frac{1}{3} \sin \frac{6\Pi}{\tau_0} t + \frac{1}{5} \sin \frac{10\Pi}{\tau_0} t + \dots \right\}$$

con

$$\tau_0 = \frac{1}{N} \cong \frac{0,20}{VD}.$$

Ma ci limiteremo a considerare come ragionevole il solo 1° termine della serie per trarre subito qualche risultato.

L'equazione della fune con rigidità flessionale si ha aggiungendo a destra della (1) il termine  $E\mathfrak{J} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ , in cui per  $\mathfrak{J}$  si introdurrà un momento d'inerzia di una sezione omogenea in certo senso equivalente a quella trefolata della fune, con che l'equazione diviene

$$(1 a) \quad E\mathfrak{J} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - H_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_0 \frac{\partial w}{\partial t} = p(x, t) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Per

$$(19) \quad p(x, t) = p_0 \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin vt \quad \text{con} \quad p_0 = \rho \kappa DV^2 \quad \text{e} \quad v = 2\pi N$$

si hanno in condizioni di risonanza (ci sarà sempre un  $\sigma_n: 2\pi$  prossimo ad  $N$ ), ampiezze massime. Omettendo la scrittura di  $n$ ,

$$w_{\max} = \frac{\kappa \rho DV^2}{2 \mu_0 b \omega} = \frac{\kappa \rho DV^2}{2 k_0 \omega}.$$

Ora, poichè in tali condizioni  $\omega = v = 2\pi N$ ,  $V = \frac{ND}{0,20}$ , sarà

$$(20) \quad w_{\max} = \frac{\kappa \rho D^2 V}{2 \cdot 0,40 \pi k_0}$$

purchè esista un  $n$  di  $\sin \frac{n\pi}{L} x$  tale che

$$(21) \quad \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}}{\mu_0} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 + \frac{H_0}{\mu_0} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2} \cong 2\pi N \cong 0,40\pi \frac{V}{D}.$$

Dall'espressione del momento flettente

$$(22) \quad M = E\mathfrak{J} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$



risulta

$$(22 a) \quad M_{\max} = E \mathfrak{J} w_{\max} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2.$$

Ponendo per il momento d'inerzia  $\mathfrak{J}$

$$\mathfrak{J} = \frac{\beta}{64} D^4 \pi$$

con  $\beta$  fattore di riduzione (può esser anche  $\beta \ll 1$ ) attesa la (21) sarà

$$\left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \approx 0,16 \pi^2 \frac{V^2}{D^2} \frac{8f}{L^2} \frac{1}{g} \quad (g = 9,81 \text{ m sec}^{-2}).$$

Segue con qualche riduzione indicando con  $s_0$  la sollecitazione specifica

$$H_0: \frac{D^2 \pi}{4},$$

$$(22 b) \quad M = \beta E \frac{\pi}{80} D^2 \frac{\kappa \rho}{k_0} V^3 \frac{p_0}{g s_0}$$

e per la sollecitazione specifica massima  $s_{\max}$

$$(23) \quad s_{\max} \approx \pm \frac{\beta}{2,5} E D^{-1} \frac{\kappa \rho}{k_0} V^3 \frac{p_0}{g s_0}.$$

*Osservazione.* — Si rileva che l'ampiezza delle vibrazioni e quindi l'intensità del tono *non* dipendono dalla portata  $L$ . Ciò avviene al più in via indiretta.

Precisamente, avendosi dalla (21), trascurando senza sensibile errore il 1° termine del radicando, per le velocità di risonanza

$$(24) \quad V = D (n\pi) \sqrt{\frac{g}{1,28 f}} \quad (n = 1, 2, \dots;)$$

si constata subito che, essendo in pratica  $f$  crescente con  $L$ , più è grande  $f$  più è esteso lo spettro delle velocità critiche di  $V$ . Inoltre con l'estensione della fune crescono le possibilità di formazione di treni di onde con ampiezze amplificate per sovrapposizione. Anche il più tenue vento porta il filo in vibrazione, ad esser percorso da pacchetti d'onda che conviene arrestare con ammortizzatori intervallati in linea o quanto meno addensati in prossimità degli attacchi o delle scarpe.

*Esempio.* — Sia

$$2r = D = 2,64 \text{ cm}, \quad \mu_0 g = 2,34 \text{ kg m}^{-1}, \quad H_0 = 22700 \text{ kg}, \\ p g = 0,125 \cdot 9,81 \text{ kg m}^{-1}, \quad f = 180 \text{ m}, \quad V = 15 \text{ m sec}^{-1}, \quad k_0 = 0,05 \text{ kg m}^{-2} \text{ sec}.$$

Si ha dalla (16)

$$N = 0,20 \cdot 15,00 : 0,0264 = 113,6 \text{ sec}^{-1}.$$

Secondo la (18 b) si ha la portanza

$$Y_0 = 0,73 \cdot 0,125 \cdot 0,0264 \cdot 15,00^2 = 0,542.$$

Lo spostamento massimo dato dalla (20) risulta per  $k_0 = 0,05$ :

$$w = 0,73 \cdot 0,125 \cdot 0,0264^2 \cdot 15,00 : (2 \cdot 0,040 \cdot \pi \cdot 0,05) = 0,007591.$$

La sollecitazione massima  $s_{\max}$  secondo la (23) è, per  $E = 1,40 \cdot 10^{10} \text{ kg m}^{-2}$ , posto per il coefficiente di riduzione del momento d'inerzia  $\beta = 0,5$ , essendo

$$s_0 = 22,70 : 1,32^2 \pi = 4,14694 \text{ to. cm}^{-2}$$

$$s_{\max} = \frac{0,5 \cdot 1,4 \cdot 10^{10} \cdot 0,73 \cdot 0,125 \cdot 15^3 \cdot 2,34}{2,5 \cdot 0,0264 \cdot 0,05 \cdot 9,81 \cdot 4,14694 \cdot 10^7} = 375,76 \cdot 10^4 \text{ Kg m}^{-2} = 375,76 \text{ kg cm}^{-2}$$

Naturalmente occorrono esperienze per una più precisa valutazione di  $\beta$  e  $k_0$ . Infine, la minima velocità di risonanza secondo la (24) è:

$$V = 0,0264 \pi \sqrt{\frac{9,81}{1,28 \cdot 180}} = 0,0171 \text{ m sec}^{-1}.$$

Questo valore è puramente teorico in quanto si riferisce a un vento costante su una campata grandissima (dell'ordine dei km, nel caso specifico 3,725 km).

Il periodo fondamentale è, in base alla relazione ovvia:

$$T = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{8f}{g}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

posto  $n = 1$

$$T = \frac{2}{1} \sqrt{\frac{8 \cdot 180}{9,81}} = 24,23 \text{ sec.}$$

Giova rilevare, poichè i periodi decrescono con l'inverso dei numeri interi, che un periodo pari a quello calcolato per le vibrazioni acustiche della fune con vento a  $15 \text{ m sec}^{-1}$

$$T' = \frac{1}{N} = \frac{1}{113,636} = 0,0088 \text{ sec.}$$

si ha per il vento costante su *tutta* la portata

$$n = \frac{24,2308}{0,0088} \cong 2753$$

e la semilunghezza d'onda è, riferendosi nell'ordine di approssimazione assunta, alla corda anzichè alla catenaria

$$\lambda = \frac{3725}{2753} = 1,353 \text{ m.}$$

Concludendo rileverò che le oscillazioni, qui studiate, *forzate dalle schiere vorticosi* di Bénard-Kármán non debbono confondersi con quelle conseguenti alle *schiere* di Prandtl-Birnbaum degli aerotecnici. Il rilievo apre un problema di coesistenza e mutua induzione che non so come affrontare.



**Mineralogia.** — *Osservazioni ottiche e mineralogiche sulla legge di Brewster.* Nota (\*) del Socio U. PANICHI.

**I. MEZZI ISOTROPI.** — I due fasci rifratto e riflesso che si originano quando un fascio parallelo incide sulla superficie speculare di un mezzo trasparente ed isotropo, sono in generale più o meno polarizzati; e Fresnel ha dato le espressioni delle ampiezze medie che in ciascuno dei due fasci corrispondono alle due componenti pensabili con vibrazioni rispettivamente parallele e normali al piano di incidenza.

Nel fascio incidente, se di luce comune, due tali componenti ( $a$  e  $b$ ) saranno statisticamente eguali fra loro; e se  $A^2$  è l'intensità del fascio, sarà  $A^2 = 2a^2 = 2b^2$ .

Riguardo ai fasci rifratto e riflesso, chiamando rispettivamente  $a_1$  e  $a_2$  le componenti parallele al piano d'incidenza,  $b_1$  e  $b_2$  quelle normali ad esso,  $i$  ed  $r$  gli angoli d'incidenza e rifrazione (luce monocromatica), risulta:

$$a_1 = a \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)} \quad , \quad a_2 = -a \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} ,$$

$$b_1 = b \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)} \quad , \quad b_2 = -b \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} .$$

Per la luce rifratta, se  $a = b$ , sarà:

$$\frac{b_1}{a_1} = \cos(i-r) \quad \text{e perciò} \quad a_1 > b_1 .$$

Per la luce riflessa è invece  $a_2 < b_2$ .

Quando l'angolo  $i$  cresce da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , i valori  $a_2^2$  e  $b_2^2$  dell'intensità riflessa, inizialmente deboli ed eguali fra loro (essendo  $a = b$ , e, presso l'incidenza normale,  $\frac{a_2^2}{a^2} = \frac{b_2^2}{b^2} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ ), variano da prima moderatamente, decrescendo  $a_2^2$  e crescendo  $b_2^2$ . Per l'incidenza brewsteriana  $a_2^2$  si annulla, essendo  $\operatorname{tg}(i+r) = \infty$ ; e poi ambedue i valori prendono a crescere sempre più fino all'incidenza radente.

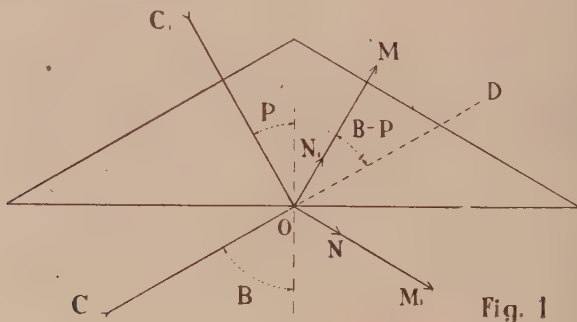
Le verifiche sperimentali delle intensità e della polarizzazione si possono fare direttamente sui fasci riflessi; mentre quelli rifratti non si possono esaminare nella sostanza, ma solo all'emergenza da essa. Così, facendo incidere un fascio parallelo di luce comune sopra una lastra isotropa a facce piane e parallele, si può, essendo gli angoli all'emergenza eguali a quelli all'incidenza, verificare, dall'intensità e polarizzazione all'emergenza, che i corrispondenti valori per il fascio rifratto soddisfano alle formule di Fresnel<sup>(1)</sup>.

(\*) Presentata nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Vedi ad esempio BRUHAT, *Cours d'Optique*, 1931, p. 341.

In quest'ordine di osservazioni ho utilmente adoperato il prisma di vetro da me presentato in altra Nota <sup>(2)</sup>. In esso l'angolo fra le due facce è  $2B$  (essendo  $B$  l'angolo di Brewster); e perciò un fascio parallelo incidente sulla base con angolo  $B$  e con piano d'incidenza normale allo spigolo del prisma, in parte si riflette nell'aria; in parte si rifrange nel prisma con angolo  $P = 90^\circ - B$ ; ed il fascio rifratto non subisce ulteriori modificazioni, poichè emerge normalmente ad una delle due facce.

Nella fig. 1 con  $CO$  è rappresentato in direzione e intensità il fascio incidente;  $ON$ ,  $OM$  rappresentano i fasci riflesso e rifratto. Il fascio  $ON$  è totalmente polarizzato con vibrazioni normali al piano  $\sigma$  di incidenza;  $OM$  è polarizzato con predominanza delle vibrazioni parallele al piano  $\sigma$ . Il che corrisponde alla legge di Brewster.



L'incidenza essendo brewsteriana, è  $\text{sen}(B + P) = 1$ , e perciò:

$$a_2 = 0 \quad \text{e} \quad b_2 = -b \text{sen}(B - P).$$

Quindi, riferendoci all'intensità incidente considerata  $= 1$ , possiamo esprimere l'intensità del fascio riflesso  $ON$  con  $\text{sen}^2(B - P)$ ; e poichè:

$$\text{sen}^2(B - P) + \cos^2(B - P) = 1,$$

l'intensità del fascio  $OM$  sarà espressa da  $\cos^2(B - P)$ .

Facciamo ora incidere il fascio di luce comune normalmente ad una delle due facce, e la sua intensità (rappresentata da  $C_1O$  nella fig. 1) sia eguale a  $CO$ ; avremo una riflessione con angolo  $P$  nel vetro ( $ON_1$ ) ed una emergenza nell'aria ( $OM_1$ ) con angolo  $B$ .

La legge di Brewster vale qui in senso inverso al consueto, sostituendo l'angolo  $P$  all'angolo  $B$ . Realmente il fascio secondo  $ON_1$  risulta totalmente polarizzato con vibrazione normale a  $\sigma$ ; il fascio secondo  $OM_1$  è polarizzato con predominanza della componente parallela a  $\sigma$ .

L'intensità per  $ON_1$  sarà espressa da  $\text{sen}^2(P - B)$  e per  $OM_1$  da  $\cos^2(P - B)$ . Avremo quindi:

$$\frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\text{sen}^2(B - P)}{\cos^2(B - P)} = \frac{\text{sen}^2(P - B)}{\cos^2(P - B)} = \frac{ON_1}{OM_1}.$$

(2) *Un nuovo polarizzatore*. « Acc. Naz. Lincei », 1946.



In accordo con ciò, ho verificato che, per un dato fascio incidente normalmente alla 1<sup>a</sup> faccia (monocromatico, parallelo, di luce comune), l'intensità del fascio riflesso *nel* vetro del prisma con angolo d'incidenza  $P$  è eguale a quella del fascio riflesso *sul* vetro con angolo di incidenza  $B$ .

Il fascio incidente si scinde in due fasci, ortogonali fra loro, di differente intensità. La fig. 1 mostra  $OM > ON$  e  $OM_1 > ON_1$ . Notiamo che l'intensità è maggiore in quello dei due fasci che, rispetto al fascio incidente, richiede minore deviazione.

Così, in un flint con  $n = 1,732$  e quindi  $B = 60^\circ$ , abbiamo  $B - P = 30^\circ$ ,  $\text{sen}^2(B - P) = 0,25$ ,  $\text{cos}^2(B - P) = 0,75$ .

Ciò vale tanto per l'incidenza  $CO$ , quanto per l'incidenza  $C_1O$ . L'angolo  $COM$  è eguale all'angolo  $C_1OM_1$ .

Aumentando l'indice di rifrazione, cresce gradatamente  $\text{sen}^2(B - P)$  e, naturalmente, decresce  $\text{cos}^2(B - P)$ ; ossia aumenta l'intensità riflessa e decresce quella rifratta.

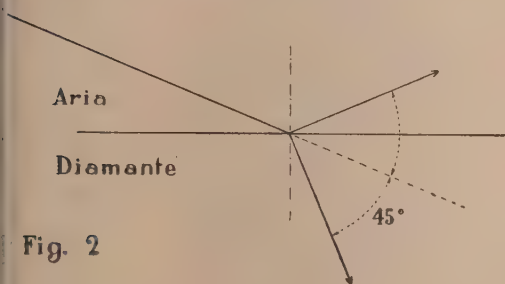


Fig. 2

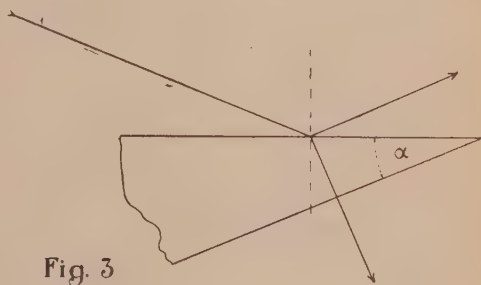


Fig. 3

Al tempo stesso cresce l'angolo  $MOD$  e decresce  $DOM_1$ ; e quando si arrivi ad avere  $MOD = DOM_1$ , sarà  $B - P = 2P$  ossia  $B = 3P$ .

Questa condizione si trova in natura soddisfatta nel diamante, specialmente per le luci fra il rosso ( $n = 2,413$ ) e il giallo ( $n = 2,419$ ); esattamente per  $n = 2,414$  si ha (fig. 2):

$$B = 67^\circ.30' \quad , \quad P = 22^\circ.30'.$$

In tale circostanza sarà:  $\text{sen}^2(B - P) = \text{cos}^2(B - P) = 0,5$ . E poichè abbiamo fin qui supposto che la luce incidente sia luce comune, sarà  $a = b$ ; e perciò, se la metà dell'intensità incidente è trasmessa al fascio riflesso  $ON$ , il quale è totalmente polarizzato con vibrazioni normali a  $\sigma$ , dovrà essere pure totalmente polarizzato, con vibrazioni parallele a  $\sigma$ , il fascio  $OM$ . Perciò il fascio rifratto nel diamante sotto l'incidenza brewsteriana è totalmente polarizzato.

Analogo risultato potrebbe fornire un vetro di indice  $= 2,414$ , con un prisma simile a quello della fig. 1, con spigolo di  $135^\circ$ , o con prisma (fig. 3) avente lo spigolo  $\alpha = 22^\circ.30'$ . In queste condizioni dunque, non solo i due fasci riflesso e rifratto sono totalmente polarizzati con piani di polarizzazione ortogonali fra loro, ma ciascuno di essi possiede il 50 % dell'intensità incidente.

Adoperiamo ora come sorgente una luce monocromatica polarizzata. Applico a tale scopo un grande nicol davanti ad una larga fenditura, nella quale penetra orizzontalmente un fascio parallelo che proviene da una lampada elettrica a vapore di sodio.

La sostanza in esame è disposta sopra una base al centro della piattaforma orizzontale di un goniometro a riflessione; la sua faccia di incidenza è verticale e girevole con la piattaforma.

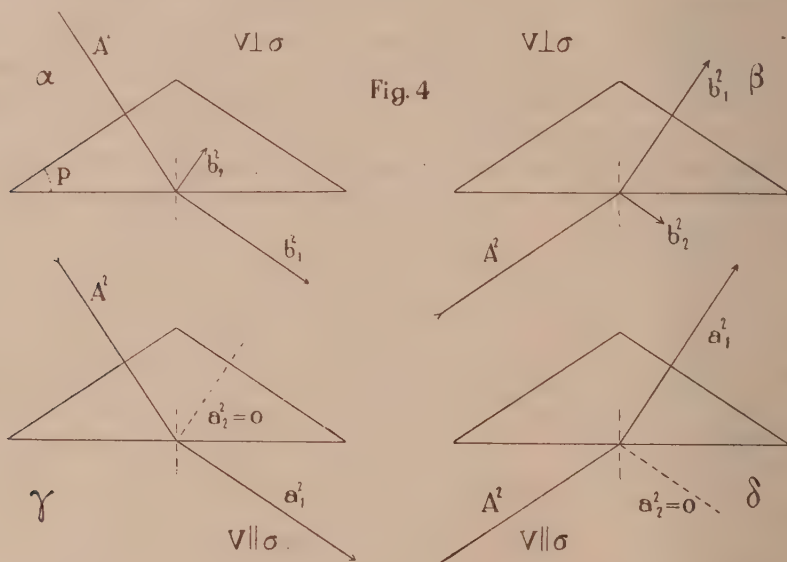


Fig. 4

Il nicol polarizzatore è girevole e considereremo specialmente le due posizioni per le quali il piano di vibrazione del fascio è verticale od orizzontale. Ricordando che per la luce incidente comune abbiamo nelle formule di Fresnel  $a = b$ , e che per la luce incidente polarizzata potrà essere  $a \geq b$ , notiamo che nella prima posizione (che indicheremo con  $V \perp \sigma$ ) sarà  $a = 0$ ; nella seconda ( $V \parallel \sigma$ ) sarà  $b = 0$ .

E perciò nel caso dell'incidenza brewsteriana avremo:

$$\begin{aligned} \text{Per } a = 0 \quad & \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ b_1 = b \cdot 2 \sin^2 P \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a_2 = 0 \\ b_2 = -b \sin(B - P) \end{array} \\ \text{Per } b = 0 \quad & \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a \frac{2 \sin^2 P}{\cos(B - P)} \\ b_1 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a_2 = 0 \\ b_2 = 0 \end{array} \end{aligned}$$

In accordo con queste formule sono i risultati di alcune mie osservazioni, mediante prisma le cui facce sono egualmente inclinate (angolo P) sulla base, essa pure speculare.

Il fascio polarizzato incidente può investire sia una delle due facce (fig. 4,  $\alpha$  e  $\gamma$ ), sia la base (fig. 4,  $\beta$  e  $\delta$ ). Il fascio incidente si scinde in due



quando la vibrazione incidente è normale al piano di incidenza (fig. 4,  $\alpha$  e  $\beta$ ) e perciò parallela allo spigolo del prisma. Quando invece la vibrazione incidente è parallela a  $\sigma$  (fig. 4,  $\gamma$  e  $\delta$ ), si verifica il fatto di una *riflessione nulla*; ed il fascio incidente attraversa ed emerge senza decomporci.

L'esame con nicol analizzatore è interessante non solo in quanto ha confermato le previsioni fornite dalle formule di Fresnel circa i piani di vibrazione dei fasci riflessi e rifratti; ma anche perchè serve in certo modo a circostanziare il campo di validità della legge di Brewster.

Infatti questa ci dice che i piani di vibrazione dei due fasci riflesso e rifratto, allorchè  $\operatorname{tg} i = n$ , sono rispettivamente normale e parallelo al piano di incidenza. Ora ciò avviene per un mezzo isotropo quando la luce incidente è luce comune; se avvenisse anche a luce polarizzata e, ad esempio la vibrazione incidente fosse normale a  $\sigma$ , dovrebbe, nel caso della fig. 4,  $\beta$ , la vibrazione del fascio rifratto essere parallela a  $\sigma$ , mentre in realtà è in grande prevalenza normale ad esso; e nel caso della fig. 4,  $\alpha$ , dovrebbe il fascio emergente o vibrare nel piano  $\sigma$ , o essere nullo; e in questo caso si avrebbe una riflessione totale con incidenza = P, dove P (essendo  $\operatorname{tg} P = \operatorname{sen} L$ ) sarebbe minore dell'angolo limite L.

Invece, a seconda che la vibrazione incidente è parallela o normale a  $\sigma$ , anche nei fasci derivati la vibrazione è, o totalmente o prevalentemente, parallela o normale a  $\sigma$ .

Osserviamo che in ambedue i casi ( $V \perp \sigma$  e  $V \parallel \sigma$ ) l'onda piana inerente ad una vibrazione elementare che raggiunge la superficie di separazione, deve compiere una rotazione, la quale, sia nella riflessione sia nella rifrazione, ha per asse la normale al piano  $\sigma$ . Nel bivio fra riflessione e rifrazione, sono in gioco il verso e l'angolo della rotazione dell'onda piana. Vediamo essere statisticamente prevalente la deviazione che corrisponde alla rotazione minore.

Quando il fascio incidente è di luce comune, abbiamo visto che per  $i = B$  e per  $n$  crescente, le intensità dei due fasci riflesso e rifratto tendono ad eguagliarsi e contemporaneamente egual tendenza hanno gli angoli di deviazione dei due fasci rispetto al fascio incidente. Tale proprietà non ha luogo con luce incidente polarizzata; ma possiamo esprimere un'altra condizione per raggiungere l'eguaglianza delle due intensità nel caso che sia  $V \perp \sigma$ , con  $n$  costante e l'angolo  $i$  crescente.

Infatti, posto  $a = 0$  nelle formule di Fresnel, troviamo che la condizione

$\frac{b_2^2}{b_1^2} = 1$  è soddisfatta quando sia

$$\frac{\operatorname{sen} i \cos r - \operatorname{sen} r \cos i}{\cos i \operatorname{sen} r} = 2 \quad ; \quad \text{da cui} \quad n \frac{\cos r}{\cos i} = 3.$$

Se  $n = 1,5$  sarà  $\frac{\cos r}{\cos i} = 2$ , condizione soddisfatta da  $i = 66^\circ.43'$  ed  $r = 37^\circ.46'$ .

Particolare interesse presenta il flint sopra considerato ( $n = 1,732$ ), poichè, essendo  $1,732 = \sqrt{3}$ , -è anche  $\frac{\cos r}{\cos i} = 1,732$ ; e quindi

$$\sin i \cos i = \sin r \cos r.$$

A questa condizione soddisfano appunto i valori  $B = 60^\circ$  e  $P = 30^\circ$ .

Quindi sotto l'incidenza brewsteriana di luce polarizzata con  $V \perp \sigma$ , i due fasci che il detto flint riflette e rifrange hanno eguale intensità.

Tale proprietà risulta anche osservando che nel caso nostro  $B - P = P$ ; e quindi si ha, dalle dette formule:

$$\frac{b_1}{b_2} = 2 \frac{\sin^2 P}{\sin(B - P)} = 2 \sin P = 1 \quad ; \quad \frac{b_1^2}{b_2^2} = 1.$$

Naturalmente, mentre nell'incidenza brewsteriana di luce monocromatica comune sul diamante, i fasci riflesso e rifratto sono polarizzati ortogonalmente fra loro; nel caso del flint di indice  $n = 1,732$ , quando la luce incidente è polarizzata nel piano d'incidenza, i due fasci sono ambedue polarizzati nel piano d'incidenza.

Notiamo che l'angolo di Brewster nel caso del diamante, per  $n = 2,414$ , è esattamente il triplo del corrispondente angolo di rifrazione (risp.  $67^\circ.30'$  e  $22^\circ.30'$ ); nel caso del detto flint è esattamente il doppio (risp.  $60^\circ$  e  $30^\circ$ ).

**Biologia.** — *Problemi connessi alla chiusura e alla riattivazione delle tonnare nel Mediterraneo.* Nota<sup>(\*)</sup> del Socio A. RUSSO.

Molte tonnare, sparse lungo il litorale dell'Italia peninsulare ed insulare, dopo alcuni anni di esercizio, furono abbandonate per poco rendimento. Dalle carte di pesca, pubblicate dal *Ministero dell'Agricoltura e Foreste* nel 1931<sup>(1)</sup>, si rileva che delle 80 tonnare impiantate in Sicilia, 31 erano accese e 49 spente e che in Sardegna, su 29, erano 9 in funzione. Per le tonnare della Sicilia orientale, su le quali si è potuto raccogliere notizie più dettagliate<sup>(2)</sup>,

(\*) Presentata nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) MINISTERO DELL'AGRICOLTURA E DELLE FORESTE, *La pesca nei mari e nelle acque interne d'Italia*, vol. II, Roma 1931.

(2) Per maggiori dettagli si riferisce che, nel Compartimento mafittimo di Messina, la tonnara *Mongioi*, nel territorio di Patti, fu calata l'ultima volta 40 anni fa, la tonnara *Corvo*, a Castel di Tusa, nel 1927, mentre a *Capo d'Orlando*, la tonnara omonima fu chiusa nel 1909 e quella *S. Antonino* nel 1941. Nello stesso Compartimento, la tonnara demaniale *S. Lucia*, nel Comune di S. Filippo del Mela, che fu attivata nel 1937 e nel 1938, dopo la chiusura di due anni, fu riaperta nel 1941 dalla Ditta Stefano Del Bono con licenza annuale, ma è oggi di nuovo abbandonata. Anche la tonnara *Salicà*, calata nel 1937, fu chiusa nel 1938. Tale tonnara, come quella *Calderà*, nel territorio di Barcellona Pozzo di Gotto, furono riaperte nel 1945, ma entrambe non hanno dato un notevole prodotto da incoraggiare i proprietari. Nel Compartimento marittimo di Siracusa, nel 1945, i dirigenti le tonnare *Marzameni* e *Bafuto* (Vendicari) si accordarono di far lavorare solo la prima per diminuire le spese di esercizio, dato il poco rendimento della seconda.

a mezzo delle *Giurisdizioni marittime* di Messina e di Siracusa, si è constatato che, nel 1931, nella prima di esse, delle 14 tonnare impiantate, solo 7 erano in funzione, oggi ridotte a 5, e che, nella seconda, delle 10 spente ed 8 accese, oggi queste sono ridotte a 6.

Tale stato di fatto ha richiamato, da più tempo, l'attenzione dei talassobiologi, che vollero indagare le cause dell'accorrere dei tonni in tonnara e suggerire i mezzi necessari alla cattura. La ricerca di tali cause, complesse e non tutte identificabili, per le nostre tonnare fu circoscritta alle acque del Mediterraneo, specialmente dopo che fu dimostrata infondata la credenza che i tonni in massa vi emigrino dall'Atlantico in determinate epoche dell'anno e che ivi ritornino, superando lo Stretto di Gibilterra; mentre oggi (Lobianco 1888, Sanzo 1910, Scordia 1925, F. De Buen 1925 ed altri), sviluppando una prima affermazione del Pavesi<sup>(3)</sup>, si ritiene essi vivano nel nostro mare, dove compiono il loro ciclo biologico.

Roule<sup>(4)</sup>, con ricerche fatte nel Mediterraneo occidentale (*Golfo di Lione*) e C. Scordia<sup>(5)</sup> nel basso Tirreno e nel Jonio siciliano osservarono che il tonno compie migrazioni locali, che sono in relazione con le variazioni dell'ambiente acquico. Quest'ultimo autore ha ritenuto però, di recente<sup>(6)</sup>, tali movimenti siano dovuti ad *acque trasgressive* più calde e più salate, dall'Atlantico penetrate nel Mediterraneo, mentre prima aveva osservato che i tonni, essendo *stenotermi* e *stenoalini*, compiono *migrazioni batimetriche* locali nei due periodi del loro ciclo vitale, dovute alla temperatura delle diverse falde di acqua; per cui, nell'*Autunno-Inverno*, determinandosi una *omoterminia* ed una *omoalinia* delle acque superficiali e profonde, essi, in gran parte, vivono in profondità (*periodo intergenetico*), in *Primavera-Estate*, per l'innalzarsi della temperatura nelle acque superficiali, rimontano in superficie, avvicinandosi alle coste e viaggiando lungo di esse a distanza più o meno notevole, per maturare e deporre i prodotti sessuali (*periodo genetico*). Alla profondità di 35-50 m. la Scordia ha constatato inoltre l'esistenza di una falda d'acqua a bassa temperatura, che ha detto *barriera biologica*, che i tonni genetici non possono oltrepassare e comunque disperdersi.

(3) P. PAVESI, *La migrazione del Tonno*. « Rendic. Istit. Lombardo », 1887.

(4) L. ROULE, *Étude sur les aires de ponte et de déplacement périodiques du Thon commun dans la Méditerranée occidentale*. « Annal. d. l'Inst. Oceanographique », t. VII, Paris 1917; *Sur les changements périodiques d'habitat du Thon commun (Orcynus thynnus) et sur leur liaison avec les conditions de milieu*. « Compt. rend. Ac. de Sc. », t. 173, Paris 1921.

(5) C. SCORDIA, *Le condizioni fisico-biologiche delle acque della tonnara del Tono (Milazzo) durante la campagna di pesca del 1925*. « Boll. Ist. Zoologico », Messina 1925; *Osservazioni sulle condizioni fisico-chimiche dell'acqua della tonnara S. Lucia (Milazzo) eseguite il 22 giugno 1928*. « Bollett. di pesca, piscic., idrobiol. », Roma 1928; *Per la biologia del Tonno (Thynnus thynnus L.). Osservazioni eseguite nelle tonnare del Tono (Milazzo, Sicilia) e dell'Angitola (Pizzo, Calabria) durante il mese di giugno 1929*. « Memorie di Biologia marina e di Oceanogr. », Messina 1930.

(6) C. SCORDIA, *Per la biologia del tonno*. - XI. *Importanza del fattore densità in situ* (5) *delle acque marine, sulla migrazione dei tonni entro il Mediterraneo*. « Memorie di Biologia marina », vol. V, 1937.



Le successive ricerche dell'autore, come si è detto, hanno dato un nuovo indirizzo al problema dei movimenti migratorii dei tonni del Mediterraneo in relazione alla possibilità della loro cattura, in quanto non sarebbero più le variazioni stagionali a determinarli, ma la temperatura e la densità delle acque oceaniche penetrate nel nostro mare. La nuova interpretazione del fenomeno migratorio però non dà ragione dei fatti, già in precedenza messi in evidenza, ma soprattutto non è convalidata dall'alternarsi periodicamente di maggiori e minori aggruppamenti di tonni con maggiori e minori catture.

Il fenomeno di tale periodicità, verificato da Le Danois <sup>(7)</sup> per i tonni dell'Atlantico, dove le *trasgressioni* sono evidenti, non ha riscontro nel Mediterraneo; difatti, non ostante le dubbie constatazioni di Roule <sup>(8)</sup>, le statistiche sul prodotto delle tonnare, raccolte per molti anni successivi, dimostrano concordemente che esso è irregolare e saltuario con massimi e minimi indipendenti dalle trasgressioni oceaniche <sup>(9)</sup>.

L'aumento del numero dei tonni, catturati in qualche anno, anziché corrispondere ad un massimo delle *trasgressioni*, è un fenomeno sporadico, simile ad alcune pesche eccezionali, osservate nel nostro mare, non paragonabili a quelle periodiche, che si fanno nei mari nordici dell'Atlantico, come quella delle *Aringhe*, studiate da Petterson <sup>(10)</sup>, o del Merluzzo del mare del Nord (*Gadus morrhua*).

Non avendo prove abbastanza chiare, che dimostrino la penetrazione nel Mediterraneo di una corrente di acqua trasgressiva superficiale oceanica, anche perchè, se pure penetrata in misura minima, come ammettono alcuni (Le Danois, Navarro, Scordia), potrebbe, contro quanto affermano altri oceanografi, diluirsi con le acque profonde meno salate del nostro mare, a me pare che, per la conoscenza delle acque nell'area delle nostre tonnare, più utili siano state le ricerche fisiche, chimiche e meteorologiche fatte da C. Scordia <sup>(11)</sup> in alcune di esse, anche distanti fra loro, come quella Tono di Milazzo e quella di Angitola su la costa Calabria. Con tali studi si è potuto mettere in chiaro, fra l'altro,

(7) LE DANOIS, *Recherches sur le régime des eaux Atlantiques et sur la biologie du thon blanc ou germon*. « Mem. Office scient. et techn. pêche maritime », 1929; *Remarques générales sur les trasgressions atlantiques*. « Rapp. atlantiques 1923. Cons. perm. intern. Esplor. de la mer », vol. 35, 1925.

(8) L. ROULE, citati.

(9) A. RUSSO, *Effetti della pesca con sorgenti luminose sul prodotto delle reti di posta a Catania e sul prodotto delle tonnare della Sicilia orientale*. « Atti Acc. Gioenia di Sc. Nat. », vol. VI, ser. 5<sup>a</sup>, Catania 1913; *L'azione delle sorgenti luminose su gli animali marini nei riguardi della pesca*. « Atti Congresso di Biologia marina », Messina 1928; *Prodotto delle Tonnare della Sicilia orientale nell'ultimo decennio e sua diminuzione nel dopoguerra*. Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. I, fasc. 10, 1946.

(10) PETTERSON, *Étude sur les mouvements internes dans la mer et dans l'air*. - III. *L'influence de la marée interne de la mer sur les migrations des harengs*. « Biolog. Kommission », vol. VI, 1921.

(11) C. SCORDIA, *Per la biologia del tonno*. - II. *Osservazioni eseguite nella tonnara di « Bivona » (Vibo Valentia Marina, Calabria) nel maggio-giugno 1930*. « Memorie di Biologia marina », 1931; *Le migrazioni dei tonni tirreno-jonici e la entrata di essi in tonnara*. « Atti Convegno Biologia marina », Messina 1940.

in contrasto con la ipotesi delle *trasgressioni* e delle *maree interne*, che, per *abbassamento della pressione atmosferica*, i tonni si raccolgono in gruppi numerosi lungo le coste con la possibilità di entrare in tonnara, ovvero che essi vi giungano isolati o in piccoli gruppi, trasportati dalle *zoocorrenti*, che si formano a piccola profondità e che, per l'abbondante *plancton*, seguono i tonni, che con esse possono giungere all'*isola* per la cattura.

Ai problemi sopracennati è connesso quello relativo alla scelta della zona del litorale per l'impianto di una tonnara. I *tonnaroti* si sono fondati su la frequenza dei tonni in determinate località e su le correnti, che in esse dovrebbero essere poco frequenti e di poca potenza per non danneggiare gl'impianti. Per tali requisiti, empiricamente, nella stessa area ne furono spesso impiantate più del necessario, per cui si è dovuto constatare che i tonni accorrevano solo in una, detta *principale*, o in poche, mentre le altre, essendo non produttive, venivano chiuse <sup>(12)</sup>.

Date le incertezze sui problemi essenziali per l'esercizio delle tonnare, si è voluto provvedere ai mezzi più idonei per intercettare la corsa dei tonni ed avviarli verso il *pedale* perchè più facilmente entrino nell'*isola*. Finora il mezzo più comunemente usato è quello di prolungare il *pedale* di là dell'*isola* in modo che esso si protenda nell'area in cui i tonni si raccolgono in maggior numero. Tale appendice (fig. 1), detta *coda* o *codardo*, lunga da 200 a 500 m., però, oltre a non aver dato sempre utili risultati, perchè i tonni spesso viaggiano a maggiore distanza, presenta difficoltà di ormeggio per le profondità rilevanti da raggiungere e per le correnti di maggiore potenza e più frequenti in alto mare. Per ovviare a tali inconvenienti fu anche proposto d'individuare le carovane dall'alto a mezzo d'*idroplani* a bassa quota; ma, è da ritenere gravi siano le difficoltà per avviare i tonni verso terra, tanto che tal mezzo non è entrato nella pratica.

Un mezzo ritenuto migliore fu proposto da L. Sanzo <sup>(13)</sup>, nel 1927, dopo avere osservato che il tonno adulto ha *fototassi negativa*, ove non sia sollecitato ad avvicinarsi alla sorgente di luce da stimolo più intenso, come quello *alimentare*. Egli, pertanto, propose di deviare i tonni verso terra mediante una barriera luminosa, disposta in *sopravento* dell'*isola*, formante un angolo ottuso con la *testa di levante*, dalla quale potrebbe essere lontana 400 m. La barriera proposta, ritenuta più efficace del *codardo*, potrebbe in realtà non corrispondere alle previsioni, perchè mancano dati sperimentali, risultanti da osservazioni fatte nell'area dove sono impiantate le reti, particolarmente relativi alla sensibilità visiva del tonno adulto, secondo le condizioni fisiche dell'acqua, la quantità di luce dello sbarramento e la distanza alla

(12) Varie ipotesi furono fatte su tale fenomeno, notevole quella di LE DANOIS, che, per le tonnare dell'Atlantico, suppose i tonni ed altri pesci planctonici seguano vie acque formatesi per avvallamento del fondo marino o per corsi d'acqua prodotti da bradisismi.

(13) L. SANZO, *Reazione negativa del tonno alla luce e suo sfruttamento a beneficio delle nostre tonnare*. R. Comitato talassogr., italiano. Venezia, 1927.

quale esso può produrre l'effetto desiderato per ottenere la deviazione dello scomberòide.

Alla soluzione di tali problemi e di altri, che vi sono connessi, non hanno contribuito i *tonnaroti*, che anche oggi ritengono la luce, comunque prodotta, anche a distanza notevole, sia dannosa ai loro impianti <sup>(14)</sup>.

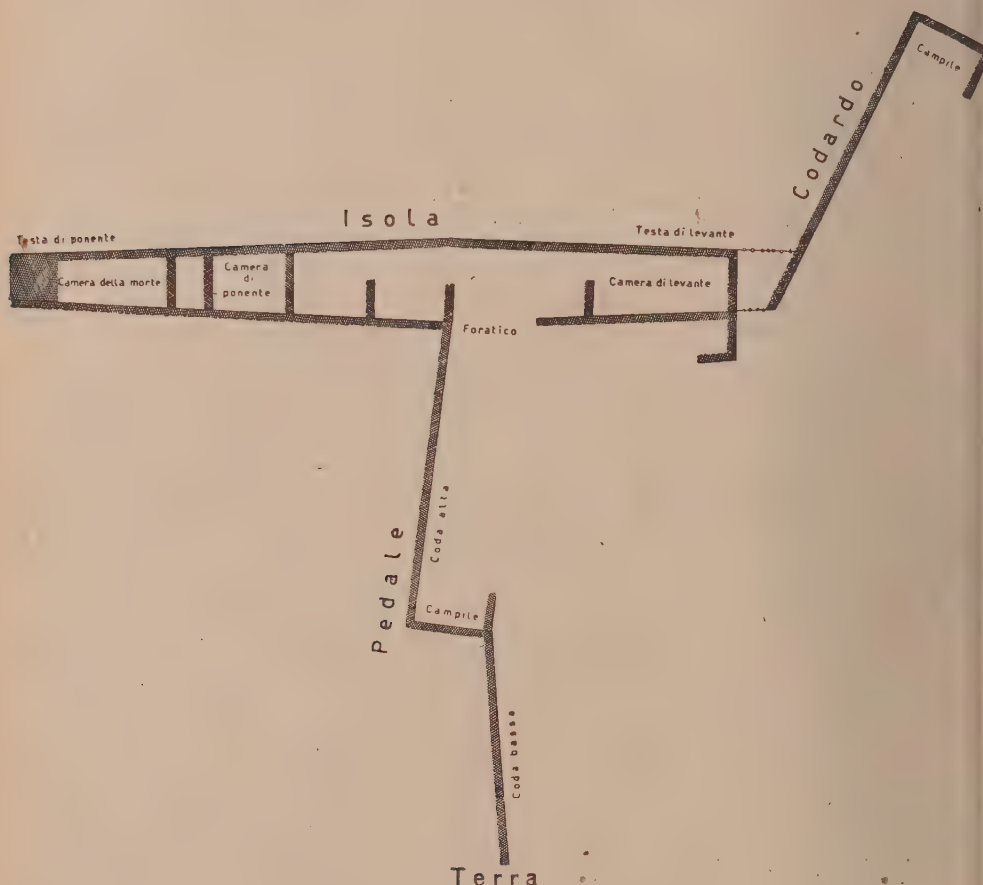


Fig. 1. - Schema delle parti di una tonnara senza gli ormeggi, secondo Pavési.

La deficienza di apparati d'illuminazione subacquea, di facile attuazione, ha impedito che il progetto Sanzo dalla fase teorica passasse a quella sperimentale. In questa Nota, pertanto, sono riferiti alcuni dati, che potrebbero rendere più agevole un primo esperimento, segnatamente su la sorgente

(14) Tale opinione fu avvalorata dall'art. 20 del *Regolamento di pesca marittima* del 13 novembre 1882, confermato ed esteso dal *Decreto* 27 febbraio 1902, con i quali si stabilisce il divieto di accendere fuochi nello spazio acqueo di 10 km. verso l'alto mare a partire da una linea retta, che congiunge i punti estremi del fronte della tonnara con quelli terminali delle zone litorali, indicati da segnali di difesa. Tali concetti furono ribaditi in successivi Decreti come quello del 27 febbraio 1936.



di luce per l'attuazione dello sbarramento. La *lampada subacquea*, che ha dato notevoli risultati nella pratica peschereccia <sup>(15)</sup>, potrà fornire una potenza di luce da superare altri stimoli, che, invece di respingere, potrebbero attirare i tonni nella sfera luminosa. Tale effetto potrà ottenersi aumentando il candelaggio della lampadina elettrica contenutavi e regolandolo, a mezzo di un *reostato*, secondo la trasparenza, la salinità, la temperatura ed altre condizioni dell'ambiente, nella zona in cui le tonnare sono impiantate.

Nell'attuare lo *sbarramento*, oltre alla diminuita trasparenza delle acque costiere, è da tener presente che la luce artificiale, adoperata di notte, essendo ricca di raggi rossi, si estingue dopo breve percorso, accorciando lo spazio tra il centro luminoso e l'occhio, e che vantaggioso potrebbe essere l'uso della lampada subacquea per la possibilità di aumentare la potenza luminosa, secondo le particolari condizioni della zona.



Fig. 2. - Schema di tonnara con sbarramento luminoso di 6 *lampade subacquee*, adatto alla deviazione ed alla cattura dei tonni.

Poichè nel *periodo genetico*, corrispondente a quello in cui le tonnare entrano in funzione, i tonni si dirigono verso terra nelle acque poco profonde, l'immersione delle lampade, schermate dal lato opposto a quello dal quale essi provengono, potrebbe essere fatta a m. 2-3. La barriera potrebbe ottenersi con 5-6 lampade, disposte su lo stesso piano, convenientemente sospese ed orineggiate, distanti fra loro e dalla *testa di levante dell'isola* di circa 80 m., formando un angolo ottuso (fig. 2). Lo sbarramento potrebbe raggiungere oltre 500 m., ma potrebbe essere allungato, distanziando le lampade ed aumentando il candelaggio di ciascuna o aggiungendone altre, tutte attivate da apparato per la produzione dell'energia elettrica, su motonave.

La *barriera luminosa* proposta, con le eventuali modificazioni, che i tecnici

(15) A. RUSSO, *Ulteriori ricerche su la pesca con sorgenti luminose nel Golfo di Catania*. «Atti Acc. Gioenia di Scienze Nat.», vol. VIII, ser. 5<sup>a</sup>, Catania 1915; *Esperimenti di pesca con lampada elettrica sommersa. Pesca delle acciughe con sorgenti luminose nel Golfo di Catania e maggiore sviluppo dell'industria sardiniera nei mari italiani*. «Boll. di pesca, di piscicoltura ed idrobiologia», anno VIII, Roma 1932.

dettagliarono sul posto, è tale da consentire, meglio degli altri mezzi finora adottati, la cattura, per lo meno, di quei tonni che sono alla periferia delle schiere che viaggiano lungo il litorale.

Alla potenza di luce, che potrà fornire la lampada, è connesso il problema a quale distanza i tonni reagiscono allo stimolo luminoso per allontanarsene. Tale problema potrà essere trattato, tenendo presente gli studi di Vercelli<sup>(16)</sup> su la propagazione delle radiazioni luminose nell'acqua marina, che saranno la premessa necessaria per ulteriori studi biologici. Interessanti ricerche, nello Stretto di Messina, su la distanza necessaria, perchè alla luce possano reagire gli organismi marini, già si devono ad A. Spartà<sup>(17)</sup>, ed è da augurare che possa estenderle alla visibilità del tonno, rendendo meno incerte le attuali nostre conoscenze<sup>(18)</sup>.

**Biologia.** — *Su alcune caratteristiche del Mare Mediterraneo* (\*).  
Nota (\*\*) del Corrisp. G. BRUNELLI.

Con questa Nota intendo solo riassumere alcune conquiste nella conoscenza del Mare Mediterraneo, frutto di decennali ricerche in cui mi sono avvalso della mia esperienza di talassografo e di quella di tecnico propulsore della trasformazione industriale della pesca, nonchè della mia azione svolta in seno alla Commissione internazionale per l'esplorazione del Mediterraneo insieme ai Colleghi di altre Nazioni.

Abbiamo sempre sostenuto che la povertà di vita del Mediterraneo quantitativamente intesa è in rapporto col suo carattere abissale, colla soglia di Gibilterra, colla mancanza di grandi correnti convettive e coll'intensa illuminazione.

Così che come diceva Schütt il colore azzurro del Mediterraneo indica come per il Mare di Sargasso dell'Oceano la povertà di plancton.

Di questo abbiamo già accennato nella nostra relazione generale sui problemi e progressi della scienza del mare fatta alla R. Accademia d'Italia.

(16) F. VERCELLI, *La penetrazione delle radiazioni luminose nell'acqua di mare*. R. Comit. Talassogr. italiano. Mem. CCLXXI, Venezia 1939.

(17) A. SPARTÀ, *Osservazioni compiute nello Stretto di Messina sul comportamento di Pesci e Cefalopodi all'azione di sorgenti luminose*. R. Comit. Talassogr. italiano. Mem. CCVI, 1933; *La pesca con sorgenti luminose. Fototropismo dei pesci. Raggio d'azione alla luce*. « La Pesca italiana », anno III, 1942.

(18) W. BEEBE, *Mille metri sott'acqua*. Edit. Bompiani, 1935. Poco si apprende da quanto è riferito in quest'opera su la visibilità degli organismi marini, ma solo che, immergendosi nella batisfera a 210 m., la luce solare disturba quella proiettata dal faro elettrico attraverso il finestrino di quarzo, e che a 500 m., con il buio assoluto, essi sono visibili a circa 14 m., senza farci sapere come fu calcolata tale distanza!

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di idrobiologia. Roma.

(\*\*) Presentata nella seduta dell'11 giugno 1947.

Oggi intendiamo parlare più propriamente delle caratteristiche del Mediterraneo quale risultano dalle più recenti conquiste.

Le ricerche di Joh Schmidt nella sua prima spedizione attorno al mondo (1928-1930) condussero di nuovo il Thor nel Mediterraneo e le analisi di fosfati e nitrati in 29 stazioni differenti scaglionate da Gibilterra al Mare Egeo, mostrarono una povertà di nitrati e di fosfati rimarchevole e d'accordo colla povertà del macroplancton.

Facendo menzione di questi nuovi risultati il dottor Schmidt come già G. Pruvot non mancò di segnalare una relazione possibile tra questa constatazione la piccola taglia dei pesci (ad eccezione di alcuni Selaci e Scomberoidi) e la povertà di pesca nel Mediterraneo.

All'appoggio di questi fatti venivano anche le osservazioni di R. Sparck (1931) sulle ricerche quantitative di fondo, confermate anche da quelle eseguite in Adriatico dal Vatova del nostro Comitato Talassografico.

In seno alla Commissione dell'esplorazione del Mediterraneo cercammo di estendere le ricerche di Schmidt al nanno-plancton, per giungere a definitive conclusioni.

Come si espresse Fage: «La Commission internationale de la Méditerranée réunie à Naples en 1933 fut saisie de la question et sur la prospective du prof. Brunelli e de l'un de nous (Fage) décida qu'une série de recherches seraient entreprises sur la valeur du stock biologique de la Méditerranée en relation avec les quantités de nitrates et de phosphates». (Vedi «Bulletin de l'Institut Océanographique», n. 701, 1936).

Tali ricerche poi eseguite confermarono anche coi metodi più moderni delle sedimentazioni (quello della centrifugazione era stato già provato dal Lohman) la povertà di vita del Mediterraneo, alla quale non è certo estranea anche la vita batterica del mare, in relazione come io credo alla intensa illuminazione. Ciò che fu oggetto da parte mia di una relazione critica.

Tale povertà di vita spinse nel campo pratico l'Ufficio tecnico della pesca a sfruttare tutte le possibilità, si addivenne così allo sfruttamento della zona pescosa di Lampedusa tra la Sicilia e la costa nord africana, zona caratterizzata dalla ricchezza dei pesci e specialmente dei fragolini.

Altra conquista notevole fu quella della pesca sul ciglio dello zoccolo continentale in cui superammo altre Nazioni.

Ciò portò alla scoperta dei fondi a melù (*Gadus poutassu*) e a Scampi (*Nephrops norvegicus*) e di gamberi rossi (*Aristeus*, *Aristeomorpha*). Forme che prima erano ritenute rarità di Museo, forniscono ora abbondantemente mercati italiani. Ciò prova che la scienza pura può progredire senza disprezzare le scienze applicate e viceversa, se questo avviene in tutti i campi, tanto più nella oceanografia che richiede lo sfruttamento di tutti i metodi e delle scienze più diverse.

Nello studio del ciglio della platea continentale io estesi le ricerche di Joubin sui coralli bianchi bentonici nocivi alle reti a strascico. Tali ricerche confermarono quelle di Joubin sull'oceano anche in relazione alle biocenosi di tale ciglio e del fondo a Scampi.



Ci interessa rilevare che a proposito del fondo a scampi tra le ricerche recenti condotte sulle coste francesi e spagnole, oltre quelle già citate dal Joubin, vi sono quelle di Legendre il quale segnalò un fatto interessantissimo e che cioè lungo le coste della Bretagna il prodotto di tale pesca sarebbe enormemente cresciuto dopo la guerra per motivi non ancora bene precisati.

Secondo la nostra esperienza fatta largamente in Italia ciò si deve soltanto al maggior sfruttamento delle pesche profonde che data la piccola estensione della platea continentale in alcune zone litorali italiane (classica quella della Liguria) ci ha portati ad un maggior sfruttamento di questo ciglio, che naturalmente nelle Nazioni a vasta platea continentale non è stato come da noi oggetto di particolare sfruttamento e solo occasionalmente poi rilevato.

La estensione della pesca sul fondo a Scampi toglie ogni valore a riguardare lo scampo come un relitto di fauna nordica dell'Adriatico come era stato ritenuto dal Lorenz quando si conoscevano per lo scampo solo i ricchi e bassi fondali del Quarnero e si ignorava per contro la ricchezza di Scampi del Tirreno e la loro presenza anche nello Ionio.

Da ultimo vogliamo accennare che le nostre ricerche sulla fauna abissale nel basso Adriatico hanno esteso le caratteristiche batipelagiche della associazione delle *Cyclothone* oceaniche.

Il nostro referto dell'Adriatico completa i dati del Murray sull'associazione batipelagica delle *Cyclothone microdon* e delle *Cyclothone signata* e della relativa carta, estendendo quest'associazione fino al basso Adriatico, ciò che mostra che la differenza di temperatura che si riscontra a 1000 metri in confronto all'Oceano non ha che una relativa importanza.

Sembra inoltre che nel Mediterraneo dove in confronto ad altri mari scarseggiano gli afflussi di acqua dolce, l'influenza delle precipitazioni atmosferiche abbia notevole influenza nelle oscillazioni quantitative del pesce turchino migratorio, in relazione con analoghe oscillazioni quantitative del plancton, di cui si nutrono le giovani larve.

L'insieme delle accennate ricerche e dei referti talassografici offre perciò un quadro biologico abbastanza notevole delle caratteristiche biologiche del Mediterraneo, che non è ancora stato oggetto di divulgazione anche in moderni trattati di oceanografia.

A completare questo quadro sono rivolte le nostre indagini e quelle degli Istituti dipendenti.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari.* Nota III di S. FAEDO, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

5. Richiamiamo brevemente il procedimento per la costruzione delle serie (5'), che è sviluppato nella Memoria citata in (4) Nota I. Il primo termine delle (5') è dato da

$$\eta_{0, \tau_i+j} = x^{j-1} e^{\lambda_i x}$$

e cioè dalle soluzioni dell'equazione asintotica  $E(a_i, 0; y) = 0$ . Gli altri termini delle (5') si ottengono col seguente procedimento ricorrente: l'( $m+1$ )<sup>mo</sup> termine

$$(25) \quad \eta_{m, \tau_i+j} = x^{j-1} e^{\lambda_i x} \lambda_{m, \tau_i+j}$$

è una soluzione, che sarà poi precisata, dell'equazione

$$(26) \quad E(a_i, 0; y) = P_{m, \tau_i+j}$$

dove è

$$(27) \quad P_{m, \tau_i+j} = - \sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{d^{m-k} \eta_{m-1, \tau_i+j}}{dx^{n-k}}.$$

La (26) si integra col metodo della variazione delle costanti. Si ponga

$$(28) \quad \eta_{m, \tau_i+j} = \sum_{k=1}^0 \sum_{l=1}^{v_k} f_{m, \tau_k+l, \tau_i+j}(x) \eta_{0, \tau_k+t}$$

con

$$(29) \quad \sum_{k=1}^0 \sum_{l=1}^{v_k} f'_{m, \tau_k+l, \tau_i+j} \eta_{0, \tau_k+l}^{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{per } s = 0, 1, \dots, n-2, \\ P_{m, \tau_i+j} & \text{per } s = n-1. \end{cases}$$

Per il lemma III è

$$(30) \quad f'_{m, \tau_k+t, \tau_i+j} = e^{-\lambda_k x} Q_{\tau_k+t} P_{m, \tau_i+j},$$

dove  $Q_{\tau_k+t}$  è un polinomio di grado  $v_k - t$ .

Per fissare le costanti per l'integrazione delle (30) si procede così: Si dividono gli indici  $\tau_k + t$  in due classi rispetto all'indice  $\tau_i + j$ ; gli indici  $\tau_k + t$  ( $k = 1, \dots, p$ ;  $t = 1, 2, \dots, v_k$ ) vanno nella prima classe se è  $R\lambda_k < R\lambda_i$ , oppure se è  $R\lambda_k = R\lambda_i$  e inoltre  $t \leq j-1$ .

Tutti i rimanenti  $\tau_k + t$  vanno nella seconda classe.

(\*) Nella seduta del 10 maggio 1947. Le Note I e II sono inserite in questi « Rendiconti ».

Allora se  $\tau_k + t$  appartiene alla prima classe rispetto a  $\tau_i + j$  si pone

$$(31') \quad f_{m, \tau_k+t, \tau_i+j} = \int_X e^{-\zeta_k x} Q_{\tau_k+t} P_{m, \tau_i+j} dx \quad (X \text{ costante})$$

e, se  $\tau_k + t$  appartiene alla seconda classe,

$$(31'') \quad f_{m, \tau_k+t, \tau_i+j} = - \int_X^{\infty} e^{-\zeta_k x} Q_{\tau_k+t} P_{m, \tau_i+j} dx.$$

Indichiamo con  $C$  una costante positiva con la proprietà che sia, per  $x$  abbastanza grande,

$$\left| e^{-(\zeta_k + \zeta_j)x} \frac{d^p (x^{t-1} e^{\zeta_k x})}{dx^p} \cdot \frac{d^q (x^{j-1} e^{\zeta_i x})}{dx^q} Q_{\tau_k+t} \right| \leq C x^{v+j-2}$$

$$(p, q = 0, 1, \dots, n-1; t = 1, \dots, v_k; j = 1, \dots, v_i; i, k = 1, \dots, \rho)$$

e ciò è possibile essendo il primo membro un polinomio di grado  $v_k + j - 2 \leq v + j - 2$ . Poniamo

$$M(x) = C \sum_{k=1}^n \int_X^{+\infty} x^{v-1} |\varphi_k| dx, \quad F(x) = C \sum_{k=1}^n \frac{1}{x} \int_X^x x^v |\varphi_k| dx,$$

$$N(x) = \max[M(x), F(x)].$$

Essendo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$  e per le  $\alpha'$  è anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = 0$  e inoltre

$$N(x) \leq M(X), \quad \text{per } x \geq X.$$

Sussiste la disuguaglianza

$$(32) \quad |\eta_{m, \tau_i+j}^{(s)}| \leq n N(x) [n M(X)]^{m-1} x^{j-1} e^{R \zeta_i x} \quad (32)$$

$$(s = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, v_i; \tau_i = v_1 + \dots + v_{i-1}; m = 1, 2, \dots).$$

6. TEOREMA XIII. - Se  $W$  è il wronskiano del sistema fondamentale (5') di integrali dell'equazione  $E(a_i, \varphi_i; y) = 0$ , esiste finito e diverso da zero il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} W e^{-x \sum_{i=1}^n v_i \zeta_i}$$

Dalle (28) e (29) segue

$$\eta_{m, \tau_i+j}^{(s)} = \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^{v_k} f_{m, \tau_k+t, \tau_i+j} \eta_{0, \tau_k+t}^{(s)} \quad (s=0, 1, \dots, n-1).$$

(1) Ciò si dimostra nello stesso modo del Lemma IV della presente Nota.

(2) Questa disuguaglianza, che si dimostra per induzione, è la relazione fondamentale per ottenere il Teorema XII [Ved. le formule (24), (33), (33') e la nota (9) della Memoria cit. in (4) Nota I]. Da essa segue che basterà fissare  $X$  in modo che sia  $nM(X) < 1$  per assicurare la convergenza assoluta e uniforme delle serie in parentesi al secondo membro delle (5') e di quelle che si ottengono derivando  $n-1$  volte termine a termine.



Dalla (32) si ottiene che converge uniformemente la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_{m, \tau_k+t, \tau_i+j} = F_{\tau_k+t, \tau_i+j}$$

e inoltre, tenuto conto di (5') (25) e (27), è anche (3)

$$(33) \quad y_{\tau_i+j}^{(s)} = \frac{d^s (x^{l-1} e^{\zeta_i x})}{dx^s} + \sum_{k=1}^q \sum_{t=1}^{\nu_k} F_{\tau_k+t, \tau_i+j} \eta_{\tau_k+t}^{(s)} \quad (s=0, 1, \dots, n-1).$$

Se si spezza  $W$  nella somma di determinanti aventi ognuno tutte le colonne costituite di uno solo degli  $n+1$  addendi che entrano nella (33), quei determinanti in cui per due valori distinti di  $\tau_i+j$  si avesse lo stesso  $\tau_k+t$  sono nulli, perchè verrebbero ad avere due colonne proporzionali.

Esaminiamo ora i rimanenti determinanti in cui è stato scomposto  $W$ .

a) Sia  $W_i$  uno di questi e la sua  $(s+1)^{\text{ma}}$  riga sia data da

$$(34) \quad F_{\tau_k+t, \tau_i+j} \eta_{\tau_k+t}^{(s)},$$

dove  $\tau_k+t$  e  $\tau_i+j$  descrivono ciascuno una data permutazione degli indici  $1, \dots, n$ . Dalle (27) e (32) si ha

$$|P_{m, \tau_i+j}| \leq n N(x) [n M(X)]^{m-2} \sum_{k=1}^n |\varphi_k| x^{j-1} e^{R_{\zeta_i} x};$$

se  $\tau_k+t$  è nella prima classe rispetto a  $\tau_i+j$  per la (31') è

$$\begin{aligned} & x^{l-j} e^{R(\zeta_k - \zeta_i)x} |f_{m, \tau_k+t, \tau_i+j}| \leq \\ & \leq n [n M(X)]^{m-2} x^{l-j} e^{R(\zeta_k - \zeta_i)x} \int_X e^{R(\zeta_i - \zeta_k)x} x^{j-1} |Q_{\tau_k+t}| N(x) \sum_{k=1}^n |\varphi_k| dx, \end{aligned}$$

ed essendo  $N(x) \leq M(X)$ ,  $|Q_{\tau_k+t}| \leq C x^{v-t}$  e la funzione  $e^{R(\zeta_i - \zeta_k)x} x^{j-1-t}$  non decrescente, ne viene

$$x^{l-j} e^{R(\zeta_k - \zeta_i)x} |f_{m, \tau_k+t, \tau_i+j}| \leq [n M(X)]^{m-1} \frac{C}{x} \int_X x^v \sum_{k=1}^n |\varphi_k| dx \leq [n M(X)]^{m-1} N(x)$$

e perciò, sempre per  $X$  abbastanza grande in modo che sia  $n M(X) < 1$  risulta

$$(35) \quad |x^{l-j} e^{R(\zeta_k - \zeta_i)x} F_{\tau_k+t, \tau_i+j}| \leq T \cdot N(x)$$

dove  $T$  è una costante. In modo del tutto analogo si prova la (35) quando  $\tau_k+t$  appartiene alla seconda classe rispetto a  $\tau_i+j$ .

Avendosi

$$(36) \quad \mu(x) = \prod_{\tau_i+j=1}^n F_{\tau_k+t, \tau_i+j} = \prod_{\tau_i+j=1}^n x^{l-j} e^{R(\zeta_k - \zeta_i)x} F_{\tau_k+t, \tau_i+j}$$

(3) Le serie qui considerate si possono derivare  $n-1$  volte termine a termine quando si sia fissato  $X$  abbastanza grande.

(dove è da ricordare che gli indici  $\tau_k + t$  dipendono da  $\tau_i + j$  e descrivono una permutazione dei numeri  $1, \dots, n$ ) ed essendo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = 0$ , segue dalla (35) che è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x) = 0$ ,

Ma per la (34) e per il lemma III (Nota II) è

$$W_1 = \mu(x) e^{x \sum_{i=1}^n v_i \tau_i} \cdot K \quad (K \neq 0),$$

e perciò

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} W_1 e^{-x \sum_{i=1}^n v_i \tau_i} = 0.$$

b) Sia  $W_2$  uno dei determinanti in cui si è scomposto  $W$  che abbia  $p$  colonne del tipo (34) ( $s=0, 1, \dots, n-1$ ) e le rimanenti del tipo  $D^{(s)}(x^{j-1} e^{\tau_i x})$ . Basterà considerare il caso in cui nelle  $p$  colonne tipo (34) gli indici  $\tau_k + t$  e  $\tau_i + j$  diano ciascuno una permutazione degli stessi  $p$  numeri, poichè in caso contrario, dovendo gli indici  $\tau_i + j$  insieme con quelli delle rimanenti  $n-p$  colonne dare gli interi  $1, \dots, n$ ,  $W_2$  avrebbe due colonne proporzionali e sarebbe nullo. Perciò vale ancora una relazione come la (36), i prodotti intendendosi estesi ai suddetti  $p$  indici, e per la (35) segue ancora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} W_2 e^{-x \sum_{i=1}^p v_i \tau_i} = 0.$$

c) Dei determinanti in cui si era scomposto  $W$  rimane da considerare solo il wronskiano  $W_3$  delle  $n$  funzioni  $x^{j-1} e^{\tau_i x}$  e per il lemma III è

$$W_3 = K e^{x \sum_{i=1}^n v_i \tau_i} \quad \text{con} \quad K \neq 0.$$

Concludendo è

$$W = e^{x \sum_{i=1}^n v_i \tau_i} G(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = K \neq 0.$$

7. TEOREMA XIV: - Se  $W_{\tau_i+j}$  è il minore relativo all'ultimo elemento della  $(\tau_i + j)^{\text{ma}}$  colonna del wronskiano  $W$  del sistema fondamentale di inte-

grali (5') dell'equazione  $E(a_i, \varphi_i; y) = 0$ , la funzione  $W_{\tau_i+j} e^{-\left[\sum_{s=1}^n v_s \tau_s - \tau_i\right]x}$  è, per  $x \rightarrow +\infty$ , al più infinita di ordine  $\nu - j$ .

Come nel precedente teorema si scomponga  $W_{\tau_i+j}$  nella somma di determinanti che abbiano tutte le colonne costituite di uno solo degli addendi della (33); gli indici  $\tau_i + j$  assumono ora tutti i valori da 1 a  $n$  escluso il valore  $\tau_i + j$ ; nei determinanti così ottenuti e in cui anche gli indici  $\tau_k + t$  non assumano mai il valore  $\tau_i + j$ , si può ragionare come nel teorema precedente sostituendo soltanto, nella conclusione, alla prima parte del lemma III la seconda.

Detta pertanto  $\bar{W}_{\tau_i+j}$  la somma di tutti questi determinanti è

$$\bar{W}_{\tau_i+j} e^{-\left[\sum_{s=1}^0 v_s \tau_s - \bar{\tau}_i\right]} = Q_{\tau_i+j} G(x),$$

dove  $Q_{\tau_i+j}$  è il polinomio di grado  $\bar{v}_i - j \leq v - j$  del lemma III ed è  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 1$ .

Rimane da considerare il contributo dei determinanti in cui si è scomposto  $W_{\tau_i+j}$  e nei quali gli indici  $\tau_k + t$  assumano  $n - 1$  valori, che al solito si possono supporre distinti, fra cui sia compreso il valore  $\bar{\tau}_i + j$ . Detto  $W_i$  uno di questi determinanti che abbia tutte le colonne del tipo (34) è

$$W_i = e^{\left[\sum_{s=1}^0 v_s \tau_s - \bar{\tau}_i\right] x} Q_{\tau_k+i} \prod_{\tau_i+j=1}^n F_{\tau_k+t, \tau_i+j},$$

dove l'apice sta a ricordare che manca il fattore che corrisponde a  $\tau_i + j = \bar{\tau}_i + j$  e dove  $\tau_k + i$  rappresenta il valore che non viene assunto dall'indice  $\tau_k + t$ .

Essendo

$$\prod_{\tau_i+j=1}^n (x^{i-j} F_{\tau_k+t, \tau_i+j}) = x^{j-i} e^{(\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_k)x} \prod_{\tau_i+j=1}^n F_{\tau_k+t, \tau_i+j},$$

per la (35) risulta

$$W_i = e^{\left[\sum_{s=1}^0 v_s \tau_s - \bar{\tau}_i\right] x} x^{i-j} Q_{\tau_k+i} \Gamma(x),$$

dove è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = 0$ . Ma il polinomio  $x^{i-j} Q_{\tau_k+i}$  è di grado  $\bar{v}_k - j \leq v - j$  e quindi

$$W_i e^{-\left[\sum_{s=1}^0 v_s \tau_s - \bar{\tau}_i\right] x}$$

è, per  $x \rightarrow +\infty$ , infinito di ordine inferiore a  $v - j$ .

Se  $W_i$  avesse solo  $p$  colonne del tipo (34) si può ripetere il ragionamento del Teorema XIII, b).

8. TEOREMA XV. - *Nelle ipotesi del Teorema X e se inoltre è  $b=0$  l'equazione non omogenea  $E(a_i, \varphi; y) = \varphi(x)$  ha almeno un integrale stabile.*

Con le notazioni usate nella dimostrazione del Teorema III (Nota I) consideriamo l'integrale della (2) definito da

$$\bar{y}(x) = \sum c_{\tau_i+j} y_{\tau_i+j}$$

dove le  $y_{\tau_i+j}$  sono date dalle (5') ed è

$$(37) \quad c_{\tau_i+j} = \begin{cases} - \int_x^{+\infty} e^{-\tau_i x} \varphi(x) \frac{\Delta_{\tau_i+j}}{\Delta} dx & \text{per } R\tau_i \geq 0 \\ \int_{x_{\tau_i+j}}^x e^{-\tau_i x} \varphi(x) \frac{\Delta_{\tau_i+j}}{\Delta} dx & \text{per } R\tau_i < 0, \end{cases}$$



dove si è posto

$$\Delta = W e^{-v \sum_{i=1}^p v_i}, \quad \Delta_{\tau_i+j} = W_{\tau_i+j} e^{-x \left[ \sum_{i=1}^p v_i \tau_i - \tau_i \right]}.$$

Si noti che se è  $R\tau_i \geq 0$  la funzione  $c_{\tau_i+j}$  esiste finita per i Teoremi XIII e XIV e per la condizione  $\alpha'$ ). Inoltre per i teoremi ora detti e per le (6'') (T. XII, Nota II) è, per  $x$  abbastanza grande,

$$(38) \quad |c_{\tau_i+j} y_{\tau_i+j}| < K x^{j-1} e^{R\tau_i x} \int_x^{+\infty} e^{-R\tau_i x} x^{v-j} |\varphi| dx \leq \\ \leq K \int_x^{+\infty} x^{v-1} |\varphi| dx \quad (K \text{ costante})$$

e una analoga disuguaglianza sussiste pure, come è facile vedere, se è  $R\tau_i < 0$ . Perciò  $\bar{y}(x)$  è limitato. Dalle (6''), come nel Teorema III, segue che sono pure limitate le  $\bar{y}^{(i)}(x)$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ).

#### 9. Dimostrazione del Teorema X.

Il Teorema X si deduce dal Teorema XV con lo stesso artificio che ho usato per ottenere il Teorema V dal IV e tenendo poi conto delle (6'') del Teorema XII.

10. LEMMA IV: Se  $\psi(x) \geq 0$  è integrabile in  $(x_0, +\infty)$  si ha

$$(39) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^x x \psi(x) dx = 0.$$

Fissato  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio si determini  $X > x_0$  in modo che sia

$$\int_X^{+\infty} \psi(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{1}{X} \leq \frac{\varepsilon}{2 \int_{x_0}^{+\infty} \psi(x) dx}.$$

Per  $x \geq X^2$  è

$$0 \leq \frac{1}{x} \int_{x_0}^x x \psi(x) dx = \frac{1}{x} \left[ \int_{x_0}^{\sqrt{x}} x \psi(x) dx + \int_{\sqrt{x}}^x x \psi(x) dx \right] \leq \\ \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{x_0}^{\sqrt{x}} \psi(x) dx + \int_{\sqrt{x}}^x \psi(x) dx \leq \frac{1}{X} \int_{x_0}^{+\infty} \psi(x) dx + \int_X^{+\infty} \psi(x) dx \leq \varepsilon.$$

11. *Dimostrazione del Teorema XI.*

Supponiamo dapprima  $b = 0$ . Dalle (38) segue che se è  $R\zeta_i \geq 0$  è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c_{\tau_i+j}(x) y_{\tau_i+j}(x) = 0.$$

Sia  $R\zeta_i < 0$ . Per le (37), come si è già fatto per la (38), si ricava

$$|c_{\tau_i+j} y_{\tau_i+j}| < K \frac{1}{x} \int_{\tau_i+j}^x x^\nu |\varphi| dx,$$

e, poichè  $x^{\nu-1} |\varphi(x)|$  è integrabile su  $(x_0, +\infty)$ , dal lemma IV segue che è ancora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c_{\tau_i+j}(x) y_{\tau_i+j}(x) = 0.$$

Perciò per l'integrale  $\bar{y}(x)$  della (2) (V. Teorema XV) è  $\lim \bar{y}(x) = 0$ .

Dalle (6'') del Teorema XII segue immediatamente, come si è più volte visto, che è anche

$$(40) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{y}^{(s)}(x) = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n-1),$$

e sono così provate le (20) per  $b = 0$ .

Se è  $b \neq 0$  e quindi  $a_n \neq 0$ , l'equazione  $E(a_i, \varphi_i; y) = -\frac{b}{a_n} \varphi_n(x)$  per quanto si è ora visto possiede un integrale  $y^*(x)$  per cui vale la (40) e quindi  $\bar{y} = y^* + \frac{b}{a_n}$  è un integrale della (2) per cui valgono le (20).

Dopo di ciò la (21) segue immediatamente dall'equazione (2).

La dimensione dello spazio lineare che rappresenta gli integrali della (2) che verificano la (20) per le (37) è almeno  $r$ , perchè in queste entrano  $r$  costanti arbitrarie. Tale dimensione non può poi superare  $r$  perchè, come segue facilmente dalle (6''), se così fosse non sarebbe più verificata la prima delle (20).

12. *Procedimento per il calcolo degli integrali dell'equazione non omogenea.* - I precedenti ragionamenti hanno portato alla conclusione che il procedimento dato nella Memoria citata in (4) Nota I si può trasportare all'equazione non omogenea (2) e ancora si caratterizzano *a priori* tutti gli integrali stabili; inoltre, per quanto si è visto nel n. 11, si individua pure *a priori* la totalità  $\Sigma_r$  degli integrali che verificano le (20).

**Matematica.** — *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni al problema di Niccoletti per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico.* Nota di G. ZWIRNER, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

Sono noti i seguenti criteri d'esistenza e di unicità sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali:

*Se in uno spazio funzionale, metrico, completo* <sup>(1)</sup>  $\Sigma$ , *una trasformazione*

$$(I) \quad \psi = T(\varphi),$$

*che converta*  $\Sigma$  *in sè stesso, soddisfa, per ogni coppia di punti,  $\varphi_1, \varphi_2$ , di  $\Sigma$ , alla condizione:*

$$(II) \quad \|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)\| \leq K \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad (2),$$

*con*  $K < 1$ , *allora la (I) ammette uno ed uno solo elemento unito* <sup>(3)</sup>; e

*se, ferme le altre ipotesi, supponiamo la (II) verificata soltanto per le coppie di punti  $\varphi$  di  $\Sigma$  appartenenti a un intorno  $H$  di un punto  $\varphi_0$  di  $\Sigma$ ,*

$$H: \quad \|\varphi - \varphi_0\| \leq a,$$

*e supponiamo inoltre*

$$\|T(\varphi_0) - \varphi_0\| \leq (1 - K)a,$$

*allora la (I) ammette, in  $H$ , uno ed uno solo elemento unito* <sup>(4)</sup>.

Mi sono allora proposto, in questa Nota, di far vedere come si possano con molta semplicità dedurre, da tali criteri di dimostrazione pressochè immediata, due teoremi di esistenza e di unicità per problemi di valori al contorno per equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico, d'ordine qualsiasi; teoremi di cui il primo, come si vedrà, estende e completa quello dato sullo stesso argomento dal Niccoletti <sup>(5)</sup>.

In una Nota successiva farò vedere come tali criteri permettano anche di estendere e completare risultati ottenuti dal De La Vallée Poussin sulle equazioni differenziali ordinarie.

(\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) Cioè uno spazio nel quale valga il criterio di convergenza di CAUCHY.

(2) Se  $\varphi$  indica un punto di uno spazio metrico  $\Sigma$ , indicheremo sempre nel seguito con  $\|\varphi\|$  la distanza di  $\varphi$  dallo zero di  $\Sigma$ .

(3) R. CACCIOPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*. [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie 6<sup>a</sup>, vol. XI (1930), pp. 794-799], p. 799.

(4) T. HILDEBRANDT e L. GRAVES, *Implicit functions and their differentials in general analysis*. [« Transactions American Mathematical Society », vol. 29 (1927), pp. 127-153], pp. 133-135.

(5) O. NICCOLETTI, *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*. [« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 33 (1897-98), pp. 746-759], pp. 755-757.



1. Indichiamo con  $R$  il rettangolo

$$R: \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d;$$

con  $m$  e  $n$  due numeri interi e positivi; con  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ ,  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$  due gruppi di punti appartenenti rispettivamente agli intervalli  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ ; e con  $Z$  il punto variabile di uno spazio  $S_t$  a  $t = mn + m + n$  dimensioni, di coordinate  $\bar{z}_{pq}$  ( $p = 0, 1, \dots, m$ ;  $q = 0, 1, \dots, n$ ;  $p + q \leq m + n - 1$ ).

Prémesso ciò dimostriamo il seguente

TEOREMA. — Sia

$$f(P|Z)$$

una funzione continua per  $P \equiv (x, y)$  variabile in  $R$  e  $Z$  in  $S_t$ .

Siano  $K$  e  $N$  due numeri positivi soddisfacenti alle condizioni:

$$(1) \quad K < 1, \quad |f(P|0)| \leq (1 - K)N$$

e supponiamo che la  $f(P|Z)$  soddisfaccia, per ogni coppia di punti

$$\{x, y, \bar{z}_{00}^{(1)}, \dots, \bar{z}_{pq}^{(1)}, \dots\}, \quad \{x, y, \bar{z}_{00}^{(2)}, \dots, \bar{z}_{pq}^{(2)}, \dots\}$$

del campo:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

$$\sum_0^m \sum_0^n |\bar{z}_{pq}| \leq N \sum_0^m \sum_0^n \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)!(n-q)!}, \quad (p+q \leq m+n-1),$$

alla condizione di Lipschitz

$$(2) \quad |f(x, y, \bar{z}_{00}^{(1)}, \dots, \bar{z}_{pq}^{(1)}, \dots) - f(x, y, \bar{z}_{00}^{(2)}, \dots, \bar{z}_{pq}^{(2)}, \dots)| \leq L \sum_0^m \sum_0^n |\bar{z}_{pq}^{(1)} - \bar{z}_{pq}^{(2)}|, \quad (p+q \leq m+n-1),$$

con  $L$  costante positiva verificante la limitazione:

$$(3) \quad L \sum_0^m \sum_0^n \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)!(n-q)!} \leq K, \quad (p+q \leq m+n-1).$$

In tali ipotesi il problema:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^{m+n} \bar{z}}{\partial x^m \partial y^n} = f\left(x, y, \bar{z}(x, y), \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{p+q} \bar{z}}{\partial x^p \partial y^q}, \dots\right), \\ \quad (p+q \leq m+n-1), \\ \bar{z}(x_1, y) = 0, \quad \bar{z}(x_2, y) = 0, \dots, \bar{z}(x_m, y) = 0, \\ \bar{z}(x, y_1) = 0, \quad \bar{z}(x, y_2) = 0, \dots, \bar{z}(x, y_n) = 0, \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione,  $\zeta(x, y)$ , continua, assieme alle sue derivate parziali  $\frac{\partial^{p+q}\zeta}{\partial x^p \partial y^q}$ , ( $p = 0, 1, \dots, m; q = 0, 1, \dots, n$ ), nel rettangolo  $R$  e ivi soddisfacente alle limitazioni <sup>(6)</sup>:

$$(5) \quad \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \left| \frac{\partial^{p+q}\zeta}{\partial x^p \partial y^q} \right| \leq N \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)!(n-q)!},$$

$$(p+q \leq m+n-1) \quad (7).$$

Per dimostrare il teorema enunciato osserviamo innanzi tutto che, posto

$$h(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m),$$

$$g(y) = (y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_n)$$

e indicata con  $\varphi(x, y)$  una funzione continua, in  $R$ , assieme alle sue derivate parziali  $\frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial x^p \partial y^q}$ , ( $p = 0, 1, \dots, m; q = 0, 1, \dots, n; p+q \leq m+n-1$ ), basterà provare che la trasformazione funzionale <sup>(8)</sup>:

$$(6) \quad \zeta(x, y) = \frac{1}{(m-1)!(n-1)!} h(x) g(y) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{h'(x_i) g'(y_j) (x-x_i)(y-y_j)} \cdot$$

$$\cdot \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y (x_i-u)^{m-1} (y_j-v)^{n-1} f\left(u, v, \varphi(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \dots, \frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial u^p \partial v^q}, \dots\right) du dv,$$

ammette un solo elemento unito che soddisfa alla condizione (5). A tale scopo ricordiamo intanto che la funzione  $\zeta(x, y)$ , data dalla trasformazione (6), soddisfa, in  $R$ , alle limitazioni:

$$(7) \quad \left| \frac{\partial^{p+q}\zeta}{\partial x^p \partial y^q} \right| \leq \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)!(n-q)!} M,$$

$$(p = 0, 1, \dots, m; q = 0, 1, \dots, n),$$

ove  $M$  indica il massimo modulo di  $\frac{\partial^{m+n}\zeta}{\partial x^m \partial y^n}$  in  $R$  <sup>(9)</sup>.

(6) Intenderemo sempre, nel corso del presente lavoro,

$$\frac{\partial^0 \zeta}{\partial x^0 \partial y^0} = \zeta, \quad \frac{\partial^{0+q}\zeta}{\partial x^0 \partial y^q} = \frac{\partial^q \zeta}{\partial y^q}, \quad \frac{\partial^{p+0}\zeta}{\partial x^p \partial y^0} = \frac{\partial^p \zeta}{\partial x^p}.$$

(7) Il NICCOLETTI, nel lavoro citato in (5), ha provato l'esistenza e l'unicità della soluzione,  $\zeta(x, y)$ , del problema (4), supponendo la  $f\left(x, y, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{p+q}\zeta}{\partial x^p \partial y^q}, \dots\right)$  lipschitziana in tutto lo spazio  $S_1$  e supponendo inoltre il rettangolo  $R$  sufficientemente piccolo, senza cioè dare per le dimensioni di questo la limitazione (3) da noi stabilita.

(8) Cfr. loc. cit. in (5), p. 756.

(9) G. ZWIRNER, *Sopra il problema di NICCOLETTI per una particolare classe di equazioni differenziali a derivate parziali*. [« Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Padova », vol. XIV (1943), pp. 17-36], pp. 19-21.

Premesso ciò, indichiamo con  $\Sigma$  lo spazio descritto dalle funzioni  $\varphi(x, y)$ , quando come distanza di due elementi,  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$ , di  $\Sigma$  si assuma il numero

$$\sum_{\sigma}^m \sum_{\tau}^n \max_{\text{in } R} \left| \frac{\partial^{p+q} \varphi_1}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q} \varphi_2}{\partial x^p \partial y^q} \right|, \quad (p+q \leq m+n-1),$$

e con  $H$  l'intorno dell'elemento zero di  $\Sigma$  costituito da tutte le funzioni  $\varphi(x, y)$  soddisfacenti alla limitazione:

$$\|\varphi(x, y)\| \leq N \sum_{\sigma}^m \sum_{\tau}^n \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!}, \quad (p+q \leq m+n-1).$$

Siano ora,  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$ , due elementi qualsiasi appartenenti all'intorno  $H$  e  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$  i loro trasformati mediante la (6).

Per la (2) e la (7) si ha:

$$\begin{aligned} \max_{\text{in } R} \left| \frac{\partial^{p+q} \psi_1}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q} \psi_2}{\partial x^p \partial y^q} \right| &\leq \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} L \sum_{\sigma}^m \sum_{\tau}^n \max_{\text{in } R_*} \left| \frac{\partial^{p+q} \varphi_1}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q} \varphi_2}{\partial x^p \partial y^q} \right| = \\ &= L \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad (p+q \leq m+n-1) \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} \|\psi_1 - \psi_2\| &\leq L \sum_{\sigma}^m \sum_{\tau}^n \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \\ &\quad (p+q \leq m+n-1) \end{aligned}$$

od anche, per la (3),

$$(8) \quad \|\psi_1 - \psi_2\| \leq K \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Si vede così che risulta verificata la condizione II) per ogni coppia di elementi appartenenti all'intorno  $H$ .

Detto ora  $\psi_0(x, y)$  il trasformato, mediante la (6), dello zero di  $\Sigma$ , per le (7) e la seconda delle (1), si ha:

$$\begin{aligned} \max_{\text{in } R} \left| \frac{\partial^{p+q} \psi_0}{\partial x^p \partial y^q} \right| &\leq \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} (1-K) N, \\ &\quad (p=0, 1, \dots, m; \quad q=0, 1, \dots, n) \end{aligned}$$

ossia:

$$\|\psi_0\| \leq (1-K) N \sum_{\sigma}^m \sum_{\tau}^n \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!}, \quad (p+q \leq m+n-1).$$

Di qui e dalla (8), in virtù del secondo criterio enunciato nella prefazione, segue senz'altro il teorema da noi enunciato.

2. TEOREMA. Sia  $f(P, Z)$  una funzione continua per  $P = (x, y)$  variabile in  $R$  e  $Z$  in  $S$ . Supponiamo inoltre che esista una costante positiva  $M$  tale che nel campo:

$$D: \quad a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, |\tilde{z}_{p,q}| \leq \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} M,$$

$$(p=0, 1, \dots, m; \quad q=0, 1, \dots, n; \quad p+q \leq m+n-1)$$



risulti:

$$(9) \quad |f(P|Z)| \leq M$$

e che per ogni coppia di punti

$$\{x, y, \tilde{\alpha}_{00}^{(1)}, \dots, \tilde{\alpha}_{pq}^{(1)}, \dots\}, \quad \{x, y, \tilde{\alpha}_{00}^{(2)}, \dots, \tilde{\alpha}_{pq}^{(2)}, \dots\}$$

del campo  $D$ , si abbia:

$$(10) \quad \left| f(x, y, \tilde{\alpha}_{00}^{(1)}, \dots, \tilde{\alpha}_{pq}^{(1)}, \dots) - f(x, y, \tilde{\alpha}_{00}^{(2)}, \dots, \tilde{\alpha}_{pq}^{(2)}, \dots) \right| \leq \sum_0^m \sum_0^n L_{pq} |\tilde{\alpha}_{pq}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{pq}^{(2)}|, \quad (p+q \leq m+n-1),$$

con  $L_{pq}$  costanti non negative e soddisfacenti alla limitazione:

$$(11) \quad K = \sum_0^m \sum_0^n L_{pq} \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} < 1, \quad (p+q \leq m+n-1).$$

In tali ipotesi il problema (4) ammette una ed una sola soluzione,  $\gamma(x, y)$ , continua, assieme alle sue derivate parziali,  $\frac{\partial^{p+q} \gamma}{\partial x^p \partial y^q}$ , ( $p=0, 1, \dots, m$ ;  $q=0, 1, \dots, n$ ), nel rettangolo  $R$  e ivi verificante le condizioni:

$$\left| \frac{\partial^{p+q} \gamma}{\partial x^p \partial y^q} \right| \leq \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} M.$$

Indichiamo con  $\Sigma_1$  lo spazio delle funzioni  $\varphi(x, y)$  continue, assieme alle loro derivate parziali  $\frac{\partial^{p+q} \varphi}{\partial x^p \partial y^q}$ , ( $p=0, 1, \dots, m$ ;  $q=0, 1, \dots, n$ ;  $p+q \leq m+n-1$ ) nel rettangolo  $R$  e soddisfacenti ivi alle limitazioni:

$$\left| \frac{\partial^{p+q} \varphi}{\partial x^p \partial y^q} \right| \leq \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} M, \quad (a \leq x \leq b, c \leq y \leq d).$$

Assumeremo, in tale spazio, come distanza di due elementi,  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$ , il numero:

$$\sum_0^m \sum_0^n L_{pq} \max_{\text{in } R} \left| \frac{\partial^{p+q} \varphi_1}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q} \varphi_2}{\partial x^p \partial y^q} \right|, \quad (p+q \leq m+n-1) \quad (10).$$

Premesso ciò, si vede ora facilmente, ove si tengano presenti le (7) e (9), che il trasformato, mediante la (6), di un qualsiasi elemento  $\varphi(x, y)$  di  $\Sigma_1$  è ancora un elemento di  $\Sigma_1$ . Inoltre, se  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$ , sono due elementi qualsiasi di  $\Sigma_1$  e indichiamo con  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$  i loro trasformati mediante la (6), per le (7) e (10), si ha:

(10) Escludiamo il caso  $L_{pq}=0$ , ( $p=0, 1, \dots, m$ ;  $q=0, 1, \dots, n$ ;  $p+q \leq m+n-1$ ) perchè allora, come è noto, il problema (4) ammette una ed una sola soluzione. Cfr. loc. cit. in (5), p. 756.

$$\max_R \left| \frac{\partial^{p+q} \psi_1}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q} \psi_2}{\partial x^p \partial y^q} \right| \leq \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n L_{pq} \max_{\text{in } R} \left| \frac{\partial^{p+q} \varphi_1}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q} \varphi_2}{\partial x^p \partial y^q} \right| = \\ = \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad (p+q \leq m+n-1)$$

ossia, moltiplicando per  $L_{pq}$  e poi sommando rispetto agli indici  $p$  e  $q$ ,

$$\|\psi_1 - \psi_2\| \leq \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n L_{pq} \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)! (n-q)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \\ (p+q \leq m+n-1),$$

cioè:

$$\|\psi_1 - \psi_2\| \leq K \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

dove  $K$  indica il numero dato dalla (11).

Dal primo criterio enunciato nella prefazione segue allora il nostro teorema.

OSSERVAZIONE. — Solamente per semplicità abbiamo considerato, nel problema (4), condizioni al contorno omogenee.

Il caso più generale, considerato dal Niccoletti<sup>(11)</sup>, che si ha quando si impone all'integrale una qualunque condizione valida a determinare l'integrale dell'equazione:

$$\frac{\partial^{m+n} w}{\partial x^m \partial y^n} = 0,$$

si può facilmente, come è noto, ricondurre al caso da noi considerato<sup>(12)</sup>.

**Matematica (Analisi).** — *Una proprietà delle superficie integrali delle equazioni non lineari di ordine  $n$  di tipo iperbolico.* Nota di M. CINQUINI-CIBRARIO, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio E. BOMPIANI.

In una nostra Memoria<sup>(1)</sup> abbiamo dimostrato, tra l'altro, che se due superficie integrali dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine non lineare di tipo iperbolico:

$$(a) \quad F\left(x, y; \zeta; \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = 0$$

(11) Cfr. loc. cit. in (5), p. 756.

(12) Cfr. loc. cit. in (9), pp. 22-23.

(\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra alcune questioni relative alle equazioni del tipo iperbolico non lineari.* « Ann. di Mat. », ser. IV, to. XXIII, 1944, pp. 1-23. Cfr. per questo il § 3, n. 3, T. II, p. 16. Rimandiamo a questo lavoro per quanto riguarda la bibliografia sull'argomento.

hanno in comune una curva  $\Gamma$ , che è una caratteristica per una delle due superficie, e se in un punto di  $\Gamma$  le due superficie hanno un contatto del secondo ordine, la curva  $\Gamma$  è pure una caratteristica anche per l'altra superficie integrale, e le due superficie hanno un contatto del secondo ordine in ogni punto di  $\Gamma$ ; il risultato è dimostrato nel campo delle funzioni di variabile reale.

Nel caso di una equazione a derivate parziali di ordine  $n$ , non lineare di tipo iperbolico:

$$(I) \quad F\left(x, y; \zeta; \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \dots; \dots; \frac{\partial^n \zeta}{\partial x^n}, \frac{\partial^n \zeta}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots, \frac{\partial^n \zeta}{\partial y^n}\right) = 0$$

o più brevemente:

$$F(x, y; \zeta; p_{rs}) = 0 \quad \left( r + s = 1, 2, \dots, n; p_{rs} = \frac{\partial^{r+s} \zeta}{\partial x^r \partial y^s} \right),$$

il risultato è un po' diverso, perchè, se due superficie integrali della (I) hanno in comune una curva  $\Gamma$ , se  $\Gamma$  è una caratteristica per una di esse, e se le due superficie hanno un contatto di ordine  $n$  in un punto di  $\Gamma$ , non è detto, in generale, che  $\Gamma$  sia una caratteristica anche per l'altra superficie integrale. Infatti si dimostra, sempre restando nel campo delle funzioni di variabile reale, che: Se  $\zeta = \zeta(x, y)$ ,  $\zeta = \zeta(x, y)$  sono due superficie integrali della (I), aventi in comune una curva  $\Gamma$ , nei punti della quale esse hanno un contatto di ordine  $n-2$ , se  $\Gamma$  è una caratteristica, per esempio per la superficie  $\zeta = \zeta(x, y)$ , e se in un punto di  $\Gamma$ , queste hanno un contatto di ordine  $n$ ,  $\Gamma$  è una caratteristica anche per l'altra superficie integrale, e le due superficie hanno un contatto di ordine  $n$  in ogni punto di  $\Gamma$  <sup>(2)</sup>; il risultato vale nell'ipotesi che la funzione  $F(x, y; \zeta; p_{rs})$ , definita in un certo campo  $D$ , sia ivi funzione  $D^1-L$  <sup>(3)</sup> dei suoi argomenti, che l'equazione (I) sia di tipo iperbolico in tutto  $D$ , che le funzioni  $\zeta(x, y)$  e  $\zeta(x, y)$  siano  $D^{n+1}$  nel loro campo comune di definizione, e che, se nei punti di  $\Gamma$  è, per esempio,  $y = Y(x)$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ), la  $Y(x)$  sia  $D^{III}$ . Alla dimostrazione di questo risultato sono dedicate le presenti righe.

2. Dalle ipotesi del teorema enunciato segue subito che, se si pone:

$$(I) \quad \begin{cases} \zeta[x, Y(x)] = \Phi(x); \left[ \frac{\partial^{r+s} \zeta(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{y=Y(x)} = \Phi_{rs}(x) & (r+s=1, 2, \dots, n) \\ \zeta[x, Y(x)] = \Psi(x); \left[ \frac{\partial^{r+s} \zeta(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{y=Y(x)} = \Psi_{rs}(x) & (r+s=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

è:

$$(2) \quad \Phi(x) = \Psi(x); \Phi_{rs}(x) = \Psi_{rs}(x) \quad (r+s=1, 2, \dots, n-2; x_1 \leq x \leq x_2);$$

(2) Si intende che il risultato è valido per un arco della curva  $\Gamma$ , sufficientemente piccolo, contenente il punto, in cui le due superficie hanno un contatto di ordine  $n$ .

(3) Con funzione  $D^n$  intendiamo una funzione finita e continua con tutte le sue derivate fino a quelle di ordine  $n$  incluse, e con funzione  $D^n-L$  una funzione, le cui derivate  $n$  sono, inoltre, lipschitziane.



se il punto della curva  $\Gamma$ , in cui le due superficie integrali hanno un contatto di ordine  $n$ , corrisponde all'ascissa  $x = x_0$  ( $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ ), dalle ipotesi fatte segue che inoltre:

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi_{n-1-r,r}(x_0) = \Psi_{n-1-r,r}(x_0) & (r = 0, 1, \dots, n-1) \\ \Phi_{n-r,r}(x_0) = \Psi_{n-r,r}(x_0) & (r = 0, 1, \dots, n). \end{cases}$$

Non è restrittivo supporre che sia:

$$(3') \quad \begin{cases} x_0 = Y(x_0) = 0 & ; \quad \Phi(0) = \Psi(0) = 0 \\ \Phi_{rs}(0) = \Psi_{rs}(0) = 0 & (r+s = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Per la superficie integrale  $\zeta = \zeta(x, y)$  della (I) la curva  $\Gamma$  sia una caratteristica del sistema corrispondente alla radice:

$$\frac{dy}{dx} = \rho(x, y; \zeta; p_{rs})$$

dell'equazione:

$$(II) \quad P_{n,0} dy^n - P_{n-1,1} dy^{n-1} dx + \dots + (-1)^n P_{0,n} dx^n = 0,$$

dove si è posto:

$$P_{rs} = \frac{\partial F(x, y; \zeta; p_{rs})}{\partial p_{rs}},$$

e si intende che le  $P_{rs}$  e quindi la  $\rho$  siano calcolate, ponendo in esse la funzione  $\zeta(x, y)$  e le sue derivate al posto di  $\zeta$  e delle  $p_{rs}$ .

Si prendano come assi coordinati la tangente alla curva  $\Gamma$  nell'origine e un'altra tangente caratteristica della superficie  $\zeta = \zeta(x, y)$  nell'origine <sup>(4)</sup>; è allora <sup>(5)</sup>:

$$(4) \quad (P_{n,0})_0 = (P_{0,n})_0 = (\rho)_0 = Y'(0) = 0.$$

Poichè la (I) è di tipo iperbolico e quindi la (II) ha radici tutte distinte, segue subito che:

$$(4') \quad (P_{n-1,1})_0 \neq 0 \quad ; \quad (P_{1,n-1})_0 \neq 0.$$

Poichè la curva  $\Gamma$  è una caratteristica della superficie integrale  $\zeta = \zeta(x, y)$ , tenendo conto delle prime tra le (1) segue che le funzioni:

$$Y(x), \Phi(x), \Phi_{rs}(x) \quad (r+s = 1, 2, \dots, n)$$

soddisfano le <sup>(6)</sup>:

$$(5) \quad \begin{cases} Y'(x) = \rho[x, Y(x); \Phi(x); \Phi_{rs}(x)] \\ \Phi'(x) = \Phi_{1,0}(x) + \Phi_{0,1}(x) Y'(x) \\ \Phi'_{rs}(x) = \Phi_{r+1,s}(x) + \Phi_{r,s+1}(x) Y'(x) \quad (r+s = 1, 2, \dots, n-3). \end{cases}$$

(4) Poichè le due superficie integrali  $\zeta = \zeta(x, y)$ ,  $\zeta = \zeta(x, y)$  hanno un contatto di ordine  $n$  nell'origine, esse hanno ivi anche le stesse tangenti caratteristiche.

(5) Con  $(P_{n,0})_0$  per esempio si indica il valore della funzione  $P_{n,0}$ , quando tutte le variabili da cui essa dipende sono nulle, e analogamente, qui e in seguito, per le altre funzioni.

(6) Per il sistema, costituito dalle equazioni (5)-(8), cfr.: GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Paris, Hermann 1896, to. II,

$$(6) \quad \Phi'_{n-2-r,r}(x) = \Phi_{n-1-r,r}(x) + \Phi_{n-2-r,r+1}(x) Y'(x) \quad (r=0, 1, \dots, n-2).$$

$$(7) \quad \Phi'_{n-1-r,r}(x) = \Phi_{n-r,r}(x) + \Phi_{n-1-r,r+1}(x) Y'(x) \quad (r=0, 1, \dots, n-1).$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{n,0} \Phi'_{n,0}(x) + [-P_{n,0} Y'(x) + P_{n-1,1}] \Phi'_{n-1,1}(x) + [P_{n,0} Y'^2(x) - \\ - P_{n-1,1} Y'(x) + P_{n-2,2}] \Phi'_{n-2,2}(x) + \dots + [(-1)^{n-1} P_{n,0} Y'^{n-1}(x) + \\ + (-1)^{n-2} P_{n-1,1} Y'^{n-2}(x) + \dots + P_{1,n-1}] \Phi'_{1,n-1}(x) + \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \\ P_{n,0} \Phi'_{n-1,r}(x) + [-P_{n,0} Y'(x) + P_{n-1,1}] \Phi'_{n-2,2}(x) + [P_{n,0} Y'^2(x) - \\ - P_{n-1,1} Y'(x) + P_{n-2,2}] \Phi'_{n-2,2}(x) + \dots + [(-1)^{n-1} P_{n,0} Y'^{n-1}(x) + \\ + (-1)^{n-2} P_{n-1,1} Y'^{n-2}(x) + \dots + P_{1,n-1}] \Phi'_{1,n-1}(x) + \left(\frac{dF}{dy}\right) = 0, \end{array} \right.$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \Phi_{1,0}(x) + \sum_{r+s=1}^{n-1} P_{rs} \Phi_{r+s,1}(x) \\ \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \Phi_{0,1}(x) + \sum_{r+s=1}^{n-1} P_{rs} \Phi_{r,s+1}(x), \end{array} \right.$$

e si intende che le

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial \zeta}, P_{rs} \quad (r+s=1, 2, \dots, n)$$

siano calcolate ponendo in esse

$$y = Y(x), \quad \zeta = \Phi(x), \quad p_{rs} = \Phi_{rs}(x) \quad (r+s=1, 2, \dots, n).$$

Le funzioni

$$\Psi'_{n-1-r,r}(x) \quad (r=0, 1, \dots, n-1), \quad \Psi'_{n-r,r}(x) \quad (r=0, 1, \dots, n)$$

soddisfano le:

$$(9) \quad \Phi'_{n-2-r,r}(x) = \Psi'_{n-1-r,r}(x) + \Psi'_{n-2-r,r+1}(x) Y'(x) \quad (r=0, 1, \dots, n-2)$$

$$(10) \quad \Psi'_{n-1-r,r}(x) = \Psi'_{n-r,r}(x) + \Psi'_{n-1-r,r+1}(x) Y'(x) \quad (r=0, 1, \dots, n-1).$$

Derivando la (I) una volta rispetto a  $x$  e l'altra rispetto a  $y$ , ponendo nelle equazioni ottenute  $y = Y(x)$ , tenendo conto delle (1) e (2), e osservando che, posto:

$$\pi_{n+1-r,r}(x) = \left[ \frac{\partial^{n+1} \zeta(x, y)}{\partial x^{n+1-r} \partial y^r} \right]_{y=Y(x)} \quad (r=0, 1, \dots, n+1),$$

dalle relazioni:

$$\Psi'_{n-r,r}(x) = \pi_{n+1-r,r}(x) + \pi_{n-r,r+1}(x) Y'(x) \quad (r=0, 1, \dots, n),$$

chap. X, n. 209, p. 300, form. (6). Per la teoria delle caratteristiche per equazioni non lineari di ordine  $n$  di tipo iperbolico nel campo reale cfr.: M. CINQUINI-CIBRARIO, *Teoria delle caratteristiche per equazioni non lineari di ordine  $n$  di tipo iperbolico*, in corso di stampa negli « Ann. di Mat. », t. XXVI, 1947 (cfr. in particolare § 1, n. 1 form. (III)), riassunto nella Nota: *Sopra la teoria delle caratteristiche per le equazioni di ordine  $n$  di tipo iperbolico non lineari*. « Rendic. dell'Istituto Lombardo », vol. LXXIX, 1945-46.

si ottengono tutte le  $\pi_{n+1-r,r}(x)$  ( $r=0, 1, \dots, n$ ) in funzione delle  $\Psi'_{n-r,r}(x)$  ( $r=0, 1, \dots, n$ ) e della  $\pi_{0,n+1}(x)$ , si ottengono inoltre le due relazioni:

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{n,0} \Psi'_{n,0}(x) + [-\bar{P}_{n,0} Y'(x) + \bar{P}_{n-1,1}] \Psi'_{n-1,1}(x) + [\bar{P}_{n,0} Y'^2(x) - \\ & - \bar{P}_{n-1,1} Y'(x) + \bar{P}_{n-2,2}] \Psi'_{n-2,2}(x) + \dots + [(-1)^{n-1} \bar{P}_{n,0} Y'^{n-1}(x) + \\ & + (-1)^{n-2} \bar{P}_{n-1,1} Y'^{n-2}(x) + \dots + \bar{P}_{1,n-1}] \Psi'_{1,n-1}(x) + [(-1)^n \bar{P}_{n,0} Y'^n(x) + \\ & + (-1)^{n-1} \bar{P}_{n-1,1} Y'^{n-1}(x) + \dots + \bar{P}_{0,n}] \Psi'_{0,n}(x) + [(-1)^{n+1} \bar{P}_{n,0} Y'^n(x) + \\ & + (-1)^n \bar{P}_{n-1,1} Y'^{n-1}(x) + \dots - \bar{P}_{0,n}] Y'(x) \pi_{0,n+1}(x) + \left( \frac{dF}{dx} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{n,0} \Psi'_{n-1,1}(x) + [-\bar{P}_{n,0} Y'(x) + \bar{P}_{n-1,1}] \Psi'_{n-2,2}(x) + [\bar{P}_{n,0} Y'^2(x) - \\ & - \bar{P}_{n-1,1} Y'(x) + \bar{P}_{n-2,2}] \Psi'_{n-2,2}(x) + \dots + [(-1)^{n-1} \bar{P}_{n,0} Y'^{n-1}(x) + \\ & + (-1)^{n-2} \bar{P}_{n-1,1} Y'^{n-2}(x) + \dots + \bar{P}_{1,n-1}] \Psi'_{0,n}(x) + [(-1)^n \bar{P}_{n,0} Y'^n(x) + \\ & + (-1)^{n-1} \bar{P}_{n-1,1} Y'^{n-1}(x) + \dots + \bar{P}_{0,n}] \pi_{0,n+1}(x) + \left( \frac{dF}{dy} \right) = 0. \end{aligned}$$

dove:

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dF}{dx} \right) &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \Phi_{1,0}(x) + \sum_{r+s=1}^{n-3} \bar{P}_{r,s} \Phi_{r+1,s}(x) + \\ &+ \sum_{r=0}^{n-2} \bar{P}_{n-2-r,r} \Psi'_{n-1-r,r}(x) + \sum_{r=0}^{n-1} \bar{P}_{n-1-r,r} \Psi'_{n-r,r}(x) \\ \left( \frac{dF}{dy} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \Phi_{0,1}(x) + \sum_{r+s=1}^{n-3} \bar{P}_{r,s} \Phi_{r,s+1}(x) + \\ &+ \sum_{r=0}^{n-2} \bar{P}_{n-2-r,r} \Psi'_{n-2-r,r+1}(x) + \sum_{r=0}^{n-1} \bar{P}_{n-1-r,r} \Psi'_{n-1-r,r+1}(x). \end{aligned} \right.$$

e con  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \chi}$ ,  $\bar{P}_{rs}$ , si intende indicare che ora le funzioni in questione sono calcolate, ponendo in esse:

$$\begin{aligned} y &= Y(x) \quad , \quad \chi = \Phi(x) \quad , \quad p_{rs} = \Phi_{rs}(x) \quad (r+s=1, 2, \dots, n-2), \\ p_{n-1-r,r} &= \Psi'_{n-1-r,r}(x) \quad (r=0, \dots, n-1), \\ p_{n-r,r} &= \Psi'_{n-r,r}(x) \quad (r=0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Derivando le (9), sostituendo alla  $\Psi'_{n-1-r,r}(x)$  le loro espressioni, date dalle (10), derivando di nuovo, e tenendo di nuovo conto delle (10), si ottengono le (7):

$$\begin{aligned} (12) \quad & \Psi'_{n-r,r}(x) + 2 \Psi'_{n-1-r,r+1}(x) Y'(x) + \Psi'_{n-2-r,r+2}(x) Y'^2(x) + \\ & + 3 \Psi'_{n-1-r,r+1}(x) Y''(x) + 3 \Psi'_{n-2-r,r+2}(x) Y'(x) Y''(x) + \\ & + \Psi'_{n-2-r,r+1}(x) Y'''(x) - \Phi'_{n-2-r,r}(x) = 0 \quad (r=0, 1, \dots, n-2). \end{aligned}$$

(7) L'ipotesi fatta che  $\chi(x, y)$  sia  $D^{n+1}$  e che  $Y(x)$  sia  $D^m$  assicura, tenuto conto delle (1), che le  $\Phi_{n-2-r,r}(x)$  sono  $D^m$ .

Analogamente dalle (5) e (6) seguono per le  $\Phi_{n-r,r}(x)$  le:

$$(13) \quad \Phi'_{n-r,r}(x) + 2\Phi'_{n-1-r,r}(x)Y'(x) + \Phi'_{n-2-r,r}(x)Y'^2(x) + \\ + 3\Phi_{n-1-r,r+1}(x)Y''(x) + 3\Phi_{n-2-r,r+2}(x)Y'(x)Y''(x) + \\ + \Phi_{n-2-r,r+1}(x)Y'''(x) - \Phi'''_{n-2-r,r}(x) = 0 \quad (r=0, 1, \dots, n-2).$$

Si pensino ora le  $Y(x), \Phi(x), \Phi_{rs}(x)$  ( $r+s=1, 2, \dots, n-2$ ) come funzioni note, e le  $\Psi_{n-1-r,r}(x)$  ( $r=0, 1, \dots, n-1$ ),  $\Psi_{n-r,r}(x)$  ( $r=0, 1, \dots, n$ ) come funzioni incognite, soddisfacenti il sistema delle (10), (12), (11) e nulle per  $x=0$ . Il determinante dei coefficienti delle  $\Psi'_{n-1-r,r}(x)$  ( $r=0, 1, \dots, n-1$ ),  $\Psi'_{n-r,r}(x)$  ( $r=0, 1, \dots, n$ ) nel sistema delle (10), (12), (11), è certamente diverso da zero per  $x=0$ , come si vede subito, tenendo conto delle (4) e (4').

Fissata ad arbitrio la funzione  $\pi_{0,n+1}(x)$ , esiste uno e un solo sistema di soluzioni  $\Psi'_{n-1-r,r}(x)$  ( $r=0, 1, \dots, n-1$ ),  $\Psi'_{n-r,r}(x)$  ( $r=0, 1, \dots, n$ ), del sistema delle (10), (12), (11), nulle per  $x=0$  (8); ma, comunque si scelga la funzione  $\pi_{0,n+1}(x)$ , si vede subito che, tenuto conto che per la (II) e la prima delle (5) è:

$$P_{n,0}[x, Y(x); \Phi(x); \Phi_{rs}(x)]Y''(x) - \\ - P_{n-1,1}[\dots]Y''^{n-1}(x) + \dots + (-1)^n P_{0,n}[\dots] = 0,$$

e che valgono le (7), (13) e (8), il sistema delle (10), (12) e (11) è soddisfatto, ponendo:

$$(14) \quad \begin{cases} \Psi_{n-1-r,r}(x) = \Phi_{n-1-r,r}(x) & (r=0, 1, \dots, n-1); \\ \Psi'_{n-r,r}(x) = \Phi_{n-r,r}(x) & (r=0, 1, \dots, n). \end{cases}$$

Le (14) valgono per  $|x|$  sufficientemente piccolo (9).

Dalle (14) segue che le due superficie integrali  $\zeta = \zeta(x, y)$ ,  $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(x, y)$  hanno effettivamente un contatto di ordine  $n$  in ogni punto di  $\Gamma$  corrispondente a quei valori di  $x$ ; tale arco di  $\Gamma$  è dunque una loro caratteristica comune (10).

Il teorema enunciato al n. 1 è così completamente dimostrato.

3. Nel caso dell'equazione *quasi-lineare*, cioè lineare soltanto nelle derivate di ordine massimo:

$$(1') \quad A_0 p_{n,0} + A_1 p_{n-1,1} + \dots + A_n p_{0,n} = B,$$

dove  $A_0, A_1, \dots, A_n, B$  sono funzioni soltanto di  $x, y; \zeta; p_r$  ( $r+s=1, 2, \dots, n-1$ ), il risultato si semplifica, se si tiene conto che la (1')

(8) Il risultato vale per  $|x|$  abbastanza piccolo, perchè si è provato che il determinante dei coefficienti delle  $\Psi'_{n-1-r,r}(x), \Psi'_{n-r,r}(x)$  nel sistema delle (10), (12), (11) è differente da zero per  $x=0$ , e quindi per  $|x|$  abbastanza piccolo (Se il punto  $x=0$  fosse un estremo dell'arco di curva  $\Gamma$ , si dovrebbero considerare valori di  $x$  soltanto positivi o soltanto negativi).

(9) Cfr. la precedente nota (8).

(10) Se due superficie integrali della (I) hanno un contatto di ordine  $n$  in tutti i punti di una curva, questa è una loro caratteristica comune. (Cfr. anche: M. CINQUINI-CIBRARIO, loc. cit., nella nota (6), § 5, T. V e le osservazioni relative).



ammette strisce caratteristiche di ordine  $n-1$  invece che di ordine  $n$ , come l'equazione generale (I')<sup>(11)</sup>. Precisamente si ottiene il risultato:

*Se due superficie integrali della (I):  $\gamma = \gamma(x, y)$ ,  $\gamma = \zeta(x, y)$  hanno in comune una curva  $\Gamma$ , nei punti della quale hanno un contatto di ordine  $n-2$ , se in un punto di  $\Gamma$  esse hanno un contatto di ordine  $n-1$ , e se  $\Gamma$  è una caratteristica per una delle due superficie, essa è una caratteristica anche per l'altra, e le due superficie hanno un contatto di ordine  $n-1$  in ogni punto di  $\Gamma$ <sup>(12)</sup>; il risultato vale nell'ipotesi che le funzioni  $A_0, A_1, \dots, A_n, B$ , definite in un certo campo  $D$ , siano ivi lipschitziane, che l'equazione (I') sia di tipo iperbolico in tutto  $D$ , che le funzioni  $\gamma(x, y), \zeta(x, y)$  siano  $D^n$  nel loro campo comune di definizione, e che, se nei punti di  $\Gamma$  è  $y = Y(x)$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ), la funzione  $Y(x)$  sia  $D^{II}$  (13).*

**Matematica.** — *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche.* Nota di C. MIRANDA, presentata (\*) dal Corrisp. R. CACCIOPOLI.

In una Memoria di qualche anno fa R. Caccioppoli<sup>(1)</sup> ha dato una nuova elegante dimostrazione del teorema di esistenza di una soluzione dell'equazione di Poisson su di una superficie chiusa. Il procedimento di cui si è valso Caccioppoli è basato sostanzialmente su due principî fondamentali di analisi funzionale lineare e cioè il teorema di Riesz sulla rappresentazione dei funzionali lineari, nello spazio  $\Sigma$  delle funzioni continue, mediante integrali di Stieltjes e il teorema relativo alla possibilità di costruire un funzionale lineare, non identicamente nullo in  $\Sigma$ , che sia nullo su tutta una varietà lineare chiusa assegnata, non coincidente con  $\Sigma$ <sup>(2)</sup>.

Del metodo di Caccioppoli si è valso successivamente G. Cimmino<sup>(3)</sup> per lo studio del problema di Dirichlet, sempre relativo all'equazione di Poisson, in un campo piano dotato di frontiera, ma i suoi risultati si riferi-

(11) Per l'equazione (I') cfr. M. CINQUINI-CIBRARIO, loc. cit. nella nota (6), § 7.

(12) Se due superficie integrali della (I') hanno un contatto di ordine  $n-1$  in tutti i punti di una curva, questa è una loro caratteristica comune. (Cfr. anche: M. CINQUINI-CIBRARIO, loc. cit., nella nota (6), § 7, T. V' e le osservazioni relative.

(13) Per il caso  $n=2$  cfr. M. CINQUINI-CIBRARIO, loc. cit. nella nota (1), § 4, n. 4, T. II'.

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) R. CACCIOPOLI, *Sui teoremi di esistenza di Riemann*. [«Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa», ser. 2<sup>a</sup>, vol. VII, 1938].

(2) Tale teorema è dovuto a V. HAHN, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen* [«Journal für Mathematik», B. 157, 1927]. Per una dimostrazione indipendente dal postulato di Zermelo, valida negli spazi separabili, cfr. G. ASCOLI, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*. [«Annali di Matematica», ser. 4<sup>a</sup>, vol. IX, 1931 e X, 1932]. Per un'esposizione d'insieme dell'analisi funzionale lineare cfr. M. PICONE, *Fondamenti di analisi funzionale lineare*. [«Corsi dell'Istituto di Alta Matematica», Roma, 1943].

(3) G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*. [«Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», vol. LXI, 1937].

scono a un problema generalizzato, nel quale si richiede che la soluzione assuma i valori al contorno *in media*.

Scopo della presente Nota è di mostrare come, ove ci si limiti a considerare l'ordinario problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace, in un dominio la cui frontiera sia sufficientemente regolare, il metodo di Caccioppoli conduca assai rapidamente alla dimostrazione del teorema di esistenza; inoltre le modalità del procedimento di dimostrazione sono sostanzialmente le stesse qualunque sia il numero delle dimensioni dello spazio in cui ci si pone e la trattazione è identica per il problema interno e per quello esterno. È solo dunque per fissare le idee che mi limiterò a considerare il caso del problema interno nello spazio a tre dimensioni.

Per la dimostrazione del teorema di esistenza mi valgo di alcune proprietà dei potenziali rappresentati da integrali di Stieltjes; tali proprietà devono ritenersi sostanzialmente note<sup>(4)</sup> ma, per maggiore chiarezza, preferisco ridimostrarle nella forma precisa in cui mi occorrono.

1. Sia  $D$  un dominio limitato dello spazio la cui frontiera  $S$  sia una superficie semplice (anche composta di più parti staccate) dotata in ogni punto di piano tangente e di curvature principali continue e sia  $CD$  il complementare di  $D$ . Per ogni punto  $N$  di  $S$  indicheremo con  $n$  la relativa normale ad  $S$  rivolta verso l'interno di  $D$  e con  $N'_0$  ed  $N''_0$  i punti rispettivamente di  $n \cdot D$  ed  $n \cdot CD$  posti a distanza  $\rho$  da  $N$ . È certo possibile trovare un  $\rho_0$  tale che per  $\rho \leq \rho_0$  i luoghi descritti da  $N'_0$  ed  $N''_0$  al variare di  $N$  su  $S$  siano due superficie  $S'_0$  ed  $S''_0$  anch'esse semplici e dotate in ogni punto di piano tangente continuo; inoltre al variare di  $Q$  ed  $N$  su  $S$  e di  $\rho$  nell'intervallo aperto a sinistra  $(0, \rho_0)$  riesca sempre

$$(1) \quad \left| \frac{1}{QN'_0} - \frac{1}{QN''_0} \right| \leq L$$

essendo  $L$  un numero fisso convenientemente scelto.

2. Ciò premesso, ricordiamo che, nello spazio  $\Sigma$  delle funzioni continue su  $S$ , le funzioni  $f$  per cui è risolubile il problema di Dirichlet

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_2 u = 0 & \text{in } D - S \\ u = f & \text{su } S \end{cases}$$

costituiscono una varietà  $\Sigma_1$  lineare e chiusa. Se  $\Sigma_1$  non coincidesse con  $\Sigma$  esisterebbe un funzionale lineare nullo in  $\Sigma_1$  ma non identicamente nullo in  $\Sigma$ ; per dimostrare il principio di Dirichlet basta dunque dimostrare che ogni

(4) Cfr. per esempio J. PLEMELY, *Potentialtheoretische Untersuchungen*. [« Preisschr. Jablonowskische Ges. », 40 n. 16, 1911]; C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet*. [« Annales de l'Institut H. Poincaré », vol. II, 1932]; G. C. EVANS e E. R. C. MILES, *Potentials of general masses in single and double layers*. [« American Journal of Mathematics », vol. 53, 1931]; G. C. EVANS, *Complements of potential theory*. [« American Journal of Mathematics », vol. 54, 1932 e vol. 55, 1933].

funzionale lineare nullo in  $\Sigma_i$  è nullo anche in  $\Sigma$ , basta cioè far vedere che, se per una funzione additiva e a variazione limitata  $\mu(A)$  del generico insieme  $A$  (misurabile secondo Borel) di punti di  $S$  si ha

$$(3) \quad \int_S f d\mu = 0$$

per ogni funzione continua  $f$  per la quale il problema (2) è risolubile, la stessa

(3) vale per qualunque funzione continua  $f$ .

Per questo consideriamo il potenziale

$$W(P) = \int_S \frac{1}{r} d\mu,$$

dove  $r = PQ$  indica la distanza del punto  $P$  di  $D - S + CD$  dal generico punto  $Q$  di  $S$ ; nelle ipotesi poste la  $W(P)$  è identicamente nulla in  $CD$  e ciò porta che dev'essere  $\mu(A) = 0$  se l'insieme  $A$  si riduce ad un punto; invero, se per un punto  $N$  di  $S$  fosse  $\mu(N) \neq 0$ , sarebbe, contro l'ipotesi:

$$\lim_{P \rightarrow N} W(P) [su CD] = \infty.$$

Dimostriamo ora che  $W(P)$  è nulla anche in  $D - S$ . Per l'armonicità di  $W(P)$  in  $D - S$  basta far vedere che, comunque si assegnino un  $\varepsilon > 0$  e un punto  $Q_0$  di  $S$ , si può trovare un intorno sferico  $I$  di  $Q_0$  tale che, se  $N'_0$  è in  $I$ , si ha:

$$(4) \quad |W(N'_0)| < \varepsilon.$$

Per questo, sia  $C$  un intorno di  $Q_0$  su  $S$  tale da risultare

$$(5) \quad \int_C |d\mu| < \sigma$$

e, detto  $C'$  un altro intorno di  $Q_0$ , contenuto in  $C$  e avente distanza positiva dalla frontiera di  $C$  su  $S$ , sia  $I$  un intorno sferico di  $Q_0$  tale che:

a)  $I$  non abbia punti comuni nè con  $S'_{Q_0}$ , nè con  $S''_{Q_0}$ ;

b)  $S - FI$  sia contenuto in  $C'$  e  $I$  non contenga punti di  $S$  che non appartengano a  $C'$ ;

c) se  $N'_0$  è in  $I$  il corrispondente punto  $N$  sia in  $C'$ ;

d) se  $N'_0$  è in  $I$  e  $Q$  in  $S - C$  sia:

$$(6) \quad \left| \frac{1}{QN'_0} - \frac{1}{QN''_0} \right| < \sigma.$$

Allora, se  $N'_0$  è in  $I$ , tenendo presenti le (1), (5) e (6) si ha:

$$\begin{aligned} |W(N'_0)| &\Rightarrow |W(N'_0) - W(N''_0)| = \\ &= \left| \int_S \left( \frac{1}{QN'_0} - \frac{1}{QN''_0} \right) d\mu \right| \leq \sigma \left( L + \int_{S-C} |d\mu| \right) \end{aligned}$$

e di qui per l'arbitrarietà di  $\sigma$  segue la (4).

Dal fatto che la  $W(P)$  è nulla anche in  $D - S$  segue che, dette  $A$  una porzione di  $S$ , la cui frontiera  $\Phi$  su  $S$  sia costituita da curve generalmente regolari, e  $A'_0$  e  $A''_0$  le corrispondenti porzioni di  $S'_0$  e  $S''_0$ , si ha:

$$(7) \quad \int_{A'_0} \frac{dW}{dn} d\sigma - \int_{A''_0} \frac{dW}{dn} d\sigma = \int_S \left[ \int_{A'_0} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma - \int_{A''_0} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma \right] d\mu = 0.$$

Ora per le note proprietà dei potenziali di doppio strato si ha

$$(8) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{A'_0} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma - \int_{A''_0} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma \right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } Q \text{ è in } S - A \\ 4\pi & \text{se } Q \text{ è in } A - \Phi, \end{cases}$$

Poichè tale relazione di limite è uniforme al variare di  $Q$  in ogni insieme chiuso interno ad  $A$  o ad  $S - A$  e poichè la funzione di  $Q$  è  $\rho$

$$\left| \int_{A'_0} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma - \int_{A''_0} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma \right|$$

è limitata al variare di  $Q$  su  $S$  e per  $0 < \rho \leq \rho_0$ , per ogni insieme  $A$ , tale che  $\mu(\Phi) = 0$ , riesce:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_S \left[ \int_{A'_0} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma - \int_{A''_0} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma \right] d\mu = 4\pi\mu(A),$$

onde segue, tenendo presente la (7):

$$\mu(A) = 0 \quad \text{se} \quad \mu(\Phi) = 0.$$

E ciò basta per concludere che la (3) sussiste per ogni funzione  $f$  continua su  $S$ .

3. Per maggiore semplicità abbiamo fin qui supposto che la frontiera  $FD$  di  $D$  sia una superficie  $S$  dotata in ogni punto di piano tangente e curvature continue. Gioverà ora osservare che la precedente trattazione del problema di Dirichlet sussiste anche se si suppone che  $FD$  sia composta di un numero finito di superficie del tipo predetto che si connettano lungo curve regolari in modo che in ogni punto di tali curve gli assi normali alle due porzioni di  $FD$  formino un angolo diverso da zero e da  $\pi$ . In tale ipotesi si può infatti associare ad ogni punto  $N$  di  $FD$  un asse  $l$  orientato verso l'interno di  $D$ , i cui coseni direttori siano funzioni continue con le loro derivate del punto  $N$ , e tale inoltre da formare col piano tangente (o con i piani tangenti) a  $FD$  in  $N$  un angolo diverso da zero. Prendendo allora sull'asse  $l$ , da parti opposte rispetto ad  $N$  e a distanza  $\rho$  da  $N$ , i due punti  $L'_0$  e  $L''_0$ , i luoghi di tali punti sono due superficie che, nello svolgimento della dimostrazione, possono sostituire a tutti gli effetti le superficie  $S'_0$  e  $S''_0$ ; valendosi di tali superficie, anzichè delle  $S'_0$  e  $S''_0$ , si conduce perciò a termine la dimostrazione nelle nuove ipotesi.



Si noti infine come sia presumibile che il procedimento di dimostrazione si possa estendere, senza soverchie difficoltà, al caso di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine di tipo ellittico, per la quale si conosca una formula di maggiorazione delle soluzioni in funzione dei dati al contorno e si sia previamente dimostrata l'esistenza di una soluzione fondamentale. Del resto anche l'esistenza di tale soluzione fondamentale dovrebbe potersi dimostrare con procedimenti di questo tipo, riprendendo le ricerche di G. Cimmino<sup>(5)</sup> relative alle equazioni lineari, ellittiche, non omogenee, del secondo ordine su di una superficie chiusa.

### Analisi. — *Su una equazione integrale della Statistica Matematica.*

Nota di G. OTTAVIANI, presentata (\*) dal Corrisp. F. P. CANTELLI.

1. Sia  $X$  una variabile casuale gaussiana, avente valor medio nullo e scarto quadratico medio eguale a  $\sqrt{\mu}$ ; sia  $Y$  un'altra variabile casuale, dipendente dalla  $X$ , in modo tale che se  $X$  assume il valore  $x$ , essa sia gaussiana, con valor medio nullo e scarto quadratico medio eguale a  $\sqrt{f(x)}$ , essendo  $f(x)$  un'assegnata funzione, non negativa, definita in  $(-\infty, \infty)$ .

Si consideri la variabile casuale somma  $Z = X + Y$ ; essa avrà valor medio nullo e scarto quadratico medio eguale a  $\sqrt{\mu + \bar{f}}$ , dove

$$(1) \quad \bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dx.$$

Nello studio dello schema lexiano ha grande importanza, come ha posto in evidenza il Cantelli in un lavoro del 1918<sup>(1)</sup>, il seguente problema, tuttora non risoluto: esiste una qualche particolare dipendenza tra le due variabili casuali  $X$  e  $Y$ , cioè qualche particolare funzione  $f(x)$ , tale che la variabile casuale  $Z = X + Y$  sia gaussiana?

Questo problema si riduce alla seguente equazione integrale, ottenuta eguagliando la funzione generatrice della variabile casuale  $X + Y$  a quella di una variabile casuale gaussiana  $Z$ , avente valor medio nullo e scarto quadratico medio eguale a  $\sqrt{\mu + \bar{f}}$ , cioè

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} \cdot e^{\frac{a^2}{2}f(x)} \cdot dx = e^{\frac{a^2}{2}(\mu + \bar{f})}.$$

(5) G. CIMMINO, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*. [«Annali della Scuola Normale superiore di Pisa», ser. 2<sup>a</sup>, vol. VII, 1938].

(\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) F. P. CANTELLI, *Sullo schema lexiano della dispersione ipernormale*. «Memorie Accademia Nazionale dei Lincei», ser. V, vol. XII, fasc. IX, 1918.

2. Questa equazione ammette l'evidente soluzione  $f(x) = \text{cost} = \bar{f}$ , corrispondente al caso in cui  $X$  e  $Y$  siano indipendenti tra loro e gaussiane. Interessa però ricercare se esistano altre soluzioni dell'equazione (2), cioè se esistano delle funzioni non negative  $f(x) \neq \bar{f}$  le quali, sostituite nella (2), la rendono identicamente soddisfatta per qualsiasi valore reale di  $\alpha$ .

In questa breve Nota, che ha lo scopo di richiamare l'attenzione sulla equazione (2), la cui risoluzione ha notevole importanza nella Statistica Matematica, pongo in evidenza le seguenti due proprietà cui dovrebbero soddisfare le eventuali soluzioni, diverse dalla costante, limitando, per semplicità, l'analisi al caso di funzioni  $f(x)$  continue o generalmente continue.

a) Una soluzione  $f(x)$  (diversa da  $\bar{f}$ ) non può diventare e rimanere maggiore o eguale a  $\bar{f}$  per  $x \rightarrow +\infty$  (o per  $x \rightarrow -\infty$ ), cioè non può esistere alcun valore  $a$  tale che per  $a \leq x$  (o per  $x \leq -a$ ) risulti  $\bar{f} \leq f(x)$ .

b) Una soluzione  $f(x)$  non può diventare e rimanere minore o eguale a  $\bar{f} - \frac{1}{o(x^2)}$ , per  $x \rightarrow +\infty$  (intendendosi con ciò non essere possibile che, comunque si fissi un valore positivo  $\varepsilon$ , si possa determinare un valore positivo  $a$  tale che per  $a \leq x$  risulti  $f(x) \leq \bar{f} - \frac{1}{\varepsilon \cdot x^2}$ ), a meno che nell'intervallo  $(0, a)$  non esista almeno un valore  $x$  per cui sia  $f(x) = \mu + \bar{f}$  (e analogamente dicasi per  $x \rightarrow -\infty$ ).

Ricordiamo che nel lavoro già citato<sup>(1)</sup>, era stato posto in evidenza che necessariamente in tutto l'intervallo  $(-\infty, \infty)$  risulta  $f(x) \leq \mu + \bar{f}$ , potendo valere il segno di eguaglianza al più in un numero finito o in una infinità numerabile di punti  $x$ . Sarebbe opportuno pertanto esaminare le conseguenze dell'eventuale esistenza di valori  $x$  nei quali  $f(x)$  risulti uguale a  $\bar{f} + \mu$ .

Altre proprietà possono essere poste facilmente in evidenza: per esempio dal fatto che il valore della funzione  $f(x)$  deve essere compreso, per qualsiasi valore di  $x$ , tra 0 e  $\bar{f} + \mu$ , segue che se  $f(x)$  è sviluppabile in serie di potenze, assolutamente convergente sull'asse reale, i coefficienti dello sviluppo hanno necessariamente una infinità di variazioni di segno, in quanto in caso contrario, cioè se avessero un numero finito di variazioni di segno, risulterebbe  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - f| = \infty$ .

Le proprietà ora enunciate, per quanto semplici, possono essere utili per uno studio più approfondito dell'equazione (2), in quanto permettono di limitare il campo di ricerca delle eventuali soluzioni non costanti della detta equazione. Per esempio, esse permettono di affermare che, se si trascurano le eventuali soluzioni tali che risulti  $f(x) = \mu + \bar{f}$  per qualche valore di  $x$ , qualsiasi soluzione  $f(x)$  dell'equazione (2), per  $x \rightarrow \pm \infty$ , o tende verso  $\bar{f}$ , risultando compresa, a partire da un certo valore in poi, tra  $\bar{f} - \frac{1}{o(x^2)}$  ed  $\bar{f}$ , o, se eventualmente non è compresa tra le dette espressioni, compie infinite oscillazioni. Le proprietà enunciate permettono, inoltre, per esempio, di escludere che una soluzione  $f(x)$  possa essere costituita da un numero

finito di tratti, in ciascuno dei quali essa assume un valore costante, in quanto  $f(x)$  non può assumere in alcun tratto il valore  $\mu + \bar{f}$  e quindi nel primo (e nell'ultimo) tratto essa non può assumere un valore costante, maggiore, o eguale, o minore di  $\bar{f}$ .

I due paragrafi seguenti contengono le dimostrazioni delle proprietà a) e b).

3. Riferendosi a una funzione  $f(x)$ , continua o generalmente continua, non costante, che soddisfi alla (1), si possono determinare un intervallo  $(a_1, a_2)$  e un valore  $\sigma > 0$  tali che per  $a_1 \leq x \leq a_2$  sia  $\bar{f} + \sigma \leq f(x)$ ; inoltre si supponga l'esistenza di un valore  $a$  tale che per  $a \leq x$  sia  $\bar{f} \leq f(x)$ ; evidentemente si può supporre  $a_1 < a_2 < a$ .

Posta la (2) sotto la forma

$$(2') \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} \cdot e^{\frac{\alpha^2}{2} [f(x) - \bar{f}]} dx = I,$$

si può scrivere, per qualsiasi valore di  $\alpha$ ,

$$\int_I \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} \cdot e^{\frac{\alpha^2}{2} [f(x) - \bar{f}]} dx < I,$$

dove  $I$  indica l'insieme costituito dall'intervallo  $(a_1, a_2)$  e dall'intervallo  $(a, +\infty)$ .

Poichè l'espressione  $e^{\frac{\alpha^2}{2} [f(x) - \bar{f}]}$  è, in  $(a_1, a_2)$ , maggiore o eguale a  $e^{\frac{\alpha^2}{2} \sigma}$ , in  $(a, +\infty)$ , maggiore o eguale a 1, vale a maggior ragione la disuguaglianza

$$e^{\frac{\alpha^2}{2} \sigma} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dx + \int_a^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dx < I$$

ossia

$$e^{\frac{\alpha^2}{2} \sigma} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dx < \int_{-\infty}^a \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dx.$$

Riferendosi ora ai valori di  $\alpha$  maggiori di  $a/\mu$ , cosicchè  $a_1 < a_2 < a < \alpha\mu$ , l'integrale del primo membro è minorato da  $\frac{(a_2 - a_1)}{\sqrt{2\pi\mu}} \cdot e^{-\frac{(\alpha\mu - a_1)^2}{2\mu}}$ ; il secondo membro, integrando per parti, si può scrivere

$$(3) \quad \int_{-\infty}^a \frac{I}{2(x - \alpha\mu)} \cdot \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} \cdot d(x - \alpha\mu)^2 =$$

$$= \frac{-\mu}{\sqrt{2\pi\mu}} \left[ \frac{I}{x - \alpha\mu} e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}} \right]_{-\infty}^a - \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\mu}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}} \frac{I}{(x - \alpha\mu)} dx$$

e quindi è maggiorato da  $\frac{\mu e^{-\frac{(a-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}(\alpha\mu-a)}$ ; pertanto si ottiene la disuguaglianza

$$(a_2 - a_1) \cdot \frac{\alpha^2}{e^2} \cdot e^{-\frac{(\alpha\mu-a_1)^2}{2\mu}} < \frac{\mu}{\alpha\mu-a} e^{-\frac{(\alpha\mu-a)^2}{2\mu}},$$

la quale non può essere verificata per  $a \rightarrow +\infty$ , come è facile mostrare. Perciò è assurda l'ipotesi fatta, che si possa determinare un valore  $a$  tale per  $a \leq x$  risulti  $f \leq f(x)$ .

La proprietà a) si dimostra in modo analogo per  $x \rightarrow -\infty$ .

4. Supponiamo, allo scopo di dimostrare la proprietà b), che, comunque si fissi un valore positivo  $\varepsilon$ , si possa in corrispondenza determinare un valore positivo  $a_\varepsilon$  tale che per i valori di  $x$  maggiori di  $a_\varepsilon$  sia  $f(x) \leq \bar{f} - \frac{1}{\varepsilon x^2}$ .

Consideriamo inoltre un valore positivo  $a$  tale che per  $a < x$  sia  $f(x) \leq \bar{f}$  e suddividiamo nella (2') l'integrale del primo membro nei tre intervalli  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, a)$ ,  $(a, +\infty)$ .

L'integrale relativo all'intervallo  $(-\infty, 0)$ , essendo sempre  $f(x) \leq \mu + \bar{f}$ , è maggiorato da

$$\frac{\alpha^2}{e^2} \mu \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dx$$

e quindi, tenuto conto della (3) considerata per  $a=0$ , è maggiorato dal valore  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu} \cdot \alpha}$  che tende a zero per  $\alpha \rightarrow +\infty$ .

L'integrale relativo all'intervallo  $(a, +\infty)$  tende anche esso a zero per  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Infatti si prefissi un valore  $\sigma > 0$  piccolo a piacere, e in

corrispondenza ad esso si determini un valore  $k$  tale che sia  $\int_k^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dx < \frac{\sigma}{3}$

e un valore  $\varepsilon$  tale che sia  $e^{-\frac{1}{8\varepsilon\mu^2}} < \frac{\sigma}{3}$ ; in corrispondenza al valore  $\varepsilon$  ora determinato, si fissi un valore positivo  $a_\varepsilon$  tale che per  $a_\varepsilon \leq x$  sia  $f(x) \leq \bar{f} - \frac{1}{\varepsilon x^2}$ . Si suddivida allora l'intervallo  $(a, +\infty)$  nelle parti  $(a, \alpha\mu - k)$ ,  $(\alpha\mu - k, \alpha\mu + k)$ ,  $(\alpha\mu + k, \infty)$ . L'integrale relativo alla prima parte, essendo ivi  $\frac{\alpha^2}{e^2} [f(x) - \bar{f}] \leq 1$ , è maggiorato da

$$\int_a^{\alpha\mu-k} \frac{e^{-\frac{(x-\alpha\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dx < \int_{-\infty}^{-k} \frac{e^{-\frac{y^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}} dy < \frac{\sigma}{3};$$



analogamente l'integrale relativo alla terza parte è maggiorato da  $\frac{\sigma}{3}$ .  
L'integrale relativo alla seconda parte, poichè per i valori di  $\alpha$  tali che

$a_\varepsilon \leq \alpha\mu - k$ , risulta  $e^{\frac{\alpha^2}{2}[f(x) - \bar{f}]} \leq e^{-\frac{\alpha^2}{2\varepsilon(\alpha\mu + k)^2}} \leq e^{-\frac{\alpha^2}{2\varepsilon(2\alpha\mu)^2}} < \frac{\sigma}{3}$ , è maggio-

rato da  $\frac{\sigma}{3} \int_{\alpha\mu - k}^{\alpha\mu + k} e^{\frac{(\nu - \alpha\mu)^2}{2\mu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} dx < \frac{\sigma}{3}$ ; perciò l'integrale relativo all'intervallo

$(a, +\infty)$ , per i valori di  $\alpha$  tali che  $a_\varepsilon \leq \alpha\mu - k$ , cioè tali che  $\frac{a_\varepsilon + k}{\mu} \leq \alpha$ ,

risulta minore di  $3 \frac{\sigma}{3} = \sigma$  e quindi tende a zero per  $\alpha \rightarrow +\infty$ .

Pertanto l'integrale relativo all'intervallo  $(0, a)$  deve tendere a 1 per  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Ciò non è possibile se in  $(0, a)$  risulta sempre  $f(x) \leq \mu + \bar{f} - \varepsilon_1$ , essendo  $\varepsilon_1$  un valore positivo piccolo a piacere; infatti l'integrale in tal caso sarebbe maggiorato dal valore

$$e^{-\frac{\alpha^2}{2}\varepsilon_1} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2\mu} + \alpha x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} dx$$

che tende verso zero per  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Pertanto dall'analisi fatta deriva che ove esistessero soluzioni  $f(x)$  le quali, per  $x \rightarrow +\infty$ , diventassero e rimanessero minori di  $\bar{f} - \frac{1}{O(x^2)}$ , dovrebbe essere  $f(x) = \bar{f} + \mu$  almeno in un punto  $x$  di  $(0, a)^{(2)}$ .

**Analisi.** — *Il primo problema al contorno per il piano a più tagli.* Nota di H. HORNICH, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

Già da tempo ho dimostrato <sup>(1)</sup> come si possa risolvere il problema misto al contorno della teoria del potenziale mediante integrali iperellittici. Qui viene ora mostrato come, modificando il procedimento indicato in (1) si possano risolvere il primo e il secondo problema al contorno per un piano con più tagli. Questa questione comprende fra l'altro il problema già più volte

(2) ERRATA-CORRIGE del lavoro *Sulla indipendenza delle funzioni misurabili* (pubbl. nella ser. VIII, vol. II, fasc. 4)

	Errata	Corrige
Pag. 394 nota (2)	citati in (2)	citati in (1)
» 395 rigo (25)	già citato (3)	già citato (2)
» 395 nota (3)	citato in (2)	citato in (1)
» 395 nota (7)	cit. in (5)	cit. in (4)
» 397 nota (8)	cit. (6)	cit. (5)
» 397 nota (9)	cit. (2)	cit. (1).

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) « Monatschr. f. Math. u. Ph. », 39, pp. 107-128.

trattato<sup>(2)</sup> della distribuzione della corrente potenziale per una regione limitata da due circonferenze; i metodi al riguardo sono però, adattati per lo più a casi speciali, mentre si può abbracciare la questione da un punto di vista generale in maniera semplice.

Partiamo da un piano, tagliato lungo più segmenti disposti lungo una medesima retta. Supporremo i tagli, in numero di  $p + 1$ , disposti sull'asse reale delle  $\zeta$ , per esempio lungo gl'intervalli:

$$[\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_3, \alpha_4], \dots, [\alpha_{2p+1}, \alpha_{2p+2}], \quad \text{ove} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2p+2}.$$

Poniamo

$$f(\zeta) = -(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_2) \cdots (\zeta - \alpha_{2p+2});$$

i due fogli della superficie di Riemann iperellittica della  $\sqrt{f(\zeta)}$  siano connessi lungo gli intervalli  $[\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]$  ( $i = 1, \dots, p + 1$ ); indicheremo con  $\zeta$  e  $\bar{\zeta}$  punti complessi coniugati di un medesimo foglio e con  $\zeta$  e  $\dot{\zeta}$  punti corrispondenti di fogli differenti. Si ha allora

$$\sqrt{f(\bar{\zeta})} = -\sqrt{f(\zeta)}, \quad f(\dot{\zeta}) = -\sqrt{f(\zeta)}.$$

Consideriamo uno dei fogli della Riemanniana, che rappresenta dunque un piano con i tagli  $[\alpha_1, \alpha_2] \cdots [\alpha_{2p+1}, \alpha_{2p+2}]$ . Sia  $c$  un punto non reale di tale piano. Ci proponiamo la ricerca della *funzione di Green*  $G(c, \zeta)$  del *primo problema al contorno di tale piano*; si avrà dunque  $G(c, \zeta) = 0$  sugli orli dei tagli, e, per  $\zeta = c$ ,  $G(c, \zeta) - \log |\zeta - c|$  sarà regolare; in tutto il resto del foglio, anche all'infinito,  $G(c, \zeta)$  è una funzione potenziale regolare. Sia inoltre:

$$P(c, \zeta) = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\dot{\zeta}} \left[ \frac{\sqrt{f(c)}}{\zeta - c} + \frac{\sqrt{f(\bar{c})}}{\zeta - \bar{c}} \right] \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}} + \frac{1}{2} \log \frac{\zeta - c}{\zeta - \bar{c}}$$

allora la parte reale di  $P(c, \zeta)$ ,  $\Re(P(c, \zeta))$  per  $\zeta = c$  si comporta come  $\log |\zeta - c|$ , mentre è una funzione potenziale regolare su tutto il resto del nostro foglio, anche all'infinito. Per  $\zeta$  reale, con  $\sqrt{f(\zeta)}$  reale, dunque sui punti dei nostri tagli (con eccezione degli estremi  $\alpha_j$ ), è  $\frac{\partial \Re(P(c, \zeta))}{\partial x} = 0$ , e quindi  $\Re(P(c, \zeta))$  è costante lungo ogni taglio, in particolare nulla per  $[\alpha_1, \alpha_2]$ . Nel caso in cui  $p > 0$ , determiniamo un integrale di prima specie

$$v(c, \zeta) = \int_{\alpha_1}^{\dot{\zeta}} \frac{R(c, \zeta)}{\sqrt{f(\zeta)}} d\zeta$$

( $R(c, \zeta)$  polinomio in  $\zeta$  di grado  $\leq p - 1$ ), tale che si abbia

$$\int_{\alpha_{2i}}^{\alpha_{2i+1}} dv(c, \zeta) = \Re \int_{\alpha_{2i}}^{\alpha_{2i+1}} dP(c, \zeta)$$

(2) Cfr. per esempio M. LAGALLY, «Z. angew. Math. Mech.», 9 (1928), pp. 299-305; P. KOEBE, «S. Ber. sächs. Akad. Wiss.», 13, 5 (1935).

per  $i = 1, \dots, p$ . Si vede subito che il polinomio  $R(c, z)$  è a coefficienti puramente immaginari; inoltre, se la relazione scritta è soddisfatta per  $i = 1, \dots, p$ , essa vale automaticamente anche per la somma dei due intervalli  $[\alpha_{2p+2} + \infty]$ ,  $[-\infty \alpha_1]$ . Ma allora  $\Re(v(c, z))$  è costante lungo ogni taglio, e  $\Re(P(c, z) - v(c, z)) = 0$  lungo ogni taglio.

La ricercata funzione di Green è quindi:

$$G(c, z) = \Re \left\{ \frac{1}{2} \int_{\alpha_i}^{\bar{z}} \left[ \frac{\sqrt{f(c)}}{z-c} + \frac{\sqrt{f(\bar{c})}}{\bar{z}-\bar{c}} \right] \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} + \frac{1}{2} \lg \frac{z-c}{\bar{z}-\bar{c}} - \int_{\alpha_i}^{\bar{z}} \frac{R(c, z)}{\sqrt{f(z)}} dz \right\}.$$

Sia  $\Pi = P(c, z) - v(c, z)$  un integrale elementare di terza specie, avente le singolarità in  $c$  e in  $\bar{c}$ , e a periodi puramente immaginari; la parte reale  $G(c, z)$  è funzione uniforme, e si ha:

$$G(c, z) = G(z, c) = -G(c, \bar{z}).$$

Ricerchiamo ora una funzione potenziale  $u$  sul nostro piano tagliato, che assuma i valori  $U_1$  e  $U_2$  rispettivamente sugli orli superiori e inferiori dei tagli: si ha allora:

$$2\pi u(c) = - \sum_{i=1}^{p+1} \int_{\alpha_{2i-1}}^{\alpha_{2i}} U_1 \frac{\partial G(c, z)}{\partial y} dx + \sum_{i=1}^{p+1} \int_{\alpha_{2i-1}}^{\alpha_{2i}} U_2 \frac{\partial G(c, \bar{z})}{\partial y} dx.$$

Si possono ora rappresentare semplicemente le derivate  $\frac{\partial G}{\partial y}$ ; si ha  $G(c, z) = \Re(\Pi(c, z))$  e dunque

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\Im \frac{d\Pi(c, z)}{dz}.$$

Si osservi che sugli orli dei tagli  $\sqrt{f(z)}$  è reale, e  $\sqrt{f(\bar{z})} = -\sqrt{f(z)}$  mentre ivi  $R(c, z)$  è immaginario puro; si ha perciò sugli orli dei tagli:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y}(c, z) &= -\frac{1}{\sqrt{f(z)}} \Im \frac{\sqrt{f(c)}}{z-c} - \Im \frac{1}{z-c} + \frac{R(c, z)}{i\sqrt{f(z)}} \\ \frac{\partial G}{\partial y}(c, \bar{z}) &= \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \Im \frac{\sqrt{f(c)}}{z-c} - \Im \frac{1}{z-c} - \frac{R(c, z)}{i\sqrt{f(z)}}. \end{aligned}$$

Si è ottenuta quindi una rappresentazione di  $u$ .

Il secondo problema al contorno sul nostro piano tagliato si può risolvere o servendosi del primo, quando si passi alla funzione potenziale coniugata, ovvero determinando  $\frac{\partial u}{\partial y}$  mediante la formula scritta più sopra, ciò che è possibile perchè in questo caso  $\frac{\partial v}{\partial y}$  è dato sugli orli dei tagli e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  è una funzione potenziale sul piano. In questo caso hanno evidentemente una particolare importanza quelle funzioni potenziali che sono costanti lungo

ognuno dei  $p + 1$  orli dei tagli; è noto che tutte queste funzioni si rappresentano mediante i potenziali di prima specie

$$\alpha + \Re \int_{\alpha_1}^{\gamma} i \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \dots + \alpha_{p+1} \zeta^{p+1}}{\sqrt{f(\zeta)}} d\zeta$$

con  $\alpha_j$  reali, come si può del resto ottenere, con alcuni calcoli, anche dalle nostre formule. In corrispondenza, il secondo problema al contorno ha  $p + 1$  soluzioni linearmente indipendenti.

Come casi particolari, si ottiene poi una serie di formule note.

Sia  $U_1 = -U_2$ , vale a dire siano uguali e opposti i valori dati sull'orlo inferiore e superiore. Secondo le nostre formule si ha allora

$$2\pi u(c) = 2 \sum_{j=1}^{p+1} \int_{\alpha_{2j-1}}^{\alpha_{2j}} U_1 \Im \frac{1}{x-c} dx$$

e, posto  $c_1 = c + ic_2$

$$u(c) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{p+1} \int_{\alpha_{2j-1}}^{\alpha_{2j}} U_1 \frac{c_2}{(x-c_1)^2 + c_2^2} dx.$$

Tale funzione assume dunque nell'intervallo  $[\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]$  rispettivamente i valori  $U_1$  e  $-U_1$ , mentre sui rimanenti intervalli dell'asse reale si annulla, essendo  $u(c) = -u(\bar{c})$ . Se ci si limita, per esempio al semipiano  $c_2 > 0$ , allora la nostra formula ci dà subito la ben nota *formula di Poisson* per la soluzione del primo problema al contorno pel semipiano.

Sia ora  $U_1 = U_2$ , vale a dire siano uguali i valori assegnati, sugli orli inferiore e superiore dei tagli; si ha allora

$$2\pi U(c) = \sum_{j=1}^{p+1} \int_{\alpha_{2j-1}}^{\alpha_{2j}} U_1 \left[ \frac{2}{f(x)} \Im \frac{\sqrt{f(c)}}{x-c} - 2 \frac{R(c, x)}{i \sqrt{f(x)}} \right] dx.$$

Questa è una funzione, che assume il valore  $U_1$  nell'intervallo  $[\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]$  mentre nei rimanenti intervalli dell'asse reale possiede una derivata normale  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , giacchè  $u(c) = u(\bar{c})$ . Se ci si limita di nuovo al semipiano superiore  $c_2 > 0$ , si ottiene la ben nota soluzione del corrispondente problema misto al contorno. (Cfr. lavoro cit. in <sup>(1)</sup>).

Trattiamo infine il caso generale per  $p = 1$ , ossia quando il piano abbia due tagli. Sia  $A$  una retrosezione della nostra superficie di Riemann, che circondi i punti  $\alpha_2, \alpha_3$ , e sia  $v$  l'integrale di prima specie per cui  $(A) \int dv = 1$ . Ora, essendo  $(A) \int d\Pi(c, \zeta) = 0$ ,  $\Pi(c, \zeta)$  è un integrale trascendente nor-



malizzato di terza specie; poniamo  $v(c) = v_1$ ;  $v(\bar{c}) = v_2$ ; introducendo la funzione dispari  $\vartheta_1(v)$  abbiamo:

$$\Pi(c, \tau) = \log \frac{\vartheta_1(v - v_1)}{\vartheta_1(v - v_2)} + \Phi(c)$$

dove la funzione  $\Phi$  dipendente solo da  $c$  non ha alcuna influenza sul calcolo di  $u$ . Allora la derivata  $\frac{\partial G}{\partial y}$  che compare nella formula che ci fornisce  $u$  ha l'espressione

$$\frac{\partial G(c, \tau)}{\partial y} dx = -\mathfrak{I} \frac{d\pi(c, \tau)}{d\tau} dx = \mathfrak{I} \left[ \frac{\vartheta_1'(v - v_2)}{\vartheta_1(v - v_2)} - \frac{\vartheta_1'(v - v_1)}{\vartheta_1(v - v_1)} \right] dv.$$

Questa formula risolutiva, in cui compare oramai solamente la  $v$ , ha tanto maggiore importanza, *in quanto mediante essa è data praticamente la soluzione per ogni regione superficiale, che si possa rappresentare conformemente sul nostro dominio tagliato* (per esempio, per il dominio limitato da due circonferenze, citato all'inizio).

Si vede poi senz'altro come tali formule si applichino al caso generale  $p > 0$ .

**Geometria.** — *Esistenza topologica di diramazioni negative per le curve doppie.* Nota di C. F. MANARA, presentata (\*) dal Corrisp. O. CHISINI.

§ I. — È nota l'importanza che ha, per lo studio delle curve di diramazione dei piani multipli, la conoscenza del comportamento topologico delle curve algebriche in relazione al piano proiettivo che le contiene. In mancanza di criteri generali, uno dei procedimenti più frequentemente usati per accertare tale comportamento è quello di far ricorso ad opportune curve limiti spezzate; ma, come è già stato avvertito da vari Autori<sup>(1)</sup>, lo studio delle forme limiti presenta particolari difficoltà e, come vedremo, apparenti paradossi nel caso più significativo, cioè quando esse contengono parti doppie. Ora le accennate difficoltà si chiariscono e gli apparenti paradossi si eliminano quando si introduca per le curve doppie il concetto topologico di diramazione negativa.

È precisamente lo scopo di questa Nota l'introdurre ed illustrare questo concetto, con particolare riguardo all'involuppo limite di una curva variabile che si spezzi venendo a contenere una parte doppia.

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Cfr. per esempio O. ZARISKI, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch-curve*. « Am. Journal of Math. », (1929); TURPIN, *On the fundamental group of certain class of plane algebraic curves*. « Am. J. of Math. » (1937).

§ 2. - Prima di iniziare lo svolgimento della trattazione è necessario precisare in qual senso parleremo, in tutta la presente Nota, di « curve doppie » e di loro diramazioni.

L'espressione « curva multipla » può infatti indicare una curva algebrica  $f$  sui punti della quale sia definita una funzione algebrica a più valori; in particolare si può intendere per « curva doppia » una curva  $f$  sui punti della quale sia estratto un radicale quadratico  $z = \sqrt{\varphi}$  (essendo  $\varphi = 0$  una curva di ordine essenzialmente pari); sono allora punti di diramazione della curva doppia tutti i punti di  $f$  per i quali la  $z$  non prende valori funzionalmente distinti, punti che appartengono al gruppo delle intersezioni della  $f$  con la  $\varphi$  e che, come è chiaro, possono essere in numero grande quanto si vuole in dipendenza dell'ordine della  $\varphi$  stessa.

In tutta la presente Nota noi prenderemo invece l'espressione « curva doppia » in un senso diverso: intenderemo cioè con tale espressione una curva  $c$  di ordine  $n$  la quale, contata due volte, si pensi facente parte del limite di una curva variabile  $k$  di ordine  $2n + r$  (con  $r \geq 0$ ). Come è noto <sup>(2)</sup>, l'involuppo di una curva  $k$  d'ordine  $2n + r$  che, variando con continuità venga a spezzarsi nella somma di una curva  $h$ , d'ordine  $r$ , e di una  $c$  d'ordine  $n$ , contata due volte, si compone al limite, oltre che dell'involuppo di  $k$  e di quello di  $c$  contato due volte

a) degli  $nr$  fasci aventi centri nei punti  $Q$  comuni alla  $c$  ed alla  $h$ , ciascuno contato tre volte;

b) di certi fasci aventi come centri certi punti  $P$  di  $c$  dipendenti essenzialmente dal modo come la curva variabile  $k$  viene fatta tendere al limite. Come è chiaro, si può sempre pensare di farla variare in un fascio ottenuto combinando linearmente la curva limite  $c^2 h$  con una curva  $l$  infinitamente vicina; si vede allora che i punti  $P$  vengono ad essere i punti comuni alla  $c$  ed alla  $l$  stessa e quindi sono  $n(2n + r)$ .

In particolare può essere evidentemente  $r=0$ , cioè può  $c^2$  essere limite di una curva variabile  $k$  d'ordine  $2n$ ; in tal caso non si danno punti  $Q$  ed i punti  $P$  sono in numero di  $2n^2$ . In ogni caso diremo che i punti  $P$  sono punti di diramazione della curva doppia  $c^2$  (doppia nel senso che abbiamo ora definito e precisato) con una denominazione che sarà pienamente illustrata e giustificata dall'analisi topologica che faremo nei prossimi paragrafi. Osserviamo intanto qui che essi possono essere considerati visibilmente anche come punti di diramazione di un radicale quadratico  $z = \sqrt{k}$  che può pensarsi estratto sui punti di  $c$ .

Da quanto abbiamo fin qui esposto si potrebbe dedurre che non solo la posizione ma anche il numero delle diramazioni di una curva doppia  $c^2$  dipendano essenzialmente dal modo come la  $c^2$  stessa si ottiene come limite di una curva variabile  $k$ .

(2) Cfr. O. CHISINI, *Sulla riducibilità dell'equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia*. « Rend. Lincei », Serie 5<sup>a</sup> vol. 26.

Vedremo invece come si possa dire che questo non è, in quanto riusciremo a dare un segno alle diramazioni di  $c^2$  in modo che esse, contate col dovuto segno, abbiano sempre un numero complessivo di  $2n^2$ , numero dipendente quindi soltanto dall'ordine della curva  $c$ .

Vogliamo intanto qui rilevare come i risultati noti che abbiamo sopra ricordati, relativi all'involuppo limite di una curva variabile  $k$ , possano a prima vista presentare un aspetto paradossale, in quanto ci si potrebbe aspettare che i fasci aventi centri nei punti  $Q$ , di cui si fa cenno sopra in  $a$ ), si staccassero quattro e non tre volte dall'involuppo limite, in quanto i punti  $Q$  stessi, intersezioni della curva semplice  $h$  e della curva doppia  $c^2$  rappresentano coppie di punti doppi della curva limite complessiva  $c^2h$ . Anche questo apparente paradosso sarà spiegato dall'analisi topologica che inizieremo subito.

§ 3. — Una suggestiva rappresentazione visiva delle curve algebriche piane si ottiene, come è noto, in questo modo <sup>(3)</sup>: data una curva algebrica  $f(x, y) = 0$  si considerino nel piano  $\Pi_x$  della variabile complessa  $x$  i punti  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  radici del risultante  $R(x) = 0$  di  $f(x, y) = 0$  e di  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ . Si stabilisca poi nel piano stesso un sistema di cappii  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  che, partendo da un punto generico  $O$  avvolgano rispettivamente i punti  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  suddetti. Ordinati in qualche modo i cappii  $\gamma_i$ , si faccia percorrere in modo regolare al punto  $x$  la curva  $\Gamma$  somma di tutti i cappii  $\gamma_i$ ; nell'ordine stabilito, ed in corrispondenza si faccia muovere pure in modo regolare il piano  $\Pi_y$  della variabile complessa  $y$  trasladolo secondo la direzione normale alla sua giacitura; i punti  $y_i$  radici dell'equazione  $f(x, y) = 0$  descrivono allora, durante questo movimento, delle linee mutuamente avvolgentisi, costituenti ciò che è stato chiamato <sup>(3)</sup> il « fascio caratteristico » della curva  $f$ . In particolare, detta  $\alpha$  l'ascissa di un punto di diramazione semplice della funzione algebrica  $y(x)$  definita implicitamente dalla  $f(x, y) = 0$ , punto in cui vengano a coincidere due valori  $y_1, y_2$  della  $y(x)$ , quando  $x$  descrive il cappio  $\gamma$  che avvolge  $\alpha$  il doppiino dei fili descritti da  $y_1, y_2$  riceve una torsione di  $1/2$  giro; se  $\alpha$  è l'ascissa di un nodo di  $f$  la torsione è di un giro intero; se  $\alpha$  è ascissa di una cuspidale la torsione è di  $3/2$  giri ecc.

È ora facile verificare che il fascio caratteristico di una curva doppia  $c^2$  si ottiene, per così dire, « raddoppiando » quello di  $c$ ; più precisamente, considerato il fascio caratteristico di una curva  $k$  che, variando per continuità viene a spezzarsi contenendo come parte la  $c$  contata due volte, in posizione molto prossima al limite i fili costituenti il fascio caratteristico di  $c$  sono molto prossimi a coppie di fili di  $k$ , cosicchè il fascio di  $c^2$  risulta composto da doppiini costituiti da fili di  $k$ . Inoltre i punti  $P$ , centri di fasci che si staccano una volta dall'involuppo limite, corrispondono a punti in cui tali doppiini ricevono una torsione di  $1/2$  giro, il che conferma l'opportunità di chia-

(3) Cfr. O. CHISINI, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*, Rend. Ist. Lomb., vol. 66 (1933).

mare tali punti di diramazione di  $c^2$ , in quanto si dà ivi per il fascio caratteristico della  $c^2$  un comportamento topologico del tutto analogo a quello che esiste nei punti di diramazione di una funzione algebrica  $y(x)$ .

Osserviamo ora che, essendo possibile distinguere due versi opposti di percorrenza della curva  $\Gamma$  somma dei cappii  $\gamma_i$  e due versi opposti di movimento del piano  $\Pi_\gamma$  è possibile definire un segno per le diramazioni di una funzione  $y(x)$  come pure per quelle di una curva doppia  $c^2$ . Stabiliremo di dire che la diramazione corrispondente ad un punto  $x = \alpha$  è positiva se descrivendo  $x$  in senso positivo (antiorario) il cappio  $\gamma$  che circonda  $\alpha$ , i due punti del piano  $\Pi_\gamma$  descriventi il doppino che riceve una torsione di  $1/2$  giro in corrispondenza di  $\alpha$  stesso girano in senso pure antiorario attorno al loro baricentro rispetto ad un osservatore che veda il piano  $\Pi_\gamma$  venirgli incontro. È ora facile vedere che tutte le diramazioni della funzione algebrica  $y(x)$  definita da una curva algebrica irriducibile  $f(x, y) = 0$  sono, nel senso che abbiamo testè definito, positive<sup>(4)</sup>. Lo stesso si può dire per le diramazioni di una curva doppia  $c^2$  che cadono nei punti  $P$  di cui sopra; per una tale curva però, come dirà la verifica analitica che faremo subito, si danno anche dei punti in cui la torsione del doppino di fili costituenti il fascio caratteristico è di senso opposto a quello che si ha nei punti  $P$ ; diremo pertanto che in quei punti si ha una « diramazione negativa » della curva doppia  $c^2$ .

§ 4. - Prendiamo dunque in esame il fascio caratteristico di una curva doppia. Sussiste il

TEOREMA: *Nei punti  $Q$  comuni alla parte doppia ed alla parte semplice in cui degenera una curva variabile  $k$  la parte doppia possiede una diramazione negativa (nel senso sopra spiegato).*

Essendo evidentemente il fatto di carattere differenziale lo potremo verificare su di un semplice esempio con la sicurezza che le deduzioni varranno in tutta generalità. Sia  $k$  la cubica variabile nel fascio

$$(1) \quad y^3 + x y^2 = \lambda$$

cubica che al limite per  $\lambda = 0$  si spezza nella retta  $y = 0$  doppia e nella retta  $y = -x$ ; esiste un solo punto  $Q$ , l'origine delle coordinate, e sulla parte doppia non esistono visibilmente al finito altri punti notevoli.

Fissato un valore  $\bar{x}$  di  $x$ , per esempio posto  $\bar{x} = 1$ , è facile vedere che delle tre radici dell'equazione

$$(2) \quad y^3 + \bar{x} y^2 = \lambda$$

due, che chiameremo  $y_1$  ed  $y_2$ , tendono a zero e la terza, che diremo  $y_3$ , tende a  $-\bar{x}$  quando  $\lambda$  tende a zero. Un più preciso esame porta a rappresentare complessivamente  $y_1$  ed  $y_2$  nella forma

$$(3) \quad y = \sqrt{\lambda/\bar{x}} + \dots$$

(4) Cfr. O. CHISINI, *Forme canoniche per il fascio caratteristico di una curva algebrica piana*. « Rend. Ist. Lomb. », vol. 70 (1937).



dove i termini tralasciati sono infinitesimi di ordine superiore ad  $1/2$  rispetto a  $\lambda$ , ed  $y_3$  nella forma

$$(4) \quad y = -\bar{x} + \dots$$

essendo i termini tralasciati infinitesimi con  $\lambda$ .

L'esame delle (3) e (4) porta a concludere che, dato a  $\lambda$  un valore opportunamente piccolo, quando si faccia percorrere ad  $\bar{x}$  il cerchio  $|\bar{x}| = 1$  in senso antiorario, il doppiino di fili descritti da  $y_1$  ed  $y_2$  ha una torsione negativa di  $1/2$  giro mentre il filo descritto da  $y_3$  gira una volta in senso positivo attorno al doppiino stesso.

§ 5. — Dopo quanto abbiamo esposto e la verifica fatta al precedente paragrafo, basta l'osservazione che i punti P in cui una curva doppia  $c^2$  presenta diramazione positiva sono in numero di  $n(2n+r)$  mentre i punti Q in cui presenta diramazione negativa sono  $nr$  per autorizzarci a concludere che

« Il numero delle diramazioni di una curva doppia  $c^2$  di ordine  $n$ , contate col dovuto segno è sempre di  $2n^2$  » ossia che il fascio caratteristico di una curva doppia  $c^2$  è costituito da doppini possedenti sempre in definitiva  $2n^2$  torsioni di  $1/2$  giro.

L'analisi topologica che abbiamo condotta a termine permette poi di render conto della circostanza apparentemente paradossale a cui accennavamo alla fine del § 2: che cioè i fasci aventi centri nei punti Q comuni alla parte semplice ed alla parte doppia in cui si spezza una curva variabile  $k$  si staccino solo tre volte dall'involuppo limite, mentre i punti Q stessi figurano come coppie di punti doppii, della curva limite spezzata. Il fatto è dovuto, come è facile verificare, alla presenza di una diramazione negativa della parte doppia in Q; il che prova come l'introduzione di questo concetto possa servire a spiegare quanto i risultati puramente numerativi lasciano di parzialmente oscuro e di non tranquillizzante.

**Geometria.** — *Sulle curve appartenenti a una superficie generale d'ordine  $n \geq 4$  dell' $S_3$ .* Nota di A. FRANCHETTA, presentata (\*) dal Sócio G. CASTELNUOVO.

In questa Nota mi propongo di dare una dimostrazione algebrico-geometrica del noto teorema di Noether <sup>(1)</sup>, secondo il quale la superficie generale  $F^n$  d'ordine  $n \geq 4$  dello spazio  $S_3$  contiene solo le curve intersezioni complete della superficie stessa con le altre superficie dello spazio; afferma cioè che la base delle curve della superficie è costituita da una sezione piana.

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*. « Berliner Abhandlungen », 1882.

La dimostrazione che Noether ha dato del teorema si basa su un computo di costanti non del tutto soddisfacente. Esso è stato in seguito dimostrato da G. Fano <sup>(2)</sup>, facendo uso delle proprietà degli integrali doppi appartenenti alla superficie; un'altra dimostrazione trascendente è stata data più recentemente da S. Lefschetz <sup>(3)</sup>. La via che mi propongo di seguire è stata già utilizzata in un mio precedente lavoro <sup>(4)</sup> per dimostrare la proprietà analoga delle superficie regolari di genere uno, con curva canonica d'ordine zero (le quali comprendono, in particolare, la superficie del quarto ordine dell' $S_3$ ); precisamente immagino di far variare con continuità la superficie  $F^n$ , facendola tendere al più generale monoide  $\Phi^n$  d'ordine  $n$ . Esso è razionale e si rappresenta sul piano (per proiezione dal punto  $(n-1)$ -plo) in modo che le immagini delle sezioni piane sono le curve di un sistema lineare  $|C^n|$  con  $n(n-1)$  punti base semplici su una  $\Gamma^{n-1}$  fondamentale che risponde, nella rappresentazione piana del monoide, all'intorno del suo punto  $(n-1)$ -plo. La genericità del monoide  $\Phi^n$  si riflette in quella della  $\Gamma^{n-1}$  fondamentale, e del gruppo degli  $n(n-1)$  punti base entro la serie segata su  $\Gamma^{n-1}$  da tutte le curve d'ordine  $n$  del piano.

In questo passaggio al limite le curve della superficie  $F^n$  vanno in determinate curve del monoide  $\Phi^n$ , il quale contiene però anche delle curve che non sono limiti di curve di  $F^n$ . Si dimostra che le curve di  $\Phi^n$  che sono limiti di curve di  $F^n$  sono soltanto quelle che appartengono ai sistemi lineari multipli delle sezioni piane; di qui, adoperando un noto teorema di Severi sull'esistenza delle curve aritmeticamente effettive, si deduce facilmente che le curve di  $F^n$  sono anch'esse multiple delle sezioni piane.

I criteri di cui mi valgo per stabilire che una data curva di  $\Phi^n$  non può essere limite di una curva di  $F^n$  sono i seguenti: *a*) i caratteri aritmetici della curva di  $F^n$  (genere e grado virtuale, ordine proiettivo), sono uguali a quelli della curva limite; *b*) la dimensione di un sistema lineare di  $F^n$  è minore od uguale a quella del sistema (lineare) limite.

Nei primi numeri studio i sistemi lineari di curve del monoide, con particolare riguardo alla loro sovrabbondanza; la conoscenza dei sistemi del monoide permette poi di svolgere le considerazioni accennate.

1. Sia  $\Gamma^{n-1}$  una curva piana di ordine  $n-1$  priva di punti doppi e  $(A_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n(n-1)$ ) il gruppo delle intersezioni di  $\Gamma^{n-1}$  con una curva generica d'ordine  $n$ .

(2) G. FANO, *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme*. «Atti dell'Acc. di Torino», 1908-09. Il lavoro di G. FANO fa seguito a quello di F. SEVERI, *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*. «Rend. Acc. dei Lincei», vol. 15, 1906; in cui è dimostrato che sopra una forma algebrica  $V$  priva di punti multipli dello spazio  $S_r$ , ogni varietà algebrica ad  $r-2$  dimensioni è intersezione completa di  $V$  con un'altra forma.

(3) S. LEFSCHETZ, *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to Abelian varieties*. «Trans. Am. Math. Soc.», 1921. V. anche *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, Parigi, 1924, p. 108.

(4) A. FRANCHETTA, *Sulle superficie regolari di genere uno con curva canonica d'ordine zero*, «Rend. Ist. Lombardo», 1941-42.

Vogliamo anzitutto dimostrare che un sistema lineare irriducibile completo  $|C^N|$  che abbia  $\Gamma^{n-1}$  come curva fondamentale e soltanto i punti base  $A_i$ , coincide con un multiplo del sistema delle  $C^n$  per i punti  $A_i$ .

Sia  $r_i$  la molteplicità del sistema  $|C^N|$  nel punto  $A_i$ . Indichiamo con  $G$  il gruppo di punti segato su  $\Gamma^{n-1}$  da una retta. Si può scrivere allora la relazione di equivalenza lineare

$$\sum_{i=1}^{n(n-1)} r_i A_i \equiv NG.$$

Ma  $(A_i)$  è il gruppo generico della serie  $g_{n(n-1)}$  segata su  $\Gamma^{n-1}$  dalle curve  $C^n$ ; osservando che il gruppo di monodromia di questa serie è il gruppo totale<sup>(5)</sup>, si vede che è possibile far variare con continuità il gruppo dei punti  $A_i$  entro la detta serie, senza che mai due dei suoi punti vengano a coincidere, in modo che ritornando alla posizione di partenza i suoi punti siano permutati in modo qualunque. Per ogni posizione del gruppo esiste un sistema  $|C^N|$  con le molteplicità  $r_i$  nei punti  $A_i$ ; ne deriva che valgono tutte le relazioni

$$(I) \quad \Sigma r_{h_i} A_i \equiv NG$$

ove le  $r_{h_i}$  rappresentano una permutazione qualunque dei numeri  $r_i$ . Le relazioni (I) possono sussistere solo se tutte le  $r_i$  sono uguali fra loro, se cioè il sistema  $|C^N|$  è un multiplo del sistema delle curve  $C^n$  per i punti  $A_i$ . Infatti si possono scegliere fra le (I)  $n(n-1)$  relazioni tali che il determinante dei coefficienti dei punti  $A_i$  sia diverso da zero<sup>(6)</sup>. Moltiplicando le relazioni scelte per interi (positivi o negativi) opportuni, e sommando, si può ottenere una relazione del tipo

$$\rho A_i \equiv \nu G$$

e ciò è assurdo, perchè  $A_i$  è un punto generico della curva.

2. Supponiamo ora di avere un qualsiasi sistema lineare irriducibile  $|C^N|$ , avente soltanto i punti base  $A_i$ , con molteplicità effettiva e virtuale  $r_i$ .

Osserviamo che il sistema  $|C^{N+n-3}|$  ottenuto sommando al sistema dato una curva generica d'ordine  $n-3$  è regolare, poichè esso è l'aggiunto del sistema  $|C^{N+n}|$  ottenuto sommando al sistema  $|C^N|$  il sistema  $|C^n|$  delle curve d'ordine  $n$  per i punti  $A_i$ .

Indichiamo con  $G_b$  il gruppo dei punti segati da una  $C^n$  su  $\Gamma^{n-1}$  fuori dei punti base; e con  $G$  il gruppo segato su  $\Gamma^{n-1}$  da una retta. Sia  $i_i$ ,

(5) Se una curva piana  $C^n$  è priva di punti doppi, è situata rispetto all'asse  $y$  in modo che qualcuna delle tangenti parallele al detto asse non sia di flesso, il gruppo di monodromia della  $g_{n(n-1)}$  segata dalle parallele all'asse  $y$  contiene tutte le composizioni; quindi è il gruppo totale.

(6) Dati  $m$  numeri positivi o nulli  $r_1, \dots, r_m$  non tutti uguali fra loro, si possono sempre scegliere  $m$  permutazioni tali che il loro determinante sia diverso da zero. La proprietà si dimostra facilmente per induzione.

l'indice di specialità del gruppo  $G_h$ . Si consideri il gruppo  $G_h + G$ ; il suo indice di specialità sia  $i_2$ ; il gruppo  $G_h + 2G$  abbia l'indice di specialità  $i_3$ , ecc. Il gruppo  $G_h + (l+1)G$  sia il primo gruppo non speciale.

*Sommando al dato sistema  $|C^N|$  un multiplo conveniente del sistema  $|C^n|$  delle curve d'ordine  $n$  per i punti  $A_i$ , si può ottenere che la sovrabbondanza del sistema somma sia*

$$s \leq i_1 + i_2 + \dots + i_e$$

Supponiamo che dal sistema  $|C^N|$  si possa sottrarre  $k'$  volte il sistema  $|C^n|$ . Consideriamo allora il sistema  $|C^N + (n-3-k')C^n|$ . Da esso si potrà sottrarre  $n-3$  volte il sistema  $|C^n|$ , e quindi anche la curva  $\Gamma^{n-1}$ ; il sistema  $|C^N - (n-3)\Gamma^{n-1}|$  è regolare, perchè si ottiene sommando al sistema  $|C^N + k'C^n|$ , supposto esistente, una curva generica d'ordine  $n-3$ .

La serie segata dal sistema  $|C^N + (n-3-k')C^n|$  sulla  $\Gamma^{n-1}$  è sempre quella individuata dal gruppo  $G_h$ , poichè il sistema  $|C^n|$  ha la  $\Gamma^{n-1}$  come curva fondamentale; essa abbia l'indice di specialità  $i_1$ , e una certa deficienza  $\delta$ ; se si sottrae dal sistema la  $\Gamma^{n-1}$ , il sistema differenza avrà una certa sovrabbondanza  $s_1$ ; fra  $s$  ed  $s_1$ , passa la relazione

$$s = i_1 - \delta + s_1$$

e, quindi, essendo  $\delta \geq 0$ , si avrà

$$s \leq i_1 + s_1$$

La serie segata dal sistema  $|C^N - \Gamma^{n-1}|$ , su  $\Gamma^{n-1}$  è quella individuata dal gruppo  $G_h + G$ , poichè la serie caratteristica virtuale della  $\Gamma^{n-1}$  è quella individuata da  $-G$ ; quindi, detta  $s_2$  la sovrabbondanza del sistema  $|C^N - 2\Gamma^{n-1}|$  si avrà

$$s_1 \leq i_2 + s_2$$

e sommando con la relazione precedente

$$s \leq i_1 + i_2 + s_2$$

Proseguendo, quando avremo sottratto  $v$  volte la  $\Gamma^{n-1}$ , detta  $s_v$  la sovrabbondanza del sistema residuo, si avrà

$$s \leq i_1 + i_2 + \dots + i_v + s_v$$

Ora, per un certo valore  $v = k \leq n-3$ , si ha  $s_k = 0$ , e quindi

$$s \leq i_1 + i_2 + \dots + i_k$$

e a maggior ragione

$$s \leq i_1 + i_2 + \dots + i_e$$

Si noti che questo limite può essere raggiunto. Infatti nel caso che il sistema dato  $|C^N|$  sia multiplo del sistema  $|C^n|$  secondo un fattore  $\rho \geq n-3$  si ha che  $i_1$  è l'indice di specialità della serie nulla, e vale perciò  $\binom{n-2}{2}$ ;  $i_2$



è l'indice di specialità della serie segata dalle rette, ed è quindi uguale a  $\binom{n-3}{2}$ , ecc.; in modo che

$$i_1 + i_2 + \dots + i_h = 1 + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-2}{2} = \binom{n-1}{3}.$$

D'altra parte in questo caso la sovrabbondanza  $s$  del sistema si calcola direttamente, e risulta uguale a  $\binom{n-1}{3}$ .

3. Sia  $F^n$  la superficie generale d'ordine  $n$ ; e  $\bar{C}^N$  una curva tracciata su di essa; vogliamo dimostrare che  $\bar{C}^N$  è linearmente equivalente ad un multiplo della sezione piana  $C^n$ . Attesa la completezza del sistema segato su  $F^n$  dalle superficie di un dato ordine, ciò basterà per asserire che  $\bar{C}^N$  è l'intersezione completa della superficie  $F^n$  con un'altra superficie dello spazio. L'equivalenza di  $\bar{C}^N$  con un multiplo di  $C^n$ , sarà provata se dimostreremo che la curva  $\bar{C}^N + kC^n$  è equivalente ad un multiplo di  $C^n$ .

Nelle considerazioni che seguono saremo quindi liberi di sostituire alla nostra curva  $\bar{C}^N$ , la curva ottenuta sommando ad essa un multiplo di  $C^n$ . Una prima conseguenza, di questa osservazione è che si può supporre che  $\bar{C}^N$  non sia contenuta nel sistema canonico di  $F^n$ .

Siano  $p$  ed  $m$  il genere e il grado di  $\bar{C}^N$ . Le superficie  $F^{n-4}$  segano su  $F^n$  il sistema canonico; e quindi su  $\bar{C}^N$  gruppi residui della serie caratteristica; si ha cioè

$$N(n-4) = 2p - 2 - m.$$

La curva  $\bar{C}^N$  individua su  $F^n$  un sistema lineare  $|\bar{C}^N|$ ; questo darà sul monoide  $\Phi^n$  un determinato sistema limite  $|C^N|$  di curve dello stesso ordine  $N$ ; e quest'ultimo si rappresenta sul piano con un sistema lineare  $|C^N|$  di curve di ordine  $N$ , eventualmente riducibile nella curva  $F^{n-1}$ , contata un certo numero di volte, e in un sistema residuo. Ad ogni modo, calcolando i caratteri del sistema complessivo rispetto al gruppo  $(A_i)$  dei punti base e indicando con  $r_i$  la molteplicità virtuale del sistema nel punto  $A_i$ , si avrà

$$2p - 2 = N(N-3) - \sum r_i(r_i - 1)$$

$$m = N^2 - \sum r_i^2$$

Le sezioni della superficie  $\Phi^n$  con le superficie  $F^{n-4}$ , sono rappresentate sul piano dal sistema  $|(n-4)C^n|$ . Si ha dunque

$$N(n-4)n - (n-4)\sum r_i = N(N-3) - \sum r_i(r_i - 1) - N^2 + \sum r_i^2$$

da cui

$$N(n-1) = \sum r_i$$

la quale esprime che il sistema  $|C^N|$  ha la  $F^{n-1}$  come curva virtualmente fondamentale.

La dimensione del sistema  $| \bar{C}^N |$ , individuato dalla curva  $\bar{C}^N$  su  $F^n$ , per il teorema di Riemann-Roch, è

$$r \geq p_a + m - p + 1$$

ovè  $p_a = \binom{n-1}{3}$  è il genere aritmetico della superficie  $F^n$ ,

Ora  $m - p + 1$  rappresenta la dimensione virtuale del sistema di curve  $| C^N |$ . Ne segue che *se il sistema  $| C^N |$  è la rappresentazione piana di un sistema lineare di  $\Phi^n$ , il quale sia limite di un sistema lineare di  $F^n$ , esso ha la sovrabbondanza  $s \geq \binom{n-1}{3}$ .*

Ciò posto, se  $| C^N |$  è irriducibile, in base al lemma del n. 1, si può senza altro affermare che esso coincide con un multiplo del sistema  $| C^n |$ . Ma allorchè  $F^n$  tende al monoide  $\Phi^n$  può accadere che il sistema lineare,  $\bar{C}^N$  di  $F^n$  tenda ad un sistema  $| C^N |$  che abbia il punto  $(n-1)$ -plo di  $\Phi^n$  come punto base, e contenente qualcuna delle rette del monoide come parte fissa. Ciò porterebbe che il sistema  $| C^N |$  che rappresenta sul piano il sistema limite, sarebbe formato: da un sistema irriducibile  $| C^\mu |$ , con molteplicità  $\sigma_i$  nei punti  $A_i$ ; dalla curva fondamentale  $\Gamma^{n-1}$ , contata  $\rho$  volte; e dagli intorni di alcuni dei punti base  $A_i$ , contati  $t_i$  volte:

$$| C^N | = | C^\mu | + \rho \Gamma^{n-1} + \sum t_i A_i$$

e quindi  $r_i$ , molteplicità virtuale del sistema  $| C^N |$  in  $A_i$ , sarebbe

$$r_i = \sigma_i + \rho - t_i$$

Orà vogliamo dimostrare che, per il fatto che la sovrabbondanza del sistema  $| C^N |$  è  $\geq \binom{n-1}{3}$ , il sistema  $| C^N |$  completo coincide sempre con un multiplo del sistema  $| C^n |$ . Lo scopo sarà raggiunto se dimostreremo che, sommando a  $| C^N |$  un multiplo conveniente di  $| C^n |$ , il sistema  $| C^\mu |$  si amplia sommandogli la curva  $\Gamma^{n-1}$ , contata  $\rho$  volte, e gli intorni dei punti base  $A_i$ , contati  $t_i$  volte. Ciò si dimostra con le seguenti osservazioni:

1° Scegliendo opportunamente  $l$  si può ottenere che il sistema  $| C^\mu + l C^n |$  si amplii aggiungendogli l'intorno del punto  $A_i$ , contato  $t_i$  volte. Infatti, se il sistema non si ampliasse, si avrebbe che quando si fosse imposto alle curve di ordine  $\mu + l n$  di avere nei punti di  $(A_i)$  la molteplicità  $\sigma_i - t_i + l$  esse verrebbero ad avere invece nel punto  $A_i$  la molteplicità  $\sigma_i + l$ ; cioè che le condizioni che occorrerebbe imporre alle dette curve perchè il punto  $A_i$  avesse per esse la molteplicità  $\sigma_i + l$  in luogo di  $\sigma_i - t_i + l$ , sarebbero conseguenza delle condizioni già imposte. Allora la sovrabbondanza del sistema  $| C^\mu + l C^n |$  dovrebbe superare il numero di quelle condizioni che è

$$\frac{(\sigma_i + l)(\sigma_i + l + 1)}{2} - \frac{(\sigma_i - t_i + l)(\sigma_i - t_i + l + 1)}{2} = t_i \sigma_i + t_i l - \frac{t_i(t_i - 1)}{2}$$

Ciò è assurdo perchè questo numero cresce indefinitamente con  $l$ ; mentre la sovrabbondanza del sistema, come si è visto, è limitata.

2° Si può quindi supporre che

$$|C^N| = |C^\mu| + \rho \Gamma^{n-1}$$

Siccome  $|C^N|$  deve avere la  $\Gamma^{n-1}$  come curva (virtualmente) fondamentale, e la  $\Gamma^{n-1}$  ha il grado  $-(n-1)$ , si ha che il numero delle intersezioni di una  $C^\mu$  con  $\Gamma^{n-1}$  fuori dei punti fondamentali è  $h = (n-1)\rho$ . Supponiamo, per assurdo, che il sistema  $|C^\mu|$  non si ampli aggiungendogli la curva  $\rho \Gamma^{n-1}$ . Indicando con  $D$  la dimensione virtuale del sistema  $|C^N|$ , con  $S$  la sua sovrabbondanza; con  $d$  la dimensione virtuale del sistema  $|C^\mu|$  e con  $s$  la sua sovrabbondanza, per ipotesi si ha

$$D + S = d + s$$

L'indice di specialità della serie  $g_{\rho(n-1)}$  segata da  $|C^\mu|$  su  $\Gamma^{n-1}$  non può superare l'indice di specialità della serie segata su  $\Gamma^{n-1}$  dalle curve di ordine  $\rho$  (7).

Si ha quindi (con le notazioni del n. 2)

$$i_1 \leq \binom{n-\rho-2}{2}$$

Analogamente

$$i_2 \leq \binom{n-\rho-3}{2}$$

ecc. per modo che

$$s \leq 1 + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-\rho-2}{2} = \binom{n-\rho-1}{3}$$

d'altra parte è  $S \geq \binom{n-1}{3}$ ; quindi

$$D + \binom{n-1}{3} \leq d + \binom{n-\rho-1}{3}$$

da cui

$$d - D \geq \binom{n-1}{3} - \binom{n-\rho-1}{3}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} d - D &= \frac{\mu(\mu+3)}{2} - \frac{\sum \sigma_i(\sigma_i+1)}{2} - \frac{N(N+3)}{2} + \\ &+ \frac{\sum r_i(r_i+1)}{2} = \frac{\rho(n-1)(n-\rho-3)}{2} \end{aligned}$$

risulterebbe dunque

$$\rho^2 + 3\rho + 2 \leq 0$$

e ciò è assurdo.

(7) NOETHER, loc. cit.

Si conclude che il sistema  $|C^N|$ , reso completo, è irriducibile e, avendo la  $\Gamma^{n-1}$  come curva fondamentale, per il lemma del n. 1, coincide con un multiplo di  $|C^n|$ .

4. Sia  $\bar{C}^N$  una curva di  $F'$ ; per quanto si è detto si può trovare un multiplo della sezione piana,  $k\bar{C}^n$ , in modo che i limiti su  $\Phi'$  del sistema  $|C^N|$  e del sistema  $|k\bar{C}^n|$  stiano in uno stesso sistema lineare, che è precisamente il sistema  $|kC^n|$ , multiplo secondo  $k$  delle sezioni piane. Ciò porta che anche su  $F'$ ,  $|kC^n|$  e  $|\bar{C}^N|$  stanno in un sistema lineare. Infatti si consideri la differenza  $C^N - k\bar{C}^n$ ; i caratteri aritmetici di questa curva virtuale sono gli stessi di quelli della curva limite, che è la curva d'ordine zero su  $\Phi'$ ; indicando con  $\pi$  e  $\nu$  il genere e il grado di  $\bar{C}^N - k\bar{C}^n$  si ha dunque

$$\pi = 1, \quad \nu = 0$$

la dimensione virtuale del sistema  $|\bar{C}^N - k\bar{C}^n|$  è data da

$$d = p_n + \nu - \pi + 1 - i = \binom{n-1}{3} - i$$

ove  $i$  è il numero delle curve effettive linearmente indipendenti del sistema  $|L| = |C^N - k\bar{C}^n - (n-4)\bar{C}^n|$ , poichè  $(n-4)\bar{C}^n$  è il sistema canonico di  $F'$ . Una limitazione superiore per  $i$  si ottiene calcolando la dimensione del sistema  $|L|$ , limite di  $|L|$  su  $\Phi'$ . Siccome, su  $\Phi'$ ,  $C^N \equiv kC^n$ , si ha  $|L| = |n-4|C^n|$  e quindi  $i \leq \binom{n-1}{3}$ ; ne segue che  $d \geq 0$  e la curva  $\bar{C}^N - k\bar{C}^n$  è aritmeticamente effettiva. A norma di un teorema di Severi<sup>(8)</sup> si può concludere allora che  $\bar{C}^N \equiv k\bar{C}^n$ ; e, per quanto si è detto al principio del n. 3, questa relazione prova il teorema di Noether.

**Geometria algebrica.** — *Sulle curve sghembe di residuale uno.*  
Nota di F. GAETA<sup>\*</sup>, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. CASTELNUOVO.

Nelle lezioni di seminario all'Istituto di Alta Matematica 1946-47 il prof. Severi ha posto il concetto di *residuale d'una curva algebrica sghemba irriducibile priva di punti multipli*, così: Chiamata curva di residuale zero un'intersezione semplice completa di due superficie irriducibili, priva di punti multipli, una curva  $C$  di residuale  $p > 0$  è tale che per essa possono condursi due convenienti superficie, segantisi semplicemente in  $C$  e altrove, pure semplicemente, in una curva  $C$ , irriducibile, priva di punti multipli, di residuale  $p - 1$ .

(8) F. SEVERI, « Rend. Istituto Lombardo », 1905.

<sup>\*</sup> Borsista spagnolo presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.



Le curve di cui trattasi son supposte irriducibili e prive di punti multipli (sia la  $C$ , che la  $C_1$ , perchè, se non si pongon queste condizioni (che son poi quelle veramente interessanti per la classificazione delle famiglie di curve sghembe), ogni curva sghemba è di residuale uno, in quanto può considerarsi come differenza di due intersezioni complete (riducibili e dotate di punti multipli) <sup>(1)</sup>.

Il prof. Severi ha poi proposto di cercare quali sono le curve sghembe di residuale finito (s'esse non sono tutte).

In questa Nota dò una caratterizzazione delle curve sghembe di residuale 1, dimostrando che:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva sghemba  $C$ , irriducibile, priva di punti multipli, sia di residuale 1, è che l'ideale dei polinomii nulli semplicemente lungo  $C$  ammetta una base formata da 3 polinomii.*

1. Sia dunque  $C + C_1$  intersezione semplice completa delle superficie:

$$(1) \quad f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0 .$$

La  $C_1$ , come intersezione completa, è sottocanonica, epperò  $C$  è intersezione semplice completa delle  $f_1, f_2$ , e di un'altra superficie

$$f_3 = 0$$

d'ordine  $n_3$ , in guisa che le superficie d'ordine  $n_3$ , passanti per  $C$  segano su  $C_1$ , fuori di  $(C, C_1)$  la serie zero <sup>(2)</sup>.

Sia  $f = 0$  una superficie d'ordine  $m$  qualunque contenente  $C$ . Dimostriamo che  $f$  può esprimersi sotto la forma:

$$(2) \quad f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 .$$

Infatti, se  $m < n_3$ , la  $f = 0$  contiene anche  $C_1$ , giacchè essa ha con  $C_1$  più punti di quelli che ammette il teorema di Bézout. Quindi  $f = 0$  passa per  $C + C_1$ , epperò notoriamente:

$$f = h_1 f_1 + h_2 f_2 .$$

Se  $m = n_3$  ed  $f = \lambda f_3$  (con  $\lambda$  costante), la (2) è senz'altro soddisfatta. Se infine  $m \geq n_3$  e  $f = 0$  è diversa dalla  $f_3 = 0$ , la  $f = 0$  sega su  $C_1$ , fuori del gruppo  $(C, C_1)$ , un gruppo  $G$  (nullo per  $m = n_3$ ). Siccome  $C_1$  è intersezione completa, esiste una superficie  $h_3 = 0$  d'ordine  $m - n_3$ , segante  $C_1$  nello

<sup>(1)</sup> Ved. le lezioni di F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* a cura di F. CONFORTO e di E. MARTINELLI, Roma, Ed. Cremonese, 1942), p. 47.

<sup>(2)</sup> Ved. le Note seguenti di G. GHERARDELLI, *Sulle curve sghembe algebriche intersezioni semplici complete di due superficie*, («Atti dell'Accademia d'Italia», 1942, vol. IV, fasc. 6, p. 128); *Sulle curve sghembe algebriche intersezioni semplici complete di tre superficie*, («Atti dell'Acc. d'Italia», 1943, vol. IV, fasc. 12, p. 460). Ved. pure per talune posizioni generali del problema: F. SEVERI, *Ueber die Darstellung algebraischer Mannigfaltigkeiten als Durchschnitte von Formen*, «Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität», Bd. 15, 1943, p. 97.

stesso gruppo  $G$  ( $h_3$  deve sostituirsi con una costante non nulla se  $G \equiv 0$ ). Le due superficie d'ordine  $m$ ,  $f = 0$  e  $h_3 f_3 = 0$ , passanti per  $C$ , generano un fascio. Si può dunque scegliere un  $\lambda$  tale che:

$$(3) \quad f - \lambda h_3 f_3 = 0$$

passi per  $C_1$ , bastando imporre il passaggio per un punto  $P$  generico di  $C_1$ ; che, si ricordi, è irriducibile. Così la (3) contiene tutta la curva  $C + C_1$ , epperò è:

$$f - \lambda h_3 f_3 = h_1 f_1 + h_2 f_2, \quad \text{cioè } f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \lambda h_3 f_3,$$

come volevamo dimostrare.

2. Reciprocamente, se l'ideale dei polinomi nulli semplicemente sulla curva sghemba irriducibile  $C$ , priva di punti multipli, ammette la base  $(f_1, f_2, f_3)$ ,  $C$  ha il residuale 1.

Suppongasi che i gradi  $n_1, n_2, n_3$  di  $f_1, f_2, f_3$ , sieno in ordine non crescente  $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ . Si dimostra allora subito che  $f_3$  è irriducibile.

Vi è inverò una sola parte  $\varphi_3$  di  $f_3$  passante per  $C$  (chè altrimenti  $f_3$  non passerebbe semplicemente per  $C$ ) e siccome  $\varphi_3$  deve appartenere all'ideale  $(f_1, f_2, f_3)$ , ne segue che  $\varphi_3$  differisce da  $f_3$  per una costante non nulla.

Ma allora, se pur  $f_2$  è riducibile (non contenente in ogni caso  $f_3$ ), si può sostituire ad  $f_2$  una combinazione lineare  $\bar{f}_2$  di  $f_2$  e di  $h_3 f_3$  ( $h_3$  polinomio generico di ordine  $n_2 - n_3$ ), in guisa che  $\bar{f}_2$  sia irriducibile<sup>(3)</sup> e come base del modulo si può assumere  $(f_1, \bar{f}_2, f_3)$ . Se poi  $f_1$  è riducibile si può sostituire ad  $f_1$  una combinazione lineare  $\bar{f}_1$  di  $f_1, h_2 \bar{f}_2, h_3 f_3$  ( $h_2, h_3$  polinomi generici di ordini  $n_1 - n_2, n_1 - n_3$ ), in guisa che  $\bar{f}_1$  sia irriducibile, anzi che seghi  $\bar{f}_2$ , fuori di  $C$ , lungo una curva  $C_1$  irriducibile priva di punti multipli<sup>(4)</sup>. Avremo così la nuova base  $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, f_3)$ , che continueremo a chiamare  $(f_1, f_2, f_3)$ , partendo da essa in luogo dell'iniziale.

In virtù d'un teorema di Gherardelli<sup>(5)</sup>  $C_1$  è sottocanonica. D'altronde le superficie d'ordine  $n_3 + m$  passanti per  $C$  sono aggiunte alla  $C_1$ ; epperò segano su  $C_1$ , fuori di  $(C, C_1)$ , una serie completa. Sia  $G$  un gruppo di questa serie e  $f = 0$  una superficie d'ordine  $n_3 + m$ , passante per  $C$ , che lo stacchi su  $C_1$ . Per ipotesi è

$$f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3.$$

Quest'equazione mostra che l'aggiunta spezzata

$$h_3 f_3 = 0$$

stacca su  $C_1$  lo stesso gruppo  $G + (C, C_1)$  che la  $f = 0$ . Orbene,  $f_1 = 0$  sega su  $C_1$  il gruppo  $(C, C_1)$  e quindi la superficie  $h_3 = 0$ , d'ordine  $m$ , sega il

(3) Ciò in virtù di un classico teorema di BERTINI sui possibili spezzamenti delle superficie di un sistema lineare.

(4) E ciò pei teoremi di BERTINI trasportati ai sistemi lineari di curve sopra una superficie.

(5) Ved. la seconda Nota citata.

gruppo  $G$ . Siccome l'intero  $m$  è arbitrario, ne segue che le forme di ogni ordine comunque prefissato segano su  $C_1$  serie complete; e siccome  $C_1$  è sottocanonica, concludiamo con Gherardelli (prima Nota citata) che  $C_1$  è intersezione completa di due superficie e il teorema è dimostrato.

Si osserverà che le curve di residuale uno non esauriscono le intersezioni semplici complete di tre superficie, perchè tra queste, come risulta dal secondo lavoro citato di Gherardelli, ve ne sono di quelle che hanno per residuo, rispetto a due delle tre superficie, curve sottocanoniche, che non sono intersezioni complete.

**Meccanica.** — *Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli*<sup>(\*)</sup>.  
Nota I di G. SUPINO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. SIGNORINI.

1. *L'analisi dimensionale* è frequentemente esposta secondo un procedimento puramente *induttivo*.

L'affermazione usuale<sup>(1)</sup> è infatti la seguente:

*Supponiamo di sapere* che in un certo problema fisico la grandezza  $y$  sia funzione delle sole grandezze  $q_1 \dots q_n$  (variabili o costanti) tutte di dimensioni differenti e di  $m$  parametri di dimensioni nulle  $a_1 \dots a_m$  (tra i quali possiamo includere i rapporti di altre grandezze  $q_{n+1} \dots q_{n+h}$  a grandezze della stessa loro dimensione già elencate nelle  $q_n$ ); In questa ipotesi si può sempre scrivere, scelte  $p$  grandezze fondamentali, dimensionalmente indipendenti ( $p < n$ )

$$(1) \quad y = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \dots q_p^{\alpha_p} \cdot \varphi(N_{p+1} \dots N_n; a_1 \dots a_m)$$

essendo

$q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_p^{\alpha_p}$  dimensionalmente omogeneo con  $y$ ,  
 $\varphi$  simbolo di funzione di  $N_{p+1} \dots N_n; a_1 \dots a_m$

$$N_{p+1} = \frac{q_{p+1}}{q_1^{\pi_1} q_2^{\pi_2} \dots q_p^{\pi_p}}; \dots; N_n = \frac{q_n}{q_1^{\nu_1} \dots q_p^{\nu_p}}$$

con

$q_1^{\pi_1} \dots q_p^{\pi_p}$  monomio dimensionalmente omogeneo con  $q_{p+1}$ ,  
 $q_1^{\nu_1} \dots q_p^{\nu_p}$  dimensionalmente omogeneo con  $q_n$ .

Questa affermazione presuppone:

1° che le dimensioni di una grandezza fisica possano sempre porsi sotto la forma  $[q] = [q_1]^{\lambda_1} [q_2]^{\lambda_2} \dots [q_p]^{\lambda_p}$ , cioè che al variare delle unità di misura  $u$  delle grandezze fondamentali  $q_1 \dots q_p$  la unità di misura delle unità

(\*) Da una Comunicazione al Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) Cfr. per esempio P. STRANEO, *Teoria generalizzata delle dimensioni delle grandezze fisiche*. «Nuovo Cimento», 1940 (vol. XVII della nuova serie).

derivate vari in modo che sia  $u = u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_p^{\lambda_p}$  ciò che è verificato finora per tutte le grandezze note, ma non è dimostrato in generale <sup>(2)</sup>.

2° che valga il teorema di Riabuciski-Buckingham (o teorema  $\pi$ ) conseguenza a sua volta del principio di omogeneità).

Il procedimento, si è detto, ha carattere induttivo perchè non si vede come si possa *sapere* che una grandezza fisica  $y$  dipenda dalle *sole* grandezze  $q_1 \dots q_n$  (tra le quali vi sono delle costanti che non variano con l'esperienza e dei legami che l'esperienza non precisa <sup>(3)</sup>) e dei *sol*i numeri  $a_1 \dots a_m$ , e perchè se non è stata costruita una teoria del fenomeno l'applicazione del teorema  $\pi$  può non essere legittima. Infatti la dimostrazione di questo teorema esige:

a) che si parta da un sistema di equazioni dimensionalmente omogeneo nelle  $y, q_1, q_2 \dots q_n$  (senza che, del resto, sia necessaria alcuna restrizione di carattere analitico);

b) che questo sistema ammetta una soluzione determinata. Si deduce quindi che la formula risolutiva è dimensionalmente omogenea, e che non è necessario utilizzare altre condizioni sicchè si è in grado di fare l'elenco di *tutte e sole* le grandezze che intervengono nel fenomeno <sup>(4)</sup>; in queste condizioni la formula (I) si deduce *logicamente* <sup>(5)</sup>.

Si osservi peraltro che, poste le condizioni a) e b) la (I) *contiene* la soluzione del problema; ma non è detto che tale soluzione esista né si può

(2) Fissata una scelta di grandezze fondamentali (per esempio nel campo meccanico  $L, M, T$ ) si può osservare che tutte le grandezze meccaniche derivate *finora note* sono legate alle grandezze fondamentali con «esponenti di dimensione». - Cioè, si può scrivere in generale  $[q] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$ . - Si può inoltre dimostrare che una espressione dello stesso tipo vale quando al posto di  $L, M, T$ , si scelgano come grandezze fondamentali tre grandezze arbitrarie purchè tra loro indipendenti. Non è invece dimostrato che qualunque grandezza derivata che possa esser necessario introdurre in futuro possa sempre rappresentarsi nella forma  $[q] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$ .

(3) Per esempio: anche se l'esperienza facesse rilevare che in un dato fenomeno ha importanza il peso specifico e la costante di gravità, non potremmo sapere se queste due grandezze intervengono indipendentemente o soltanto attraverso la densità, e mentre nel primo caso dovremmo introdurre nel computo due grandezze dimensionali nel secondo ne comparirebbe una sola. Ancora: l'esperienza mostra che la deformazione di una trave dipende dalla sua larghezza e dalla sua altezza: come possiamo sapere che dipende *soltanto* dal modulo di resistenza se questa posizione non viene suggerita da una teoria?

(4) Se la soluzione non fosse determinata si renderebbe necessario aggiungere altre condizioni che è da aspettarsi richiederebbero l'introduzione di nuove grandezze; non sembra invece che le nuove equazioni possano essere non omogenee (ciò che pure porterebbe alla caduta del teorema  $\pi$ ) perchè si ammette il principio di omogeneità; ma dire che un sistema è non omogeneo o dire che richiede l'introduzione di altre grandezze per essere omogeneizzato è la stessa cosa.

(5) Questa impostazione è dovuta ad E. FOÀ, *Sulle basi dell'analisi dimensionale*. «L'industria», 1928. La dimostrazione del teorema  $\pi$  è stata generalizzata da B. LEVI, *Dimostrazione di una formula fondamentale nella teoria delle dimensioni fisiche*. «Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna», 1931-1932 (Classe di Scienze Fisiche-Sezione di Sc. Fisiche e Mat.). Ho sostituito la condizione di soluzione determinata a quella di soluzione unica per includere i problemi non lineari.



affermare che la (4) non includa altre soluzioni deducibili con criteri e teorie diverse. Ed è appunto a questa questione (con particolare riferimento alle trasformazioni modello-originale) che è dedicato il presente lavoro.

2. Acquisita la formula espressa dal teorema  $\pi$

$$(1) \quad y = q_1^{\alpha_1} \cdots q_p^{\alpha_p} \varphi(N_{p+1} \cdots N_n; a_1 \cdots a_m)$$

(formula a carattere *deduttivo* se ci si pone nelle condizioni precisate più sopra, a carattere *induttivo* se si parte soltanto dall'ipotesi che la  $y$  dipenda esclusivamente dalle grandezze  $q_1 \cdots q_n$  e dai rapporti  $a_1 \cdots a_m$ ) la  $\varphi$  si può determinare in generale soltanto con l'esperienza. Nel caso poi dei modelli non è nemmeno necessario conoscere la  $\varphi$ . Basta considerare un « modello » nel quale  $N_{p+1} \cdots N_n; a_1 \cdots a_m$  abbiano gli stessi valori che nell'« originale »; determinata la  $y$  nel modello si può risalire alla  $y$  dell'originale, perchè la  $\varphi$  ha lo stesso valore nei due casi: pertanto

$$(2) \quad \left[ \frac{y}{q_1^{\alpha_1} \cdots q_p^{\alpha_p}} \right]_M = \left[ \frac{y}{q_1^{\alpha_1} \cdots q_p^{\alpha_p}} \right]_0$$

Le questioni che intendo risolvere sono le seguenti:

1° Può accadere che esistano più « teorie » (cioè più sistemi completi di equazioni che determinano la soluzione per uno stesso fenomeno fisico) che pur essendo tra loro indipendenti (o anche contraddittorie) portino alla stessa trasformazione modello-originale? La risposta è affermativa.

2° La determinazione sperimentale della  $\varphi$  permetta di constatare che essa funzione dipende effettivamente soltanto dai numeri  $N_{p+1} \cdots N_n; a_1 \cdots a_m$ ; costituisce questa constatazione una verifica sperimentale della « teoria » in base alla quale è stata dedotta la (1)? La risposta è negativa. Ed ecco le dimostrazioni.

3. Per quello che si riferisce alla prima questione basterà presentare alcuni esempi.

Consideriamo una trave rettilinea di lunghezza  $l$  e sezione rettangolare di lati  $b$  e  $h$ , appoggiata agli estremi, soggetta ad un carico  $P$  concentrato in mezzaria. Secondo la teoria delle travi inflesse, nota dalla Scienza delle costruzioni, *se si vuol tener conto anche della deformazione dovuta al taglio*, la freccia  $f$  in mezzaria dipende da  $l, b, h, P, E$  (modulo di elasticità) e dal parametro  $m$  (poichè occorre considerare oltre ad  $E$  anche  $G = \frac{Em}{2(m+1)}$ ). Pertanto l'applicazione del teorema  $\pi$  porta a scrivere

$$(3) \quad f = l \varphi \left( \frac{P}{El^2}, \frac{b}{l}, \frac{h}{l}, m \right).$$

Si osserverà che questa stessa espressione vale quando si voglia applicare invece della teoria delle travi inflesse la teoria della elasticità od anche la teoria delle deformazioni elastiche finite (almeno in qualche suo aspetto

particolare). Si potrebbe sostenere che le tre teorie costituiscono dal punto di vista meccanico una sola teoria; che cioè quando gli spostamenti sono molto piccoli la teoria delle deformazioni finite si riconduce alla teoria matematica della elasticità e quando la trave è sottile divengono legittime le semplificazioni della teoria delle travi inflesse. Occorre perciò considerare un esempio diverso e questo si trova proprio nella teoria delle deformazioni finite.

È noto che in questa il potenziale elastico non è determinato senz'altro e che si possono legare in vari modi (tutti meccanicamente corretti) le componenti di tensione con «le caratteristiche dello spostamento inverso».

Il legame generale dato da Almansi <sup>(6)</sup> è il seguente:

$$(4) \quad \begin{cases} \tau_{xx} = \frac{1}{1+\theta} (L + M\varepsilon_{xx} + N\pi_{xx}) & \tau_{yy} = \dots, \tau_{zz} = \dots \\ \tau_{yz} = \frac{1}{1+\theta} (M\varepsilon_{yz} + N\pi_{yz}) & \tau_{zx} = \dots, \tau_{xy} = \dots \end{cases}$$

essendo  $L, M, N$  tre funzioni degli invarianti di deformazione

$$\xi = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad \eta = \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}, \quad \zeta = \varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx} + \varepsilon_{zx}\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz},$$

ed inoltre:

$$\begin{aligned} \theta &= (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \quad ; \quad 1+a_1 = \sqrt{\frac{1}{1-2\varepsilon_{xx}}}, \quad 1+a_2 = \dots \\ \pi_{xx} &= \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 \\ \pi_{yz} &= \varepsilon_{xy}\varepsilon_{zx} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zy} + \varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz} \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad \varepsilon_{yy} = \dots, \varepsilon_{yz} = \dots \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\}, \dots \end{aligned}$$

Ora si può supporre, seguendo l'Almansi:

$$L = c\theta = \frac{E\theta}{m-2}, \quad M = \frac{Em}{m+1}, \quad N = 0$$

e allora il legame tra tensioni e caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso è dato da

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{Em}{(m+1)(1+\theta)} \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{\theta}{m-2} \right], \quad \tau_{yy} = \dots, \tau_{zz} = \dots \\ \tau_{yz} &= \frac{Em}{(m+1)(1+\theta)} \varepsilon_{yz}, \quad \tau_{zx} = \dots, \tau_{xy} = \dots \end{aligned}$$

(6) E. ALMANZI, *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », Nota I (1° semestre 1911) e Note 2 e 3 (2° semestre 1911).

le quali, come ha mostrato l'Almansi stesso, danno certamente luogo ad una forma definita positiva del potenziale elastico; oppure porre come ha fatto il Signorini (7)

$$\tau_{xx} = \frac{Em}{(m+1)(m-2)} \left\{ \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} - \left( \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{xx} [m-2 + m(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \right\} \\ \tau_{yy} = \dots, \tau_{zz} = \dots$$

$$\tau_{yz} = \varepsilon_{yz} \left\{ \frac{Em}{m+1} + \frac{2Em^2}{(m+1)(m-2)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right\} \\ \tau_{zx} = \dots, \tau_{xy} = \dots$$

che pure danno luogo ad una forma definita positiva del potenziale elastico, come egli stesso ha dimostrato.

Il legame tra deformazione e tensione include nei due casi le stesse grandezze dimensionali. Quindi il passaggio modello-originale si compie nei due casi allo stesso modo, pure essendo le due teorie differenti tra loro (e anzi *contraddittorie* in quanto il legame tra tensioni e deformazioni se è dell'un tipo non può essere dell'altro). Si deve pure rilevare che i risultati qualitativi e quantitativi sono notevolmente differenti (8). Naturalmente queste differenze potrebbero esser rilevate sperimentalmente; ciò non è affatto in contrasto con le osservazioni precedenti con le quali si nega soltanto che tale diversità possa essere messa in luce nel passaggio modello-originale, passaggio che avviene legittimamente e con le stesse condizioni nelle due teorie.

(7) Si veda A. SIGNORINI, *Deformazioni elastiche finite elasticità di 2° grado.* « Atti del 2° Congresso dell'Unione Mat. Italiana », Bologna, 1940.

(8) Ciò è manifesto per esempio in un caso particolare. Consideriamo una sfera compressa uniformemente: deve essere  $u = \lambda x, v = \lambda y, w = \lambda z$ . Segue  $\varepsilon_{xx} = \frac{\lambda}{2}(2-\lambda) = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$  ;  $1 + a_1 = \frac{1}{1-\lambda}$  ,  $\theta = \frac{1}{(1-\lambda)^3}$ .

Quindi la soluzione Almansi dà:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \frac{Em}{m+1} \left\{ \frac{\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)^3}{2[(1-\lambda)^3+1]} + \frac{1}{(m-2)(1-\lambda)^3} \right\} \\ (\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0).$$

La soluzione Signorini porta a

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \frac{Em}{m+1} \left\{ \frac{3\lambda(2-\lambda)}{2(m-2)} - \frac{9\lambda^2(2-\lambda)^2}{16(m-2)} + \frac{\lambda}{2}(2-\lambda) \left[ 1 + \frac{m}{m-2} \frac{3\lambda(2-\lambda)}{2} \right] \right\}.$$

Poichè  $a_1$  può variare da  $-1$  a  $+\infty$  (in quanto la lunghezza può ridursi a zero o

4. Vediamo qualche conseguenza dei risultati precedenti. Supponiamo di avere sperimentato su un modello di trave per conoscerne la freccia sotto un carico concentrato in mezzaria. In base alla (3) risaliamo all'originale. Possiamo dire che il risultato è ottenuto con riferimento alla teoria delle travi inflesse? *Evidentemente no*; il risultato è *più preciso* in quanto la stessa relazione « modello-originale » vale anche nel campo della teoria matematica della elasticità e in almeno due teorie delle deformazioni finite<sup>(9)</sup>. A rigore potremmo limitarci a considerare queste ultime escludendo la teoria delle travi e la teoria matematica della elasticità che appaiono come teorie approssimate di quelle delle deformazioni finite, per quanto si possa osservare che tali appaiono oggi, ma che ai tempi di Eulero l'esperienza sarebbe stata riferita alla teoria delle travi e Navier l'avrebbe detta conseguenza della teoria dell'elasticità.

Comunque, fatta l'esperienza su un modello e passati da questo all'originale, noi *non sappiamo in base a quale teoria* sia avvenuto il passaggio. Esso è valido per tutte le teorie che comprendono lo stesso numero di grandezze fisiche quando queste abbiano le stesse dimensioni. Possiamo dire, con linguaggio geometrico, che tutte queste teorie ammettono lo stesso « gruppo » di trasformazioni modello-originale.

Si potrebbe forse obiettare che se anche nel campo delle deformazioni elastiche finite possono coesistere due teorie differenti con le stesse grandezze dimensionali, d'altra parte il valore numerico delle grandezze costanti (cioè  $E$  ed  $m$ ) possa essere diverso se determinato in base alla prima teoria invece che con la seconda. Ma questa obiezione non regge perchè la determinazione numerica usuale di  $E$  ed  $m$  è eseguita considerando piccole deformazioni (nel qual caso le due teorie coincidono tra loro e con la teoria matematica della elasticità).

crescere fino all'infinito) così  $\lambda = \frac{a_1}{1 + a_1}$  può variare da  $-\infty$  ad 1. Se ogni lunghezza raddoppia ( $a_1 = 1$ ) allora  $\lambda = 1/2$  e quindi

$$[\tau_{xx}]_{Al} = \frac{Em}{m+1} \left\{ \frac{3}{72} + \frac{1}{8(m-2)} \right\} ; \quad [\tau_{xx}]_{Si} = \frac{Em}{m+1} \left\{ \frac{207}{256(m-2)} + \frac{3}{8} + \frac{m}{m-2} \frac{27}{64} \right\}.$$

Se  $m = 4$  allora

$$[\tau_{xx}]_{Al} = \frac{Em}{m+1} (0,047 + 0,063) = \frac{Em}{m+1} 0,11$$

$$[\tau_{xx}]_{Si} = \frac{Em}{m+1} (0,404 + 0,375 + 0,844) = \frac{Em}{m+1} 1,653.$$

Si deve peraltro rilevare che nella gomma elastica è  $m = 2,2$ ; in tal caso

$$[\tau_{xx}]_{Al} = \frac{Em}{m+1} (0,047 + 0,625) = \frac{Em}{m+1} 0,672$$

$$[\tau_{xx}]_{Si} = \frac{Em}{m+1} (4,043 + 0,375 + 4,641) = \frac{Em}{m+1} 9,059.$$

(9) Il modello serve a misurare la vera  $y$ ; quindi il passaggio modello-originale avviene con riferimento a quella teoria che più si avvicina al risultato sperimentale.



**Meccanica.** — *Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli.*

Nota II di G. SUPINO, presentata (\*) dal Socio A. SIGNORINI.

5. Passiamo alla seconda questione. Si consideri una grandezza fisica  $y$ ; se utilizziamo il teorema  $\pi$  sulla base di una teoria che faccia dipendere  $y$  dalle grandezze  $q_1 \dots q_n$  e dai numeri  $a_1 \dots a_m$ , avremo

$$\frac{y}{q_1^{a_1} \dots q_r^{a_r}} = \varphi(N_{p+1} \dots N_n; a_1 \dots a_m).$$

Se per il fenomeno si conosce una seconda teoria, fondata sulle stesse grandezze e su gli stessi numeri, avremo anche

$$\frac{y}{q_1^{a_1} \dots q_r^{a_r}} = \psi(N_{p+1} \dots N_n; a_1 \dots a_m).$$

Tanto la  $\varphi$  che la  $\psi$  non possono essere determinate, in generale, altro che con l'esperienza; e questa dà una sola funzione a rappresentare il fenomeno. Questa funzione è la  $\varphi$  o la  $\psi$ ? *Non si può sapere* altro che organizzando precise esperienze su particolari apparenze differenti nelle due teorie. Ciò è naturalmente semplice quando si conoscono le due teorie, ma in generale si giunge all'esperienza senza avere prima determinato *tutte* le teorie indipendenti che si possono costruire con le grandezze e i numeri assegnati.

È noto, per esempio, che quando si determina la perdita di carico in un tubo si trova, con l'analisi dimensionale, partendo dalle equazioni di Navier,

$$(5) \quad \frac{\Delta p}{l} = \rho \frac{U^2}{D} \varphi(N) \quad N = \rho \frac{UD}{\mu}$$

(si indica con  $p$  la differenza di pressione ai due estremi del tubo lungo  $l$  e di diametro  $D$ , con  $U$  la velocità media, con  $\rho$  la densità, con  $\mu$  la viscosità) ma per ora nè si conosce una seconda teoria del moto dei liquidi viscosi, nè si può escludere che se ne possa costruire una seconda con le stesse grandezze dimensionali. Pertanto non sarebbe legittima la conclusione che il risultato sia conseguenza delle equazioni di Navier; e l'esperienza che conferma la (5) non costituisce una verifica sperimentale delle equazioni stesse (1).

6. CONCLUDIAMO. — Le osservazioni svolte circa la pluralità delle teorie possibili con date grandezze dimensionali portano alle seguenti precisazioni nei due punti di vista *induttivo* e *deduttivo*.

L'enunciato usuale, riportato al n. 1 e relativo al criterio induttivo, ha in sostanza il seguente significato: « Supponiamo che si possano costruire una

(\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) In altre parole la conferma sperimentale della  $\varphi$  si distingue da altri tipi di esperienze per il fatto che non costituisce la verifica di una teoria, ma di *tutte* le teorie che ammettono le stesse costanti dimensionali.

o più teorie relative alla dipendenza della grandezza fisica  $y$  da certe grandezze dimensionali  $q_1 \dots q_n$  e dai numeri  $a_1 \dots a_m$  (dipendenza a carattere *esclusivo*: cioè che include *tutte* e *sole* le grandezze influenti su la  $y$ ); e almeno una teoria dia luogo a sistemi di equazioni dimensionalmente omogenei e completi in quelle grandezze; allora potremo stabilire per  $y$  un'equazione tipo (1) (in base al teorema  $\pi$ ) e dedurne quindi le *leggi di similitudine* relative ad  $y$  (cioè le condizioni di passaggio modello-originale). Il risultato *non* ha alcun riferimento ad una teoria particolare, è puramente *sperimentale*.

Riferiamoci ora al punto di vista *deduttivo*. Nota una « teoria » che legghi la  $y$  alle  $q_1 \dots q_n$ ,  $a_1 \dots a_m$  si *deduce* la (1) la quale non è esclusiva della teoria data, ma è comune a tutte quelle che si possono costruire con le stesse grandezze dimensionali. Volendo proseguire nel punto di vista deduttivo occorre quindi classificare tutte le teorie che ammettono la stessa trasformazione modello-originale; ciò permetterebbe di controllare, con esperienze opportune quale tra queste si avvicina maggiormente alle apparenze del fenomeno. Nel campo delle elasticità delle deformazioni finite tutte le teorie che dipendono da un potenziale elastico portano a scrivere le componenti di tensione nella forma (4). La quale (con  $L, M, N$  funzioni degli invarianti di deformazione) viene a caratterizzare tutte le teorie elastiche che ammettono un potenziale. Ma se intervengono fenomeni elasto-plastici o elasto-ereditari la caratterizzazione (4) non include più tutti i fenomeni pur limitandosi a considerare soltanto  $E$  ed  $m$  (che però possono variare). Il criterio più generale per caratterizzare tutte queste teorie mi sembra essere il seguente. Si ammetta la cinematica delle deformazioni finite da una parte e l'equilibrio delle forze applicate nell'intorno di un punto dall'altra. Si deve stabilire un legame cinematico-dinamico  $\tau_{xx} = f_1(\epsilon_{xx} \dots \epsilon_{xy}) \dots \tau_{xy} = f_2(\epsilon_{xx} \dots \epsilon_{xy})$  e perciò occorre che le funzioni delle deformazioni che legano le  $\tau$  alle  $\epsilon$  varino nell'intorno di un punto con la stessa legge. Pertanto tutte le sestuple con funzioni  $f_1(\epsilon_{xx} \dots \epsilon_{xy}) \dots$  che nell'intorno di un punto variano come le componenti di un tensore doppio simmetrico ortogonale possono rappresentare una teoria delle deformazioni finite purchè dalle  $\epsilon$  si possa risalire a componenti continue dello spostamento.

**Fisica.** — *Sull'assorbimento e diffusione degli ultrasuoni da parte di soluzioni ed emulsioni.* Nota di E. GROSSETTI, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio A. CARRELLI.

È stato studiato in primo luogo l'assorbimento ultracustico di un'emulsione olio di ricino-acqua; l'emulsione è stata ottenuta agitando la mescolanza acqua-olio di ricino con un'elica che ruotava con la velocità di circa 15 giri al secondo. L'emulsione così ottenuta è risultata stabile, usando come stabilizzatore un po' di sapone, nel senso che, anche dopo due mesi, non si è avuta

(\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

alcuna separazione delle due fasi. Le dimensioni delle goccioline di olio erano naturalmente variabili, ma oscillavano all'incirca da  $10^{-4}$  a  $10^{-3}$  cm. di diametro; qualche goccia era anche di dimensione maggiore ( $d=10^{-2}$  cm.) ma queste erano di numero molto limitato. La percentuale di olio era del 7 %.

Il metodo adoperato per la misura del coefficiente di assorbimento ultrasonico  $\alpha$  è sempre quello già descritto in una prima Nota <sup>(1)</sup> e propriamente l'intensità ultrasonica veniva misurata mediante il metodo della determinazione della pressione di radiazione prodotta su di un ostacolo (pendolo di torsione). Analogamente si è proceduto per la misura di  $\alpha$  relativamente ad un liquido omogeneo, e cioè ad una soluzione satura di cloruro sodico in acqua a 18°.

I risultati ottenuti in queste misure sono riportati nella tabella seguente

	Acqua	Emulsione olio di ricino-acqua	Soluzione cloruro di sodio-acqua
$\eta$	0.0101	0.0119	0.0147
$\alpha$	0.316	0.0460	0.0368

Dall'espressione che dà il valore teorico del coefficiente di assorbimento si ricava che  $\alpha$  è proporzionale al coefficiente di viscosità  $\eta$ ; nelle misure già da noi pubblicate <sup>(2)</sup> è risultato che tale proporzionalità non è verificata sperimentalmente, e si è accennato che l'assorbimento ultrasonico nei liquidi deve dipendere anche da qualche altro fattore non ancora bene identificato. Abbiamo sperimentato appunto per tale scopo con una emulsione all'intento di stabilire l'effetto sull'assorbimento ultrasonico di una eterogeneità di tipo macroscopico. Ed infatti si ottiene per un aumento percentuale del 18 % di  $\eta$  un aumento molto maggiore, e cioè del 46 % per  $\alpha$ . Questo risultato e cioè un effetto dipendente da eterogeneità, era stato già annunziato dal Lucas <sup>(3)</sup> il quale ammette appunto una grande importanza da parte dell'eterogeneità elastica del mezzo liquido che si considera sull'assorbimento. Considerando un mezzo che sia eterogeneo da un punto di vista elastico, egli determina teoricamente che tale eterogeneità ha come conseguenza la presenza di una diffusione degli ultrasuoni. Egli dà anche descrizione di una esperienza però di carattere qualitativo, la quale mostra che nei miscugli nitrobenzene-esano, per i quali la viscosità segue un andamento normale, si ha un notevolissimo assorbimento degli ultrasuoni. Esperienze condotte da Biquard <sup>(4)</sup> mostrano questa diffusione laterale nel caso del toluene e del benzene, ma di piccola entità.

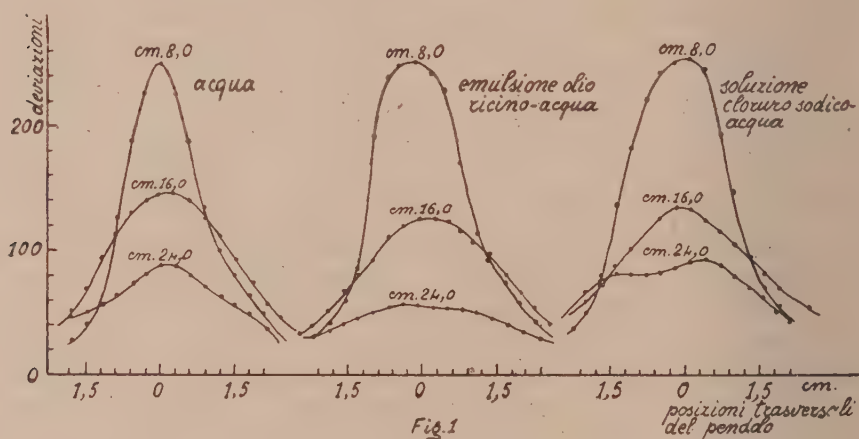
(1) « Rend. Acc. Lincei », VIII, vol. I, fasc. 12.

(2) G. GROSSETTI, « Rend. Acc. Lincei », VIII, vol. I<sup>o</sup>, fasc. 13.

(3) R. LUCAS, « Journ. d. Phys. », Ser. VII, t. VIII, p. 42 (1937).

(4) V. BIQUARD, « C. R. », 1937, 202, p. 117.

Noi sperimentando invece con liquido in cui la eterogeneità è più grande e ciò per la presenza di goccioline dell'ordine di grandezza di circa  $10^{-4}$  cm., ( $\lambda \sim 2 \cdot 10^{-5}$ ), e quindi lavorando in condizioni analoghe a quelle che si hanno sulla diffusione della luce rossa ( $\lambda = 8 \times 10^{-5}$  cm.) da parte di molecole con diametro di  $\sim 10^{-8}$  cm. otteniamo un risultato molto più netto di quello che ha ottenuto il Biquard. Ma data l'importanza che questo tipo di ricerche può avere per lo studio della struttura dei liquidi, e cioè la possibilità di porre in evidenza discontinuità elastiche che non vengono messe nettamente in evidenza con mezzi ottici, noi abbiamo proceduto al confronto con un liquido macroscopicamente omogeneo, e cioè una soluzione di cloruro sodico satura alla temperatura di  $18^\circ$ , in questo caso la viscosità aumenta molto di più e cioè del 46 %, ma il coefficiente di assorbimento subisce solo una variazione del 17 %. Il che mostra che anche in questo caso l'azione della viscosità non basta per spiegare l'assorbimento.



Prova diretta del processo di diffusione degli ultrasuoni di questi liquidi non omogenei elasticamente si è inoltre pensato che possa ottenersi dallo studio della distribuzione della intensità. A tale scopo noi abbiamo proceduto per confronto, e cioè abbiamo paragonato la distribuzione dell'intensità, mediante la misura della pressione di radiazione lungo varie sezioni della vaschetta a diversa distanza (8 cm.; 16 cm. e 24 cm.) dalla sorgente, nel caso che il liquido sia acqua, nel caso dell'emulsione e nel caso della soluzione. I risultati sono riportati in fig. 1, e come chiaramente si vede la distribuzione dell'intensità è tale da mostrare nettamente l'effetto di diffusione, che è molto cospicuo per l'emulsione, ma che è anche notevole per la soluzione.

Ricerche ulteriori mostreranno il contributo che queste misure possono dare in rapporto alla struttura dei liquidi.

*Nota.* - Al prof. Antonio Carrelli l'espressione di vivissima gratitudine per i larghi consigli dati ed i mezzi messi a disposizione.



**Fisica applicata.** — *Abbagliamento in luce gialla ed in luce bianca*. Nota di R. DEAGLIO, presentata (\*) dal Socio E. PERUCCA.

1. L'abbagliamento consiste nella diminuzione della capacità visiva dell'occhio; in particolare: diminuzione di acuità visiva, diminuzione della sensibilità al contrasto.

Sono possibili varie definizioni quantitative di abbagliamento<sup>(1)</sup>, noi accetteremo, perchè più aderente alle applicazioni concrete che ci interessano, la definizione seguente: l'abbagliamento è misurato dall'aumento di illuminamento di una tabella tipo convenzionale (v. paragrafo 2), necessario per osservarvi un dato contrasto; per esempio il contrasto bianco-nero.

Da misure di Garelli<sup>(2)</sup> si deve concludere, sia pure per via indiretta, che l'abbagliamento in luce monocromatica è indipendente dal colore; misure dell'abbagliamento, fondate sul presupposto di tale indipendenza, hanno portato infatti ad una nuova determinazione della curva di visibilità relativa, la quale coincide, entro gli errori sperimentali, con quella ben nota ottenuta per altre vie.

In visione scotopica, o visione crepuscolare, sembra tuttavia che la valutazione dei contrasti risulti migliore, come ovviamente risulta migliore la visibilità, valutata in distanza alla quale si può ancora percepire un determinato contrasto, attraverso la nebbia, con luce gialla anzichè con luce bianca. Sarà così anche per l'abbagliamento?

2. L'abbagliamento in luce gialla ed in luce bianca, ha dato origine ad una controversia che dura ormai da più di un decennio; la questione assume infatti notevole importanza per la pratica applicazione nei proiettori di autoveicoli.

Sostengono i fautori della luce gialla che l'abbagliamento è minore, sia come abbagliamento vero e proprio come sopra specificato, sia come « tempo di cecità » o « tempo di ricupero », caratterizzato dall'intervallo di tempo necessario perchè l'occhio riprenda la sua normale capacità visiva dopo cessato l'abbagliamento<sup>(3)</sup>.

Orbene la questione è ritornata proprio di attualità in vista di un prossimo congresso internazionale dell'Illuminazione.

A questo proposito si è voluto nella presente ricerca, sottoporre il problema ad esame sperimentale allo scopo di fornire con opportuno dispositivo di laboratorio, che tenga tuttavia conto delle particolari condizioni in cui

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) U. BORDONI, « L'Elettrotecnica », *II*, p. 585 (1924); E. PERUCCA, « L'Elettrotecnica », *13*, p. 45 (1926); F. BORN e M. WOLFF, « Das Licht », Heft 8 (1932); S. F. SCHOUTEN, « Proc. Ac. Amsterdam », *37*, p. 506 (1934); E. PERUCCA e FERRERO, « L'Elettrotecnica », *28*, p. 570 (1941).

(2) M. GARELLI, « Atti Acc. Sc. Torino », *80*, p. 220 (1944-45).

(3) A. MONNIER et M. MOUTON, « C. R. », *196*, p. 605 (1941).

viene a trovarsi l'occhio del guidatore sottoposto ad abbagliamento su strada, il mezzo di potere effettuare cicli di misure riproducibili su un gran numero di osservatori.

Un siffatto dispositivo, suggerito da Perucca attuato nel laboratorio di Fotometria dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale G. Ferraris, realizza appunto condizioni equivalenti a quelle a cui verrebbe sottoposto l'occhio di un osservatore abbagliato durante l'incrocio con un'altra autovettura.

Il dispositivo è schematizzato in fig. 1. La sorgente abbagliante  $F$  è un proiettore normale di automobile posto alla distanza di 25 metri dall'occhio dell'osservatore  $U$ . Ad una distanza di 4,5 metri dall'osservatore si trova il dispositivo di misura dell'abbagliamento  $SC$ .

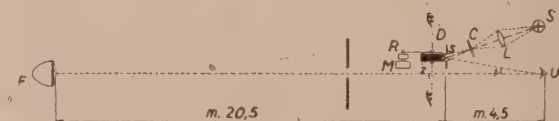


Fig. 1.

Un disco di legno  $D$  ruota attorno all'asse azionato dal motore  $M$  col l'intermediario del riduttore  $R$ . Il motore alimentato in corrente continua, con eccitazione in derivazione, assicura una velocità angolare costante del disco: circa 5 giri al minuto. Il bordo del disco, largo circa 6 cm. è interamente ricoperto da una striscia di velluto nero, sulla quale è applicata una targhetta rettangolare  $T$  di carta bianca, le cui dimensioni sono tali da essere viste dall'osservatore sotto un angolo di  $10'$  e  $20'$  rispettivamente. Una targhetta delle stesse dimensioni angolari era già stata adottata da Perucca e poi da Deaglio e Ferrero in precedenti esperienze di abbagliamento (4).



Fig. 2.

Uno schermo  $s$  con apertura rettangolare in corrispondenza del disco e con un leggero contorno bianco  $X$  (fig. 2), ha lo scopo di fissare l'attenzione dell'osservatore sotto abbagliamento nella direzione che interessa. Il sistema  $SC$  è spostabile lateralmente rispetto all'asse  $FU$  in modo che la distanza angolare sotto la quale è vista la targhetta  $T$  può essere variata a piacere da  $2^\circ$  a  $5^\circ$ .

La fenditura rettangolare dello schermo  $S$  è illuminata da sistema ottico  $SL$  (fig. 1); la lente  $L$  forma sul cuneo assorbente  $C$  l'immagine della sorgente  $S$ , ed il fascio luminoso che esce da  $C$  illumina uniformemente lo schermo  $S$ . Il cuneo assorbente  $C$ , a densità variabile permette di ottenere su  $s$  un illuminamento regolabile da 0,005 lux a 5 lux.

(4) R. DEAGLIO, «L'Elettrotecnica», 24, p. 605 (1941).

Il campo di osservazione che si presenta all'osservatore è illustrato in fig. 2a), mentre il disco D (fig. 2b) ruota lentamente, l'osservatore vede apparire gradualmente la targhetta T nel rettangolo ABEG, ed il tutto è così disposto che il piano orizzontale tangente superiormente al disco passa per EG; la targhetta T, per effetto della rotazione del disco entra nel campo di osservazione quando essa ha raggiunto la sommità del disco, e si presenta poi sotto un angolo visuale che cresce continuamente.

Il disco nel suo movimento, grazie ad un contatto Z, chiude un circuito, registrando su un cronografo l'istante  $t_1$  nel quale la targhetta passa alla sommità del disco. Dall'altra parte l'osservatore, abbagliato dalla sorgente F, percepirà la presenza della targhetta solo al tempo  $t_2$  e, manovrando un comune tasto Morse, registra sullo stesso cronografo, l'istante  $t_2$ . L'intervallo di tempo  $t_2 - t_1 = 0$ , dipende dall'abbagliamento a cui è sottoposto l'osservatore. La costanza di rotazione del disco, quindi il suo periodo può essere controllata dalle misure degli intervalli tra gli istanti  $t_1$  che sono successivamente registrati.

Dalla conoscenza di questo periodo e di  $t_2 - t_1$  si deduce immediatamente l'angolo  $\alpha$  descritto dalla targhetta nel campo visuale prima che l'osservatore la percepisca.

Con tale apparecchiatura, l'osservatore può eseguire senza fatica numerose determinazioni in breve tempo. Per evitare che l'osservatore, magari incoscientemente, sia influenzato nelle misure dall'abitudine alla comparsa ritmica della targhetta T nel campo visivo, il disco D subiva durante il funzionamento degli slittamenti aritmici.

Il dispositivo è stato usato per il confronto fra gli abbagliamenti che si hanno a parità di condizioni, tra due proiettori uguali, uno di essi fornito di lampadina con bulbo chiaro ed atto a fornire l'abbagliamento in luce detta bianca, l'altro fornito invece di una lampadina con bulbo giallo per fornire l'abbagliamento in luce detta gialla.

Per conformarsi al caso pratico dell'abbagliamento da proiettori di autovetture su strada, si è eseguita una serie di misure nelle condizioni seguenti: illuminamento abbagliante sulla pupilla  $E_A = 1, 2, 3$  lux; angolo visuale  $\beta = 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ .

Gli illuminamenti etrocromatici abbaglianti, prodotti dal proiettore sulla pupilla sono stati misurati con il metodo dello sfarfallamento. La costanza degli illuminamenti veniva controllata all'inizio di ogni misura con cellule fotoelettriche tarate in luce gialla ed in luce bianca rispettivamente.

3. Con il descritto dispositivo hanno potuto effettuarsi su numerosi osservatori, misure in diverse condizioni: da illuminamenti  $E_A$  sulla pupilla dell'ordine di qualche decimo di lux, ad illuminamenti fino a qualche decina di lux; da illuminamenti  $E_T$  della targhetta T di prova del valore di soglia ad illuminamenti; con occhio sottoposto ad abbagliamento continuo oppure intermittente; ecc. Ci sembra così di non avere trascurato nessuna delle particolari condizioni in cui viene a trovarsi sottoposto l'occhio del guidatore di autovettura.

I risultati conclusivi sono stati raccolti in un certo numero di diagrammi che non possono trovare posto in questa Nota. Pubblichiamo qui solo la conclusione che scaturisce da detti diagrammi.

4. La differenza tra abbagliamento in luce gialla e luce bianca risulta sempre inferiore ai limiti di approssimazione della misura.

Esempio: il numero che rappresenta l'abbagliamento in luce gialla in determinate condizioni è risultato  $75 \pm 5$  (media di 50 osservazioni); il numero che rappresenta l'abbagliamento in luce bianca a parità di illuminamento sulla pupilla, a parità di condizioni sperimentali è risultato  $74 \pm 5$  (media di 50 osservazioni).

Così dicasi per la stanchezza dell'occhio e per il tempo di cecità dopo abbagliamento.

**Elettrochimica.** — *Contributo alla conoscenza dei fenomeni di passività anodica dello stagno in soluzione alcalina*<sup>(\*)</sup>. Nota III di G. BIANCHI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. O. SCARPA.

È noto che se nell'elettrolisi di una soluzione alcalina con un anodo di stagno si oltrepassa un valore critico della densità di corrente anodica, lo stagno cessa di disciogliersi come ione stannoso con un elevato rendimento in corrente e diventa passivo: il potenziale anodico aumenta bruscamente, l'anodo si ricopre di una pellicola bruna di ossidi, lo stagno si scioglie come ione stannico con un piccolissimo rendimento in corrente e la elettrolisi è accompagnata da un abbondante sviluppo di ossigeno. Se appena manifestatasi la passività si diminuisce la densità di corrente anodica a valori sufficientemente piccoli, lo stagno permane in uno stato passivo e continua a disciogliersi come ione stannico, ma il rendimento in corrente della dissoluzione aumenta (con una conseguente diminuzione dello svolgimento di ossigeno) e lo stagno si ricopre di una pellicola gialla. Questi fenomeni sono sfruttati nei bagni alcalini di stagnatura, composti essenzialmente da una soluzione di stannato sodico con un eccesso di soda libera, nei quali si sfrutta la passività dello stagno nella forma corrispondente alla formazione della pellicola gialla per ottenere un rendimento anodico di corrente circa uguale al rendimento catodico col quale lo stagno viene depositato sui pezzi da trattare e per evitare che nella soluzione entrino ioni stannosi che provocano la formazione di un deposito catodico di stagno spugnoso.

Oltre lo stannato sodico e la soda caustica, i bagni di stagnatura alcalina contengono sempre delle percentuali più o meno grandi di carbonato sodico proveniente dalla carbonatazione della soda caustica del bagno ad opera del  $\text{CO}_2$  dell'atmosfera: spesso contengono pure delle percentuali anche

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 12 aprile 1947.



notevoli di NaCl sia perchè questa sostanza viene aggiunta credendo di migliorare la dissoluzione anodica dello stagno sia perchè il bagno è stato formato partendo da cloruro stannico trattato con un eccesso di soda tale da ridisciogliere il precipitato di idrato stannico<sup>(1)</sup>. Un'altra aggiunta spesso consigliata per migliorare la dissoluzione anodica è quella di acetato sodico e di sostanze ossidanti<sup>(2)</sup> (perborato, acqua ossigenata, ecc.) che ossidino a stannato le piccole quantità di stannito sodico che possono formarsi e che influenzano l'aspetto del deposito catodico di stagno.

Ho indagato l'influenza che la concentrazione della soda caustica e delle altre sostanze che di solito vengono aggiunte ai bagni di stagnatura hanno sui valori critici della densità di corrente anodica, in corrispondenza dei quali compare la passività, operando con un anodo di superficie ben definita di stagno purissimo Kahlbaum immerso nella soluzione in esame nella

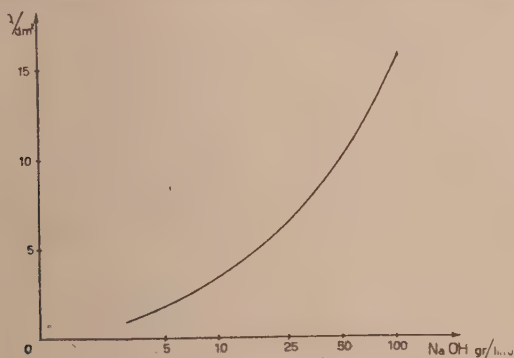


Fig. 1.

quale era immerso anche il catodo costituito da una bacchetta di ferro circondata da una candela di porcellana porosa. La densità di corrente critica alla quale lo stagno diventa passivo è indicata dal brusco aumento della tensione della cella che da circa 1 V sale a circa 4 V. Prima che lo stagno diventi passivo si manifestano dei fenomeni periodici di cui ho dato notizia in altra Nota alla quale<sup>(3)</sup> rimando anche per maggiori notizie sull'uguale apparecchiatura usata nelle due ricerche.

Le prove con soluzioni di soda caustica di concentrazione crescente (4-8-20-40-80-160 gr/litro) mantenendo costante la temperatura a 40° C hanno dato i risultati illustrati graficamente nella fig. 1 nella quale sulle ordinate sono riportati i valori della densità di corrente critica e sulle ascisse, con scala logaritmica, le concentrazioni delle soluzioni di NaOH: le prove

(1) FRAINE, «Metal Ind.» (N. Y.) 24, 463 (1926); MAEDER, «Metal Ind.» (N. Y.) 30, 323 (1932).

(2) PROCTOR, «Metal Ind.» (N. Y.) 27, 267 (1929); OPLINGER, «Metal Ind.» (N. Y.) 29, 529 (1931); HOTHERSALL-CLARKE-MACNAUGHTAN, «J. Electrodepos. Tech. Soc.», 9, 101 (1934).

(3) «Rend. Acc. Naz. Lincei» (in corso di pubblicazione).

TABELLA I.

Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>			CH <sub>3</sub> -COONa·3H <sub>2</sub> O			Na Cl		
Quantità aggiunta.	Densità di corrente critica $\delta_c$	Variazione della tensione	Quantità aggiunta	Densità di corrente critica $\delta_c$	Variazione della tensione	Quantità aggiunta	Densità di corrente critica $\delta_c$	Variazione della tensione
gr/litro	A/dm <sup>2</sup>	V	gr/litro	A/dm <sup>2</sup>	V	gr/litro	A/dm <sup>2</sup>	V
0	7,53	0,8 → 3,8	0	8,19	0,8 → 4,2	0	8,04	1,0 → 4,2
50	6,54	0,8 → 4,0	10	8,42	1,0 → 4,2	12,5	8,80	1,0 → 4,3
100	6,31	0,7 → 3,7	20	8,42	1,0 → 4,2	25,0	7,37	0,9 → 4,1
150	5,56	0,7 → 3,8	30	7,67	1,0 → 4,3	37,5	7,96	0,9 → 3,9
200	5,42	0,7 → 3,8	50	7,90	1,0 → 4,3	50,0	7,06	1,0 → 4,1
250	3,76	0,6 → 3,4	75	7,90	1,0 → 4,3	62,5	6,77	0,9 → 4,0
300	3,76	0,6 → 3,4	100	8,04	1,0 → 4,3	75,0	7,68	1,1 → 4,6
satura	3,40	0,6 → 3,4	125	6,77	0,9 → 4,3	87,5	7,37	1,0 → 3,8
			150	8,80	1,1 → 4,0	100,0	7,00	1,0 → 3,8
			175	8,65	1,1 → 3,9	112,5	6,61	1,0 → 3,7
			200	7,53	1,0 → 4,2	125,0	6,24	0,9 → 3,6
			225	6,77	0,9 → 3,9	137,5	6,61	0,9 → 3,7
			250	6,54	0,9 → 3,8	150,0	6,77	1,0 → 3,7
			275	5,64	0,9 → 4,0	162,5	6,17	0,9 → 3,7
						175,0	6,62	0,9 → 3,8
						187,5	5,79	0,9 → 3,3
						200,0	5,79	0,9 → 3,5
						212,5	< 1,50	→ 3,6
						225,0	< 1,50	→ 3,3
						250,0	< 1,50	→ 3,5

con una soluzione di NaOH 40 gr/litro con aggiunte quantità crescenti di carbonato sodico o di acetato sodico o di cloruro sodico sono riassunte nella tabella I. Nulla di particolare si deve notare per le aggiunte di carbonato e di acetato sodico che agiscono come indicato; per il cloruro sodico debbo invece notare che si è ottenuta una notevole dispersione di punti (confermata in una seconda serie di prove di controllo) che, pur conducendo a dedurre che le aggiunte di questa sostanza abbassano i valori della densità di corrente critica, fanno sospettare l'esistenza di altri fenomeni dovuti alla

scarica sull'anodo di ioni cloro. L'ipotesi è confermata dal fatto che con le maggiori aggiunte di NaCl si presentano dei fenomeni completamente diversi da quelli osservati nelle altre prove: immerso l'anodo nella soluzione e fatta passare una piccolissima corrente ( $1,50 \text{ A/dm}^2$ ), la tensione sale subito a piccoli balzi di  $0,1 \div 0,2 \text{ V}$  fino a  $3,3 \text{ V}$  e comincia lo sviluppo di gas. Estrahendo l'anodo dalla soluzione, questo appare ricoperto da una pellicola lucida e trasparente che costituisce una forma di passività anodica dello stagno di cui la letteratura scientifica, per quanto mi consta, non ha ancora dato notizia.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha guidato durante la ricerca.

**Elettrochimica.** — *Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline*<sup>(\*)</sup>. Nota IV di G. BIANCHI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. LOMBARDI.

1. Nelle Note precedenti<sup>(1)</sup>, ho comunicato i risultati delle ricerche sulla passività anodica dello stagno in soluzioni di soda caustica con particolare riguardo alle condizioni in cui si forma l'una o l'altra delle due forme di passività, determinando anche i rendimenti con cui avviene la dissoluzione dello stagno.

In determinate condizioni di temperatura e concentrazione si verifica che se, all'atto in cui l'anodo di stagno diventa passivo in corrispondenza della prima densità di corrente critica, si riduce la densità di corrente a valori piccoli ma superiori alla seconda densità di corrente critica, l'anodo si ricopre di una pellicola grigia di piccolo spessore e della stessa natura della pellicola bruna; se invece si riduce la densità di corrente a valori inferiori alla seconda densità di corrente critica, l'anodo di stagno si ricopre della pellicola lattiginosa.

Continuando le ricerche con l'apparecchiatura e le condizioni di temperatura e concentrazione delle soluzioni di NaOH già indicate nella Nota precedente ho trovato che se si fa formare sull'anodo di stagno la pellicola lattiginosa e poi si aumenta la densità di corrente ad un valore superiore alla seconda densità di corrente critica, la tensione della cella sale gradualmente di  $0,2 \div 0,3 \text{ V}$  e l'anodo di stagno, sul quale comincia a svilupparsi ossigeno, si ricopre di una pellicola lucida color caffè, prima d'ora non osservata.

Ho determinato per varie condizioni di temperatura e concentrazione di NaOH il rendimento anodico della dissoluzione quando l'anodo di stagno è ricoperto di questa pellicola lucida color caffè e ho trovato i valori riportati

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei » (in corso di pubblicazione).

nella Tabella I che differiscono dai valori che si erano ottenuti nel caso che l'anodo di stagno era ricoperto della pellicola bruna sia per il valore, che è più piccolo, sia perchè variano diversamente al variare della densità di corrente. In particolare quando l'anodo di stagno è ricoperto della pellicola lucida caffè, il rendimento della dissoluzione diventa piccolissimo ( $< 1\%$ ) con l'aumentare della densità di corrente.

TABELLA I.

Concentrazione NaOH	Temperatura	Densità di corrente	Rendimento della dissoluzione $\text{Sn} \rightarrow \text{Sn}^{++}$
Normalità	°C	$\text{A/dm}^2$	$\eta^{\text{IV}}$
4	50	1,82	3,0
4	50	9,0	2,0
1	50	0,91	2,0
1	50	1,37	2,0
1	50	2,74	1,1
1	50	3,68	0,7
1	50	5,45	0,5
1	50	7,3	0,6
1	40	1,82	1,3
1	14	0,18	2,3
1/4	50	0,91	2,3
1/4	50	0,46	4,0

Se quando l'anodo è ricoperto della pellicola lucida caffè si riduce di nuovo la densità di corrente ad un valore inferiore alla seconda densità di corrente critica, ricompare rapidamente la pellicola lattiginosa con una diminuzione graduale della tensione di  $0,2 \div 0,3$  V.

La pellicola bruna e la pellicola lucida caffè differiscono, oltre che per l'aspetto e il diverso rendimento della dissoluzione, anche per il potenziale anodico: per esempio con una soluzione di NaOH normale a  $50^\circ\text{C}$  con una densità di corrente di  $2,74 \text{ A/dm}^2$  il potenziale dell'anodo rivestito della pellicola bruna è di 1,99 V e il potenziale dell'anodo rivestito della pellicola lucida caffè è di 2,21 V. Il potenziale dell'anodo rivestito con la pellicola lattiginosa nelle stesse condizioni di temperatura e concentrazione della soluzione con la densità di corrente dei  $0,91 \text{ A/dm}^2$  è di 0,98 V. Non ho potuto misurare in queste condizioni i relativi potenziali elettrochimici (con densità



di corrente nulla) perchè le pellicole che si formano sullo stagno sono distrutte, o almeno alterate, dalla soluzione di soda caustica normale a 50°C e il potenziale anodico tende ad assumere, dopo qualche minuto di instabilità, il valore di  $-0,95$  V corrispondente allo stagno non passivo. È in corso una ricerca sistematica sui potenziali elettrochimici delle pellicole descritte rispetto a soluzioni molto debolmente alcaline, ricerca di cui comunicherò i risultati in una Nota successiva: posso però fin d'ora dire che la pellicola lucida color caffè possiede un potenziale elettrochimico molto più positivo della pellicola bruna.

2. In una delle precedenti Note ho dato relazione dei fenomeni che si verificano nella passivazione anodica dello stagno in soluzione alcalina quando si aggiunge gradualmente alla soluzione di soda caustica normale a 40°C dell'acetato sodico, del carbonato sodico o del cloruro sodico e ho messo

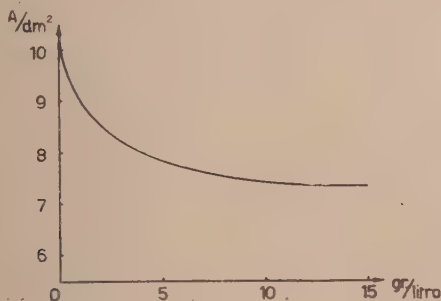


Fig. 1.

particolarmente in rilievo i fenomeni che si verificano con quest'ultimo quando la sua concentrazione supera il valore di 210 gr/litro<sup>(2)</sup>. Ho esteso le ricerche anche all'influenza che le aggiunte di gelatina hanno sulla passivazione anodica dello stagno operando con una soluzione di soda caustica normale alla temperatura di 50°C e determinando la prima densità di corrente critica con i metodi già descritti. Come mostra la fig. 1 (che riporta la densità di corrente critica alla quale l'anodo di stagno diventa passivo in funzione della quantità di gelatina aggiunta alla soluzione) la presenza di gelatina facilita la passivazione in quanto il colloide adsorbendo gli ioni  $\text{OH}^-$  della soluzione si porta all'anodo formando su di esso una pellicola entro la quale rapidamente si stabilisce una polarizzazione di concentrazione.

Con ugual meccanismo si deve credere che agiscano anche le aggiunte di silicato potassico ( $d = 1,32$ ) nelle prove che ho effettuato con soluzione di soda caustica normale a 50°C; fino a che la concentrazione del silicato è inferiore a 150 c.c./litro esso agisce diminuendo gradualmente la prima densità di corrente critica come mostra la fig. 2 che riporta, in funzione dei c.c./litro di silicato potassico aggiunto alla soluzione, la densità di corrente

(2) Sono tuttora in corso le ricerche per chiarire la natura dei fenomeni osservati che si presentano particolarmente interessanti.

critica corrispondente alla passivazione dell'anodo di stagno. Quando la concentrazione del silicato potassico nella soluzione di soda caustica normale a  $50^{\circ}\text{C}$  è uguale a 150 c.c./litro, passivando l'anodo di stagno con una densità di corrente uguale o maggiore di quella critica e mantenendo questa densità di corrente costante durante la prova, si verifica che la tensione della cella

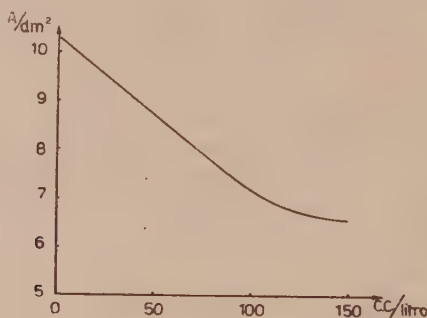


Fig. 2.

continua gradualmente ad aumentare fino a raggiungere, dopo qualche decina di minuti, anche un valore di 100 V.

Contemporaneamente all'aumento di tensione si verifica che l'anodo si ricopre di una crosta nera friabile il cui spessore può raggiungere parecchi decimi di millimetro e lo sviluppo di ossigeno, che inizialmente avveniva

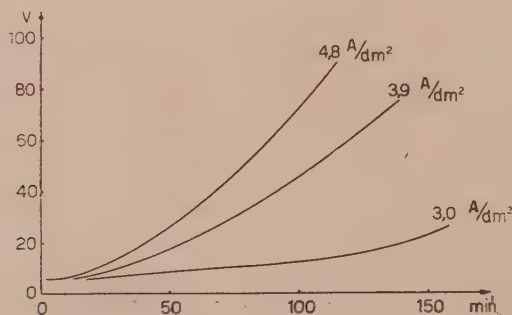


Fig. 3.

su tutto l'anodo, si localizza in pochi punti e diventa molto piccolo fino a scomparire quasi completamente quando la tensione ha raggiunto i valori maggiori. Esaminando alla fine della prova l'anodo di stagno, si osserva che esso è corroso particolarmente nei punti in cui era localizzato lo sviluppo di ossigeno. Gli stessi fenomeni si verificano anche se, dopo aver passivato l'anodo di stagno, si riduce la densità di corrente a valori inferiori a quello critico. In questo caso la tensione della cella sale tanto più lentamente quanto più è piccola la densità di corrente usata, come mostra la fig. 3 che rappre-

senta la variazione della tensione in funzione del tempo per tre diverse densità di corrente. I fenomeni descritti scompaiono se, invece che applicare direttamente la densità di corrente necessaria per passivare l'anodo, si fa aumentare gradualmente la densità di corrente cominciando da valori piccoli: raggiunta la densità di corrente critica l'anodo di stagno diventa passivo ma la sua tensione si stabilizza rapidamente sui 4 V senza tendenza ad aumentare.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha guidato durante lo svolgimento della ricerca.

**Cristallografia.** - *Sugli operatori matriciali di simmetria macroscopica.* Nota I di F. FUMI<sup>(\*)</sup>, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. C. PERRIER.

1. Gli insiemi di elementi di simmetria che individuano le 32 classi cristalline hanno carattere grupale.

Per la loro natura di operazioni lineari nello spazio fisico, dotate della proprietà di conservare i moduli dei vettori cui si applicano, tali elementi di simmetria sono simboleggiabili con particolari matrici di ordine 3.

Una sistematica trattazione matrico-algebrica dei gruppi cristallografici di simmetria macroscopica è stata fatta da F. Seitz<sup>(1)</sup>: ne richiamiamo i punti per noi essenziali<sup>(2)</sup>.

Si dimostra<sup>(2)</sup> che il generico operatore di simmetria macroscopica è rappresentato, rispetto al riferimento cartesiano ortogonale complesso che ne costituisce la terna principale, dalla matrice

$$(I) \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

$\varphi$  denota un angolo *a priori* qualunque, il quale però, nel campo cristallografico<sup>(2)</sup>, può assumere soltanto i valori

$$\varphi = \frac{m}{n} 2\pi \quad (n=1, 2, 3, 4, 6; m = \text{numero intero} \geq 0)$$

in conseguenza della costituzione discontinua e triperiodica dei cristalli<sup>(1)</sup>; un tale fatto mi ha portato ad adottare<sup>(2)</sup>, per designare gli elementi di simmetria che caratterizzano le classi cristalline, il termine di *elementi di simmetria macroscopica*, anzichè quello di *elementi di simmetria del continuo*, come si fa comunemente in cristallografia, ispirandomi anche al Seitz.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) «Zs. f. Kryst.», 88, 433 (1934); 90, 289 (1935).

(2) Una mia semplice esposizione dei fondamenti dello studio analitico delle operazioni di simmetria macroscopica è in corso di stampa sul «Periodico di Mineralogia».

Utilizzando le formule di Eulero la matrice (I) si può anche scrivere.

$$(I') \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi + i \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi - i \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Per dare una interpretazione fisica al risultato matematico cui si perviene occorre naturalmente passare dagli assi complessi ad assi reali. Esiste una terna di assi cartesiani ortogonali reali  $O(x_1, x_2, x_3)$ , rispetto alla quale la (I) (I') assume la forma

$$(II) \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Per comprendere il significato operativo della matrice (II) basta applicarla ad un generico vettore  $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ , col che si ottiene il vettore trasformato

$$(III) \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm v_1 \\ v_2 \cos \varphi - v_3 \sin \varphi \\ v_2 \sin \varphi + v_3 \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

il quale ha sull'asse  $x_1$  la stessa componente di  $\bar{v}$ , inalterata o cambiata di segno a seconda che il primo termine dell'operatore (II) è  $+1$  o  $-1$  (ossia a seconda che si ha a che fare con una *rotazione propria* od una *rotazione impropria*, secondo la terminologia di Seitz), mentre sugli assi  $x_2, x_3$  ha due componenti che individuano un vettore di tale piano ruotato di un angolo  $\varphi$  rispetto al vettore di componenti  $v_2, v_3$  (3).

Alcuni casi particolari notevoli dei due tipi di operatori di simmetria macroscopica compresi nella (II) (rotazioni proprie ed improprie) si ottengono ponendo  $\varphi = 0^\circ$  e  $\varphi = 180^\circ$  (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

operatore identità  
( $\varphi = 0^\circ$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

operatore digira  $x_1$   
( $\varphi = 180^\circ$ )

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

operatore piano di simmetria  $x_2 x_3$   
( $\varphi = 0^\circ$ )

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

operatore centro di inversione  
( $\varphi = 180^\circ$ )

(3) Il modulo del vettore trasformato è sempre uguale a quello del vettore iniziale per il tipico carattere *unitario* delle trasformazioni di simmetria macroscopica.



2. Esaurite così alcune indispensabili premesse, passiamo senz'altro a rilevare come il carattere complesso della terna principale del generico operatore di simmetria macroscopica risulti dal fatto stesso che sono complesse le componenti di tale operatore, di natura essenzialmente reale, rispetto agli assi in parola. Orbene, tenendo presente la (I'), appare chiaramente che condizione necessaria e sufficiente perchè un generico operatore di simmetria macroscopica abbia una terna principale reale è che il corrispondente valore di  $\varphi$  soddisfi alla equazione trigonometrica

$$(IV) \quad \text{sen } \varphi = 0.$$

Alla stessa condizione si arriva anche partendo dalla (II); da questa risulta infatti molto visivamente l'esistenza di operazioni di simmetria macroscopica aventi terna principale (o di direzioni unite) <sup>(2)</sup> reale: sono quelle e solo quelle per cui è verificata la (IV), ossia per cui

$$\varphi = n\pi \quad (n = \text{numero intero}).$$

Gli unici due casi distinti corrispondono a

$$\varphi = 0^\circ, 180^\circ.$$

Si tratta cioè dell'operatore identità, dell'operatore piano di simmetria, dell'operatore digira e dell'operatore centro di inversione.

Invero si comprende assai facilmente, anche per via diretta, come tali operatori possiedano terne reali di direzioni unite.

Infatti per l'operatore identità, così come per l'operatore centro di simmetria ogni terna di assi cartesiani ortogonali reali dello spazio fisico ordinario è una terna principale e di direzioni unite, poichè il trasformato di ogni vettore (o versore) tramite tali operatori è parallelo al vettore (o versore) di partenza.

Per l'operatore piano di simmetria una qualunque terna di assi cartesiani ortogonali dello spazio fisico ordinario, formata dalla direzione normale alla giacitura del piano e da due assi perpendicolari giacenti in essa è terna principale.

Per l'operatore asse binario gode di tale proprietà ogni terna di assi cartesiani ortogonali reali dello spazio fisico ordinario avente un asse nella direzione della digira e gli altri due giacenti nel piano perpendicolare ad essa e normali fra loro.

Ciò che vogliamo rilevare è come, proprio in conseguenza di quanto testè esposto, le matrici rappresentative degli operatori identità e centro di simmetria sono quelle scritte più sopra rispetto ad ogni terna cartesiana ortogonale reale, in relazione al loro carattere di operatori omografici dilatatori omotetici <sup>(2)</sup>, mentre così non accade per gli operatori piano di simmetria e digira, come naturalmente neppure per il generico operatore (II).

Possiamo però ancora notare che, mentre l'operatore piano di simmetria e l'operatore digira potranno scriversi nella forma diagonale più sopra riportata riferendosi ad uno qualunque degli  $\infty^1$  loro riferimenti cartesiani ortogonali principali reali, il generico operatore (II) non potrà mai ricondursi a

forma diagonale riferendosi ad assi reali. Inoltre, mentre l'operatore digira e l'operatore piano di simmetria saranno necessariamente rappresentati in un generico riferimento cartesiano ortogonale reale da una matrice simmetrica, per la loro natura di tensori doppi simmetrici e di omografie dilatatorie<sup>(2)</sup>, il generico operatore (II) (data la sua semplice natura di operatore tensoriale doppio od omografico di simmetria macroscopica, non soggetto ad ulteriori e speciali condizioni) sarà rappresentato da una matrice emisimmetrica gobba, come è la (II) stessa, rispetto ad uno qualunque dei riferimenti cartesiani ortogonali, aventi un asse nella direzione dell'asse di simmetria corrispondente.

Dei principî generali qui enunciati si trovano molteplici conferme nel corso della prima Memoria di Seitz<sup>(1)</sup>.

3. Ritengo opportuno, specialmente a scopo chiarificativo, fornire la dimostrazione di cinque importanti teoremi, che il Seitz si limita a formulare; ciò mi fornirà l'occasione di svolgere alcune non sistematiche applicazioni dei più elementari concetti della teoria dei gruppi agli insiemi gruppali che più direttamente ci interessano.

a) *Il prodotto di due rotazioni proprie è proprio*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ 0 & \sin \varphi' & \cos \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ 0 & \sin \varphi' & \cos \varphi' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos (\varphi + \varphi') & -\sin (\varphi + \varphi') \\ 0 & \sin (\varphi + \varphi') & \cos (\varphi + \varphi') \end{pmatrix}.$$

b) *Il prodotto di due rotazioni improprie è proprio*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ 0 & \sin \varphi' & \cos \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ 0 & \sin \varphi' & \cos \varphi' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos (\varphi + \varphi') & -\sin (\varphi + \varphi') \\ 0 & \sin (\varphi + \varphi') & \cos (\varphi + \varphi') \end{pmatrix}.$$

c) *Il prodotto di una rotazione propria ed una impropria è improprio.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ 0 & \sin \varphi' & \cos \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ 0 & \sin \varphi' & \cos \varphi' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos (\varphi + \varphi') & -\sin (\varphi + \varphi') \\ 0 & \sin (\varphi + \varphi') & \cos (\varphi + \varphi') \end{pmatrix}.$$

Dalla dimostrazione analitica di questi primi tre teoremi si trae l'affermazione della commutabilità del prodotto di due operatori di simmetria macroscopica qualunque, aventi i valori caratteristici  $\pm 1$  nella stessa direzione, che si può sempre assumere come asse  $x_1$ . Si verifica altresì immediatamente che ciascuno dei due operatori omotetici di simmetria macroscopica (centro di simmetria ed identità) è sempre permutabile, come è perfettamente logico, con qualunque altro operatore di simmetria macroscopica <sup>(4)</sup>.

d) *L'insieme delle rotazioni proprie in un gruppo forma un sottogruppo.* — Si verifica infatti facilmente che tale insieme soddisfa ai quattro postulati della teoria dei gruppi <sup>(2)</sup>;

1° il prodotto di due rotazioni proprie è una rotazione propria (Teorema a));

2° tra le rotazioni proprie esiste una operazione (l'identità  $\varphi = 0^\circ$ ) che gode delle proprietà di operazione unitaria e quindi l'insieme delle rotazioni proprie di un gruppo contiene l'unità;

3° se il gruppo considerato contiene una rotazione propria contiene anche l'inversa, la quale è ancora una rotazione propria, poichè è tale che il suo prodotto per la rotazione propria iniziale dà l'unità che è una rotazione propria (Teoremi a) e c)). Allora nell'insieme delle rotazioni proprie di un dato gruppo esiste sempre l'inversa di ogni operazione;

4° il prodotto delle rotazioni proprie gode, come prodotto matriciale, della proprietà associativa.

e) *Il numero di rotazioni improprie in gruppo finito è o zero oppure eguale al numero delle rotazioni proprie.* — Infatti possono benissimo esistere dei gruppi, sia finiti come infiniti, che non contengano delle rotazioni improprie. Se però in un gruppo finito esistono, in numero necessariamente finito, delle rotazioni improprie, queste, con i loro prodotti, danno delle rotazioni proprie, anch'esse contenute nel gruppo ed in numero finito; detto  $n$  il numero di rotazioni proprie distinte del gruppo, i prodotti di queste per una rotazione impropria danno  $n$  rotazioni improprie distinte. Queste sono tutte le rotazioni improprie del gruppo, perchè, se ce ne fossero più di  $n$ , eseguendone il prodotto per una di esse si otterrebbero più di  $n$  rotazioni proprie distinte, contro l'ipotesi <sup>(5)</sup>.

4. Dalla validità di codesto teorema segue la formulazione di alcune interessanti osservazioni sui gruppi finiti formati da sole rotazioni proprie ed improprie, di cui i gruppi cristallografici di simmetria macroscopica (ossia

(4) Matematicamente ciò consegue dalla commutatività del prodotto di due matrici diagonali qualunque (due operatori con valori caratteristici  $\pm 1$  nella stessa direzione hanno terne principali reali o complesse coincidenti) e di una matrice diagonale a termini eguali per una matrice qualunque. Dal primo fatto discende che è sempre commutabile il prodotto di operatori matriciali di simmetria macroscopica aventi terne principali in comune.

(5) Più concisamente: applicando a tutti gli elementi di un gruppo finito contenente rotazioni improprie, e quindi (teorema b)) rotazioni proprie, una rotazione impropria, le rotazioni proprie diventano improprie e viceversa. Esse sono allora in eguale numero.

gli insiemi di elementi di simmetria macroscopica che caratterizzano le classi cristalline) costituiscono un caso particolare.

Notiamo preventivamente che tra i gruppi cristallografici di simmetria macroscopica non contengono rotazioni improprie quelli che hanno come elemento generatore <sup>(2)</sup> un asse di rotazione propria ( $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6$ ), nonchè quelli che hanno come elementi generatori un asse di rotazione propria e perpendicolarmente una digira ( $D_2, D_3, D_4, D_6$ ) ed infine  $T, O$ .

L'insieme delle rotazioni improprie (se esistono) di uno qualunque dei gruppi finiti in istudio costituisce necessariamente, per quanto dimostrato in *c*), il solo complesso associato <sup>(2)</sup> del sottogruppo delle rotazioni proprie del gruppo considerato, nel senso che moltiplicando tutti gli elementi del sottogruppo delle rotazioni proprie per una delle rotazioni improprie del gruppo (se esistono) si ottengono semplicemente tutte le rotazioni improprie del gruppo stesso.

Complessi associati a destra ed a sinistra <sup>(3)</sup> di tale sottogruppo coincidono perciò in generale, nonostante che il gruppo non sia di regola abeliano <sup>(2)</sup>; si verifica qualcosa di perfettamente analogo a ciò che accade per i complessi associati del sottogruppo alternante del gruppo simmetrico, il quale non è abeliano <sup>(2)</sup>.

Esempi visivi si hanno considerando uno qualunque dei gruppi cristallografici di simmetria macroscopica contenenti rotazioni improprie: scegliamo il gruppo  $V_h$  (classe rombica bipiramidale). Moltiplicando i quattro elementi di rotazione propria del gruppo (costituiti dalle tre digire attorno agli assi  $x_1, x_2, x_3$  del riferimento cartesiano ortogonale - che denoteremo con  $\delta_2(x_1), \delta_2(x_2), \delta_2(x_3)$  - e dall'operatore identità - che denoteremo con  $\varepsilon$  -) per uno qualunque dei quattro elementi di rotazione impropria (costituiti dai tre piani di simmetria perpendicolari ai tre assi del riferimento prescelto - che denoteremo con  $\rho_h, \rho_2, \rho_3$  - e dal centro di simmetria - che denoteremo con  $i$  -), per esempio per il piano di simmetria perpendicolare ad  $x_1$  (ossia  $\rho_h$ ), si ottengono tutti e quattro gli elementi di rotazione impropria del gruppo

$$\begin{aligned}
 \delta_2(x_1) \cdot \rho_h &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i \\
 \delta_2(x_2) \cdot \rho_h &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \rho_3 \\
 \delta_2(x_3) \cdot \rho_h &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_2 \\
 \varepsilon \cdot \rho_h &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_h \\
 \rho_h \cdot \delta_2(x_1) &= i \quad ; \quad \rho_h \cdot \delta_2(x_2) = \rho_3 \quad ; \quad \rho_h \cdot \delta_2(x_3) = \rho_2 \quad ; \quad \rho_h \cdot \varepsilon = \rho_h
 \end{aligned}$$



Il sottogruppo delle rotazioni proprie costituisce poi per uno dei gruppi finiti di cui ci occupiamo un sottogruppo invariante <sup>(2)</sup>.

Infatti prendendo i coniugati <sup>(2)</sup> di tutti gli elementi di un tale sottogruppo rispetto ad un qualunque determinato elemento del gruppo in istudio non contenuto nel sottogruppo in parola, ossia rispetto ad una certa rotazione impropria, per il fatto che l'inverso di una rotazione impropria è una rotazione impropria, per quanto dimostrato in *b)* e *c)*, nonchè per il carattere gruppane dell'insieme di rotazioni proprie ed improprie considerato, si ottengono semplicemente tutti gli elementi dello stesso sottogruppo delle rotazioni proprie. Per attenerci al campo che ci interessa direttamente, proviamo che ad esempio gli elementi coniugati degli elementi del sottogruppo delle rotazioni proprie del gruppo  $V_h$  secondo  $\rho_h$  sono gli elementi stessi del sottogruppo considerato: innanzi tutto

$$\rho_h^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_h$$

per il fatto che il coseno è una funzione pari e che ci riferiamo ad una terna principale di  $\rho_h$ . Dato che poco sopra (V) abbiamo già eseguito i prodotti

$$\delta_2(x_1) \cdot \rho_h = \delta_2(x_1) \cdot \rho_h^{-1} = i$$

$$\delta_2(x_2) \cdot \rho_h = \delta_2(x_2) \cdot \rho_h^{-1} = \rho_3$$

$$\delta_2(x_3) \cdot \rho_h = \delta_2(x_3) \cdot \rho_h^{-1} = \rho_2$$

$$\varepsilon \cdot \rho_h = \varepsilon \cdot \rho_h^{-1} = \rho_h$$

basta qui calcolare

$$\rho_h \cdot i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \delta_2(x_1)$$

$$\rho_h \cdot \rho_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \delta_2(x_2)$$

$$\rho_h \cdot \rho_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_2(x_3)$$

$$\rho_h \cdot \rho_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon.$$

Il risultato che si ottiene conferma pienamente l'asserto.

Dalla proprietà dei gruppi finiti costituiti soltanto di rotazioni proprie ed improprie enunciata poco sopra, segue che il gruppo fattore <sup>(2)</sup> di un qualunque di questi gruppi rispetto al sottogruppo delle rotazioni proprie è di ordine uno (se il gruppo non contiene rotazioni improprie) oppure di ordine due.

Per fissare il concetto su di un esempio cristallografico notiamo come nel caso del gruppo  $V_h$ , già considerato più sopra, il gruppo fattore di  $V_h$  rispetto al sottogruppo invariante delle rotazioni proprie contenga come elementi questo stesso sottogruppo ed il suo unico complesso associato nel gruppo  $V_h$ , costituito dall'insieme delle rotazioni improprie di  $V_h$ .

Considerando invece un gruppo cristallografico di simmetria macroscopica non contenente rotazioni improprie, ad esempio  $C_3$ , è evidente che il gruppo fattore del gruppo in parola rispetto al sottogruppo delle rotazioni proprie, che coincide col gruppo stesso, contiene come elemento soltanto tale sottogruppo, ossia il gruppo dato.

Per alcuni dei gruppi cristallografici di simmetria macroscopica l'invarianza del sottogruppo delle rotazioni proprie segue senz'altro dal carattere abeliano del gruppo. In linea generale si può dire che sono abeliani quei gruppi finiti per cui sono comunque permutabili tra loro gli elementi generatori. Orbene godono perciò senz'altro di questa proprietà quei gruppi cristallografici di simmetria macroscopica che hanno un solo elemento generatore e quelli i cui elementi generatori sono riducibili a forma diagonale rispetto ad una stessa terna <sup>(4)</sup>; perciò sono abeliani tutti i gruppi ciclici  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6$ , nonchè  $S_2, S_4, S_6, C_{1h} \equiv S_1, C_{2h}, C_{3h} \equiv S_3, C_{4h}, C_{6h}$  ed i gruppi  $V \equiv D_2$  e  $V_h$ .

Per concludere queste considerazioni gruppalì, osserviamo che, come mostrerò in dettaglio in altra Nota, il carattere di gruppi finiti degli insiemi di elementi di simmetria macroscopica che caratterizzano le classi cristalline, consente di collegare a queste ultime delle algebre nel senso di Wedderburn, assumendo come unità gli elementi generatori del gruppo corrispondente.

Basti per ora accennare come i complessi delle algebre che si giunge ad edificare non vadano considerati come una estensione del concetto di numero, nel senso che a questo attribuisce Castoldi in un suo recente lavoro <sup>(6)</sup>. Infatti delle tre condizioni che Castoldi impone, per quanto da un altro punto di vista, come necessarie e sufficienti affinché un complesso a più unità possa ritenersi un numero (1° proprietà dell'annullamento del prodotto od hankeliana; 2° proprietà della permanenza del tipo considerato anche nel prodotto tra due degli enti presi in esame; 3° commutabilità del prodotto), e di cui la terza è già notoriamente non verificata dai numeri complessi ordinari  $a + bi$ , soltanto la seconda è in generale soddisfatta dai complessi delle algebre a più unità ed in una forma molto più lata di quella in cui la soddisfano i tensori-numeri di Castoldi, la cui struttura è già preventivamente delimitata dall'imposizione della proprietà hankeliana. È per questo che si possono considerare

(6) *Alcune osservazioni sui numeri complessi e sui quaternioni*. « Periodico di Matematiche », 20, 178 (1940).

complessi algebrici con un numero pari così come con un numero dispari di unità, mentre il concetto di numero è suscettibile (Castoldi) di una rigorosa estensione solo riferendosi a varietà euclidee con un numero pari di dimensioni, solo adottando un numero pari di unità.

Mi è particolarmente gradita l'occasione per manifestare pubblicamente la mia deferente gratitudine al mio Maestro prof. Perrier e per porgere un sincero ringraziamento al prof. L. Castoldi, libero docente di Fisica Matematica presso la nostra Università.

**Cristallografia.** — *Assi di simmetria composta e operatori matriciali di rotazione impropria.* Nota II<sup>(\*)</sup> di F. FUMI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. C. PERRIER.

Scopo di questa Nota è quello di accostare le conclusioni del metodo matematico di Seitz<sup>(1)</sup> ai classici risultati della cristallografia; tale esame comparativo porterà ad una modificazione dell'enunciato di un importante teorema del Seitz che, pur non alterandone la sostanza, ne precisa il campo di applicazione.

I. Notiamo subito che *dal punto di vista matriciale si considerano tanto assi di rotazione propria che impropria degli ordini 1, 2, 3, 4, 6*<sup>(1)</sup>; di questi ultimi hanno una loro individualità gli assi di rotazione impropria di ordine 3, 4, 6, in quanto ad essi corrispondono tre matrici caratteristiche

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$n = 3; \varphi = 120^\circ \qquad n = 4; \varphi = 90^\circ \qquad n = 6; \varphi = 60^\circ$

nel mentre gli assi di rotazione impropria di ordine 1 ( $n = 1; \varphi = 360^\circ$ )

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e di ordine 2 } (n = 2; \varphi = 180^\circ) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ non}$$

sono matricialmente delle nuove individualità, poichè ad essi corrispondano rispettivamente gli operatori del piano di simmetria  $x_2 x_3$  e del centro di simmetria o di inversione.

Ad un esame superficiale sembra manchi la corrispondenza tra questi rigorosi risultati analitici del metodo operatoriale di Seitz e le affermazioni della cristallografia geometrica a proposito degli assi-specchio.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) «Zs. f. Kryst.», 88, 433 (1934); cfr. anche F. FUMI, *Operazioni di simmetria macro- e microscopica*. In corso di stampa sul «Periodico di Mineralogia».

Invero, spesso ancora oggi, si parla in cristallografia soltanto di assi-specchio di ordine pari: le cosiddette *digiroidi* (coincidente col centro di simmetria, vale a dire con l'asse di rotazione impropria di ordine 2), *tetragiroidi* (elemento di simmetria della classe tetragonale bisfenoidica, coincidente con l'asse di rotazione impropria di ordine 4) ed *esagiroidi* (elemento di simmetria della classe trigonale romboedrica, decomponibile in un asse ternario semplice più il centro di simmetria, coincidente con l'asse di rotazione impropria di ordine 6).

Parrebbe perciò che manchino in cristallografia geometrica gli assi di simmetria composta corrispondenti agli assi di rotazione impropria di ordine dispari e precisamente di ordine 1 e 3.

Invero già il Panichi<sup>(2)</sup> aveva visto l'opportunità di introdurre in cristallografia geometrica accanto agli assi-specchio  $A_{n(2n)}$  ( $2n = 2, 4, 6$ ), gli assi-specchio  $A_{n(n)}$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 6$ ), che sono però solo formalmente nuovi elementi di simmetria, poichè rappresentano semplicemente la associazione di un asse girico  $A_n$  con il piano di simmetria perpendicolare. Nè va dimenticata la adozione, ormai ben diffusa anche in cristallografia geometrica, come assi di simmetria composta, degli assi di simmetria con inversione o brevemente assi di inversione  $A_n^-$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 6$ ) ai quali fa riferimento in una sua recente Nota su *Assi di inversione e sistematica delle classi di simmetria* il Balconi<sup>(3)</sup>.

\* Ci interessa mettere in risalto come l'uso degli assi di inversione  $A_n^-$ , meglio ancora che l'aggiunta degli assi-specchio  $A_{n(n)}$  a quelli  $A_{n(2n)}$ , valga a stabilire una perfetta corrispondenza tra le ordinarie trattazioni cristallografiche ed un metodo analitico rigoroso, quale quello operatoriale di Seitz. Infatti all'asse di rotazione impropria di ordine 1 corrispondono  $A_{1(1)}$  ed  $A_2^-$  (piano di simmetria); all'asse di rotazione impropria di ordine 2,  $A_{1(2)} \equiv A_1^-$  (centro di inversione); all'asse di rotazione impropria di ordine 3,  $A_{3(3)} \equiv A_6^-$ , a quello di ordine 4,  $A_{2(4)} \equiv A_4^-$  ed infine a quelle di ordine 6,  $A_{3(6)} \equiv A_3^-$ .

Gli assi  $A_{2(2)}$ ,  $A_{4(4)}$  e  $A_{6(6)}$  sono privi di corrispondente tra gli operatori matriciali di simmetria macroscopica.

Da quanto esposto appare chiaro il carattere puramente formale dell'esistenza dell'asse di rotazione impropria di ordine 3, che, appunto per la sua coincidenza con  $A_{3(3)}$  e con  $A_6^-$ , non rappresenta altro che l'associazione di una normale trigira  $A_3$  con il piano di simmetria perpendicolare, nonchè la non irriducibilità di quello di ordine 6, che per la sua coincidenza con  $A_{3(6)} \equiv A_3^-$ , è decomponibile in una trigira più il centro di simmetria.

È facile mostrare che, come è perfettamente logico, allo stesso risultato si perviene anche direttamente usando il metodo matrico-algebrico del Seitz: si applicano all'uopo gli operatori matriciali in discussione ad un generico

(2) *Elementi di simmetria indipendenti di I e II specie*. « Rend. Acc. Lincei », Sc. Fis. Mat. e Nat., VI, ser. 6<sup>a</sup>, pp. 326-330.

(3) « Rend. Soc. Min. It. », Anno III, p. 49.



vettore  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ , cui possiamo dare una interpretazione arbitraria, ad esempio (assumendolo di modulo unitario) quella di versore perpendicolare ad una faccia cristallografica.

Si constata che mentre gli assi di rotazione impropria di ordine 4 e di ordine 6 (tetragiroide ed esagiroide) riconducono allo stesso vettore di partenza dopo un giro completo<sup>(4)</sup>

*asse di rotazione impropria di ordine 4*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_3 \\ v_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_3 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

*asse di rotazione impropria di ordine 6*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 + v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 + v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 + v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 + v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(4) Per interpretare fisicamente i calcoli che si eseguono, basta rifarsi a quanto detto per la (III) nella Nota I (« Rend. Acc. Lincei », vol. III, fasc. 1-2, 1947).

l'asse di rotazione impropria di ordine 3 lo fa solo dopo due giri completi ed i sei vettori che fa corrispondere (tre di sopra e tre di sotto del piano  $x_2 x_3$ ) si corrispondono anche per una semplice trigira più il piano di simmetria normale;

*asse di rotazione impropria di ordine 3*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

*trigira*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

*piano di simmetria perpendicolare*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

I sei vettori che si corrispondono per la esagiroide si corrispondono invece anche per una trigira più il centro di simmetria

*trigira*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

*centro di inversione*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 + v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2/2 + \sqrt{3}/2 v_3 \\ -\sqrt{3}/2 v_2 - v_3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2/2 - \sqrt{3}/2 v_3 \\ \sqrt{3}/2 v_2 + v_3/2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$$

Con ciò resta provato anche per via matricò-algebrica che l'asse di rotazione impropria di ordine 3 ha esistenza puramente formale ed in ogni caso caratteristiche differenti dagli assi di rotazione impropria di ordine 4 e 6: di questi due poi è elemento irriducibile di simmetria solo quello di ordine 4.

2. Il teorema di Seitz cui si è fatto cenno all'inizio costituisce la premessa necessaria per la risoluzione del secondo problema che il Seitz si pone nella sua seconda Nota <sup>(5)</sup>, ossia *la determinazione dei gruppi di traslazione (reticoli di traslazione di Bravais) compatibili (invarianti) rispetto ai diversi gruppi di rotazione permessi.*

L'enunciato del Seitz dice in sostanza:

se una certa direzione di un dato cristallo è asse di rotazione propria di ordine 2 o maggiore di 2, è sempre compatibile con l'esistenza dell'asse considerato una traslazione in quella direzione. Lo stesso vale *ovviamente* se la direzione considerata è asse di rotazione impropria di ordine 3 o maggiore di 3.

Per quanto dimostrato l'affermazione contenuta nell'enunciato del Teorema di Seitz, secondo la quale l'esistenza di un asse di rotazione impropria di ordine 3 o 6 è compatibile con l'esistenza di una traslazione nella direzione dell'asse stesso, è una implicita conseguenza della compatibilità dell'esistenza di una trigira semplice con una traslazione nella sua direzione.

Perciò il Teorema in parola, se si vogliono evitare implicite ripetizioni, ossia se si vogliono nominare solo elementi di simmetria macroscopica che non si riconducano gli uni agli altri, va enunciato così:

« Se una certa direzione di un dato cristallo è asse di rotazione propria di ordine 2 o maggiore di 2 è sempre compatibile con l'esistenza dell'asse considerato una traslazione in quella direzione. Ciò vale anche se la direzione considerata è asse di rotazione impropria di *ordine 1 o di ordine 4* ».

Se, al contrario, si vogliono elencare tutti gli elementi di simmetria per cui vale tale teorema, ivi compresi quelli non irriducibili (come potrebbe far pensare la formulazione originale del Seitz) bisogna enunciarlo così:

« Se una certa direzione di un dato cristallo è asse di rotazione *propria* di ordine 2 e maggiore di 2 è sempre compatibile con l'esistenza dell'asse considerato una traslazione in quella direzione. Lo stesso vale se la direzione considerata è asse di rotazione *impropria di ordine 1 o di ordine 3 o maggiore di 3* ».

La necessità di citare l'asse di rotazione impropria di ordine 1 (piano di simmetria) deriva dal fatto che anche esso è sempre compatibile con una traslazione avente la sua direzione; infatti ad ogni traslazione possibile facente un certo angolo con la sua giacitura il piano di simmetria ne fa corrispondere una simmetrica, col che anche la differenza delle due traslazioni vettoriali possibili, la quale ha la direzione dell'asse di rotazione impropria, costituisce una traslazione possibile.

(5) « Zs. f. Kryst. », 90, 289 (1935).



**Petrografia.** — *La differenziazione magmatica nelle rocce del Lonzina (Colli Euganei)* (\*). Nota di A. RIEDEL e G. SCHIAVINATO, presentata (\*\*) dal Socio A. BIANCHI.

Il gruppo del Lonzina è costituito da alcuni piccoli colli raggiungenti un'altezza poco superiore ai 200 metri, collegati l'uno all'altro e sporgenti come un'isola dalla pianura alluvionale a nord est dei Colli Euganei. Il rilievo maggiore, il M. Lonzina propriamente detto, è una massa trachitica che si estende nella parte settentrionale del gruppo con direzione SW-NE, intersecata da alcuni filoni differenziati.

I piccoli dossi ad occidente della massa principale sono liparitici eccetto quello più meridionale che è pur esso trachitico. Ad oriente si nota un rilievo liparitico che presenta presso la chiesa di Tramonte un affioramento di calcari marnosi attribuibili all'eocene e rappresentanti il residuo del tetto di una formazione di tipo intrusivo. La piccola cupola basaltica di Muscaltò rappresenta l'estrema propaggine orientale del gruppo collinoso.

Il colle più meridionale è costituito da andesite che passa in parte a trachite verso W. Sulla sua cima si trova un embo di marne eoceniche concordanti e fortemente silicizzate per azione di contatto del magma. Sul fianco W si nota un altro lembo marnoso tagliato da un filone andesitico<sup>(1)</sup>.

Presso q. 101 un piccolo dosso allungato, costituito da frammenti di trachite e di andesite di vario tipo assieme a tufi vulcanici biancastri può venir considerato il residuo di un neck, per analogia con altre simili formazioni euganee.

I rapporti intercorrenti fra le rocce che nell'area relativamente ristretta del M. Lonzina manifestano, come si è visto, una notevole varietà di tipi, ed il chimismo delle rocce stesse, offrono degli elementi utili per stabilire l'ordine di successione delle varie fasi dell'attività magmatica nel settore considerato ed in quello più vasto della regione euganea.

Vediamo innanzi tutto brevemente i caratteri chimico-petrografici delle principali rocce del M. Lonzina.

a) **BASALTO.** — Si rinviene nello sperone orientale del M. Lonzina, a sud est del Monastero di Praglia. La roccia che in gran parte è alterata

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Il MADDALENA («Atti Soc. Ital. Sc. Nat.», XLIX, 1910), pur riconoscendo (contrariamente alle idee di Suess e Reyer) l'indipendenza delle masse eruttive del M. Lonzina, negava però che si trattasse di formazioni a carattere intrusivo data l'assenza di rocce della copertura. Il rilevamento di M. STARK («Min. u. Petr. Mitt.», XXIV, 1942) e le nostre osservazioni portano però a concludere che almeno per alcune delle masse eruttive del M. Lonzina l'ipotesi di una intrusione non solo è ammissibile ma è documentata da quanto esposto.

TABELLA I.

	1	2	3
SiO <sub>2</sub>	49,59	56,57	62,01
TiO <sub>2</sub>	2,37	1,75	0,61
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0,30	0,62	0,51
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	15,31	15,91	16,30
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3,48	2,43	4,09
FeO	7,49	4,84	1,00
MnO	0,15	0,11	0,09
MgO	6,29	3,30	0,90
CaO	7,81	4,96	3,48
Na <sub>2</sub> O	3,20	4,22	4,85
K <sub>2</sub> O	2,16	3,54	5,31
H <sub>2</sub> O—	0,22	0,98	0,28
H <sub>2</sub> O+	1,21	0,83	0,75
	99,58	100,06	100,18

1 *Basalto di Muscalbò* (Anal. G. Schiavinato)2 *Andesite M. Lonzina* » » »3 *Trachite M. Lonzina* » » »

	1	2	3
si	123	177	232
al	22,4	29,4	35,9
fm	45,7	34,1	19,9
c	20,8	16,6	14,0
alc	11,1	19,9	30,2
k	0,31	0,35	0,42
mg	0,51	0,45	0,25
c/fm	0,45	0,49	0,70
qz	— 21	— 3	+ 11
ti	4,48	4,11	1,70
p	0,30	0,83	0,80

« Base »

	1	2	3
Q	22,2	35,5	39,5
Kp	7,9	12,8	18,9
Ne	17,6	23,1	26,3
Cal	12,9	8,6	4,3
Cs	4,9	2,7	2,2
Fs	3,8	2,5	4,3
Fo	13,3	7,8	1,8
Fa	9,1	5,8	1,3
Ru	1,7	1,2	0,4
Cp	0,6	0,8	1,0
Q	22,2	35,5	39,5
L	38,4	44,5	49,5
M	32,8	19,2	10,0

Norma molecolare di catazona

	1	2	3
Q	—	2,2	7,0
Or	10,7	21,4	31,5
Ab	29,4	38,5	43,9
An	21,5	14,4	7,1
Wo	6,5	3,6	2,9
En	17,8	9,3	2,4
Hy	3,5	6,1	—
Fa	4,5	—	—
Mt	3,8	2,5	2,6
Hm	—	—	1,2
Ru	1,7	1,2	0,4
Cp	0,6	0,8	1,0

e fessurata ha l'aspetto di basalto doleritico. Essa fu già oggetto di studio da parte di G. Dal Piaz<sup>(2)</sup> e L. Maddalena<sup>(3)</sup> e rimandiamo pertanto a questi Autori per i dettagli petrografici. Fondamentalmente è costituita da feldispato in due distinte generazioni: una di fenocristalli ben sviluppati, notevolmente zonati, di composizione in prevalenza labradoritica (per esempio in un gem. albite-Carlsbad abbiamo misurato: centro I 24°, II 27° = 58 % An; bordo I, 19°, II, 20° = 40 % An); una seconda costituita da individui microlitici o granulari di composizione andesinica nella massa di fondo. Sul pirosseno, che si presenta pure sia come intercluso sia sotto forma di minuta generazione granulare, abbiamo determinato al T. U.:  $2V = 50^\circ$ ,  $c:\gamma = 39^\circ$ <sup>(4)</sup>. L'olivina è quantitativamente subordinata e spesso alterata in serpentino. Accessori: ossidi di ferro ed apatite.

Il ritrovamento di un campione molto fresco ci ha consigliato di effettuare per questa roccia una nuova analisi chimica che è riportata, assieme alla formula magmatica ed alla composizione mineralogica normativa<sup>(5)</sup>, nella Tabella I. La composizione chimica che pone questa roccia fra i tipi magmatici gabbrodioritici normali e quelli gabbrico-sodici, ricorda il basalto doleritico di Teolo e poco differisce dalla media dei basalti euganei come risulta dal seguente quadro:

	si	al	fm	c	alc	k	mg	qz
tipo basaltico medio (Euganei)	127	22,5	43,5	22	12	0,20	0,49	-21
basalto Muscibò	123,3	22,4	45,7	20,8	11,1	0,31	0,51	-21

b) ANDESITE E TRACHITE. — Sono già state oggetto di studio particolare da parte di L. Maddalena e di uno di noi<sup>(6)</sup>; ci limitiamo perciò a riportarne nella tabella I i dati dell'analisi chimica oltre ai coefficienti magmatici ed alle percentuali dei componenti normativi da essa dedotti. Sul chimismo di queste rocce ritorneremo brevemente nella conclusione di questa Nota. L'andesite è nera, porfirica, con fenocristalli di labradorite e di augite e massa di fondo ipocristallina; la trachite è ricca di interclusi plagioclasici zonati, con più rari elementi di pirosseno e di biotite, in una pasta fondamentale criptocristallina con microlititi di oligoclasio e sanidino.

c) LIPARITE. — È stata studiata da L. Maddalena ed è per aspetto e per composizione mineralogica corrispondente alla liparite del vicino M. Solone ed a quella ben nota del M. Venda. Rispetto a quest'ultima, che nella

(2) « Riv. Miner. e Crist. », vol. XVI, 1896.

(3) « Atti Soc. Ital. Sc. Nat. », vol. XLIX, 1910.

(4) La determinazione dell'angolo di estinzione  $c:\gamma$  nei pirosseni e negli anfibi delle rocce descritte in questa Nota fu sempre fatta al T. U. col metodo proposto da C. BURRI (« Schweiz. Miner. Petr. Mitt. », XI, 2, 1931).

(5) P. NIGGLI, « Schweiz. Miner. Petr. Mitt. », Bd. XVI, 1936.

(6) G. SCHIAVINATO, *Contributo alla conoscenza chimico-petrografica degli Euganei*. « Mem. R. Accad. Sc. Lett. ecc. », LVII, Padova 1941; e *Studio chimico-petrografico dei Colli Euganei*. « Mem. Ist. Geol. Università di Padova », vol. XV.

composizione chimica manifesta una notevole tendenza alcalino-sodica, nella liparite del Lonzina si nota però una maggiore abbondanza di interclusi sanidini ed una minore diffusione del quarzo e quindi nell'insieme una certa tendenza verso le trachilipariti.

d) FILONI. - Nella massa trachitica sopracitata lungo la mulattiera che corre poco ad oriente di quota 235, a sud-ovest del convento di Praglia, si incontrano vari affioramenti filoniani di aspetto porfirico per la presenza di interclusi feldispatici biancastri e di numerosi cristalli aciculari di orneblenda in una massa minuta grigio-chiara.

Il maggiore di questi filoni ha una potenza variabile dai 6 ai 10 metri e direzione NE-SW. È interessato da numerosi piani di fessurazione.

In sezione sottile i fenocristalli feldispatici, del tutto esenti da alterazione, presentano un netto idiomorfismo ed appaiono frequentemente geminati secondo la legge dell'albite o dell'albite-Carlsbad; per i primi, che sono di solito di dimensioni più ridotte, l'angolo massimo di estinzione in zona simmetrica è risultato di  $26^\circ$  indicando un contenuto di circa 50 % di anortite al quale corrisponde una composizione andesinico-labradoritica. In un geminato albite-Carlsbad abbiamo eseguito invece le seguenti misure: I  $31^\circ$ , II  $10^\circ$ , che corrispondono ad una labradorite media al 60 % di anortite.

L'orneblenda bruna è in cristalli di discrete dimensioni per lo più idiomorfi, talora sensibilmente riassorbiti, sempre fortemente pleocroici con:  $\alpha$  = giallo brucio,  $\beta$  = bruno molto intenso,  $\gamma$  = bruno scuro, e  $\beta \approx \gamma$ .

L'angolo di estinzione  $c:\gamma$  è risultato di  $16^\circ$ - $17^\circ$  ed il segno ottico negativo con angolo degli assi ottici molto ampio da  $2V_\alpha = 70^\circ$  a  $2V_\alpha = 90^\circ$ .

Rarissimo il pirosseno del quale abbiamo misurato un angolo di estinzione  $c:\gamma$  di  $50^\circ$  ed un angolo degli assi ottici  $2V_\gamma = 60^\circ$ . Pure assai rara la biotite.

Del tutto caratteristiche della roccia sono le dimensioni riguardevoli degli elementi di apatite e magnetite perfettamente idiomorfi che spiccano nella massa di fondo come tipici fenocristalli. Non di rado la prima è inclusa nella magnetite che a sua volta può essere inglobata dall'anfibolo o dal plagioclasio definendo così chiaramente l'ordine della successione paragenetica dei minerali costituenti la roccia.

La pasta di fondo presenta una struttura jalopilitica ed è costituita da un feltro di microliti feldispatici allungati oligoclasici o sanidini con evidente disposizione fluidale intorno ai fenocristalli. Negli interstizi si nota poca *sostanza vetrosa* bruno-chiara, mentre una fitta e finissima granulazione di ossidi di ferro è cosparsa in tutta la roccia.

Nella tabella II sono riportati, oltre ai risultati dell'analisi mineralogica quantitativa e dell'analisi chimica, anche la formula magmatica e la composizione normativa molecolare. Va rilevato il buon accordo fra questa e la composizione mineralogica osservata, tenendo presente che nella roccia al posto dei pirosseni compaiono in prevalenza gli anfiboli. L'elevata percen-



tuale del componente normativo Or fa ritenere che del feldispato potassico sia presente nella massa di fondo oltre che come componente delle miscele oligoclasiche, anche sotto forma di ortoclasio o sanidino o anortoclasio. Il sicuro riconoscimento di questi minerali e la loro determinazione quantitativa non sono possibili a causa delle dimensioni estremamente ridotte.

TABELLA II.

*Gauteite del M. Lonzina (Anal. G. Schiavinato).*

		Composizione mineralogica osservata (% in volume)	
SiO <sub>2</sub>	57,02		
TiO <sub>2</sub>	1,25		
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0,78	Feldispato della massa fondamentale (oligoclasio, sanidino)	73,6
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	17,66	Plagioclasio (fenocristalli), 50-60 % An	6,5
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4,16	Anfiboli e tracce di pirosseno e di biotite . . . . .	9,3
FeO	2,09	Magnetite . . . . .	6,0
MnO	0,17	Apatite . . . . .	1,6
MgO	2,17	Prodotti secondari e vetro . . . . .	3,0
CaO	4,58		
Na <sub>2</sub> O	4,72	si 187, al 34,1, fm 26,8, c 16,2, alc 22,9, k 0,34, mg 0,39, ti 2,96, p 0,99, c/fm 0,50, qz - 3,4.	
K <sub>2</sub> O	3,78		
H <sub>2</sub> O-	1,50		
H <sub>2</sub> O+	0,55		
	100,43		

« Base ».

*Norma molecolare di catazona.*

Q	36,2	
Kp	13,7	} 48,9 = L
Ne	25,7	
Cal	9,5	
Cs	1,0	} 13,4 = M
Fs	4,4	
Fo	4,5	
Fa	2,6	
Ru	0,9	
Cp	1,5	

Q	3,6	
Or	22,9	} 81,7
Ab	42,9	
An	15,9	
Wo	1,3	} 7,9
En	6,0	
Hy	0,6	
Mt	4,4	
Ru	0,9	
Cp	1,5	

Per quanto riguarda la classificazione magmatica bisogna notare che, quantunque non si tratti di un termine decisamente alcalino, il tipo analizzato soprattutto per i valori *alc* e *c* si inquadra fra i magmi dioritico-essexitici della serie sodica, manifestando le maggiori analogie con i tipi kassaitico e larvikitico, come risulta dal seguente prospetto:

	si	al	fm	c	alc	k	mg
T. larvikitico	170	37	21	17	25	0,30	0,35
<i>Fil. M. Lonzina</i>	187,2	34,1	26,8	16,2	22,9	0,34	0,39
T. kassaitico	170	33	23	19	25	0,25	0,35

In complesso la roccia considerata, sia per la composizione magmatica <sup>(7)</sup>, come per la composizione mineralogica <sup>(8)</sup>, presenta i caratteri di quei filoni differenziati che Hibschi denominò *gauteiti* dalla località del Mittelgebirge boemo nella quale si rinvennero, e che furono pure segnalati nell'isola di Celebes, nel Montana, ed a Predazzo <sup>(9)</sup>.

Alcuni filoni di potenza subordinata rispetto a quello ora descritto presentano facies poco dissimili ma con una notevole riduzione della percentuale degli elementi femici. Al microscopio rivelano una massa di fondo omogenea, a struttura jalopilitica costituita quasi esclusivamente da feldispatici alcalini e contenenti rari e poco sviluppati fenocristalli di orneblenda e di biotite. Queste facies rappresentano perciò dei termini di transizioni fra il tipo *gauteitico* sopra descritto e quei filoni differenziati aplitici ricchissimi di feldispatici alcalini noti sotto il nome di *bostoniti*.

In un punto nel quale la mulattiera lo incide profondamente, il maggiore dei filoni sopra descritti contiene un piccolo filone della potenza di 50-60 cm. costituito da una roccia nera compatta, a struttura porfirica rilevabile anche macroscopicamente. Gli interclusi feldispatici sono bene sviluppati ed esenti da alterazione; talora però appaiono profondamente riassorbiti con intrusione della pasta di fondo. La zonatura è pronunciata e la composizione è labradoritica come si può rilevare dalle misure sui geminati albite (56 % An) e sui geminati albite-Carlsbad (esempio I, 12°, II, 29°, = 56 % An). Nettamente più acidi sono invece i plagioclasti microlitici della pasta di fondo che presentano una abbastanza spiccata orientazione fluidale ed ai quali, in base al confronto con l'indice del balsamo, si può attribuire una composizione oligoclasica.

Abbastanza diffuso il pirosseno in elementi irregolari quasi incolori. L'angolo di estinzione  $c : \gamma$  è risultato di 42° mentre per 2 V si sono ottenuti valori compresi tra 48° e 51°.

(7) P. NIGGLI, *Gesteins und Mineral Provinzen*, I, Berlin, 1923, p. 162.

(8) E. TRÖGER, *Spezielle Petrographie der Eruptivgesteine*, Berlin, 1935, p. 108.

(9) J. ROMBERG, *Ueber die chemische Zusammensetzung der Eruptivgesteine in den Gebieten von Predazzo und Monzoni*. Berlin, 1904, p. 77.

Piuttosto scarsa l'olivina in piccoli elementi irregolari. In qualche punto della roccia si rilevano tracce di orneblenda bruna circondata da un pronunciatissimo bordo opacitico nerastro nel quale predominano gli ossidi di ferro. Nella massa di fondo si nota una minuta granulazione degli stessi minerali che compaiono come fenocristalli, numerosi granuli di magnetite e dell'apatite sia in cristalli di dimensioni relativamente notevoli, sia in minutissimi individui uniformemente distribuiti nella pasta fondamentale.

TABELLA III.

*Filone basico del M. Lonzina (Anal. A. Riedel).*

SiO <sub>2</sub>	50,79	Q <sup>*</sup>	29,8		Or	15,4
TiO <sub>2</sub>	2,39	K <sub>2</sub> P	9,2	45,2 = L	Ab	41,5
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0,98	Ne	24,9		An	18,6
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	16,76	Cal	11,1		Wo	4,8
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3,14	Cs	3,6	23,0 = M	Fo	7,5
FeO	5,61	Fs	3,4		Fa	5,1
MnO	0,09	Fo	7,5		Mt	3,4
MgO	3,52	Fa	6,8		Ru	1,7
CaO	7,18	Ru	1,7		Cp	2,0
Na <sub>2</sub> O	4,52	Cp	2,0			
K <sub>2</sub> O	2,54					
H <sub>2</sub> O—	0,81	$\pi = 0,25$			$\mu =$	0,33
H <sub>2</sub> O+1	0,97	$\gamma = 0,16$			$\alpha =$	— 0,04

*Valori Niggli:*

si 141,5; al 27,4; fm 34,5; c 21,4; alc 16,7; k 0,27; mg 0,42; ti 5,0; p 1,2;  
c/fm 0,62; qz — 25.

I risultati dell'analisi chimica sono riportati nella tabella III, assieme alle formule magmatiche « Niggli ». Queste trovano buona rispondenza nel gruppo dei magmi gabbriici della serie sodica ed in particolare nel tipo mugearitico per il quale si ha: si 135, al 24, fm 42, c 18, alc 16, k 0,25, mg. 0,60 qz — 29. Una corrispondenza assai meno stretta si nota invece con i magmi dioritici della serie alcali-calcica. Riferendoci particolarmente alle rocce basiche euganee non si può non rilevare la assai più stretta analogia esistente fra la roccia considerata e quelle filoniane a carattere lamprofirico piuttosto che fra la prima e le rocce basiche in massa. Ciò risulta chiaramente dal seguente prospetto:

	si	al	fm	c	alc	k	mg	qz
1	140	25	38,5	19,5	17	0,30	0,39	— 28
2	141,5	27,4	34,5	21,4	16,7	0,27	0,42	— 25
3	127	22,5	43,5	22	12	0,20	0,49	1,21

nel quale: 1 = media delle rocce filoniane euganee trachandesitico-camp-tonitiche; 2 = filoncello basico del M. Lonzina; 3 = media delle rocce basaltiche euganee in massa.

Anche i coefficienti  $ti$  e  $p$  presentano dei valori più elevati di quelli relativi alla media delle rocce basaltiche di massa avvicinandosi invece o raggiungendo quelli caratteristici per le facies filoniane basiche euganee e per quelle lamprofiriche in generale.

e) OSSERVAZIONI SUL CHIMISMO DELLE ROCCE E SULL'ORDINE DI SUCCESSIONE DELLE VARIE FASI DELL'ATTIVITÀ ERUTTIVA. — Alle prime fasi dell'attività magmatica manifestatasi come è noto negli Euganei nella prima parte del Terziario contemporaneamente alle assai più estese effusioni di magmi femici ed ultrafemici nel Veneto centrale ed occidentale (Monti Berici, Monti Lessini ecc.), va riferita la piccola cupola basaltica di Muscaltò, nello sperone orientale del M. Lonzina <sup>(10)</sup>. Ad una successiva ripresa dell'attività eruttiva sono invece da ricondurre, anche per analogia con quanto è ormai accertato per il rimanente territorio euganeo, le masse liparitiche della regione sud-occidentale oltre che la formazione trachitica che costituisce la parte più elevata del piccolo gruppo montuoso e che, dalla facies alla quale si è accennato in precedenza (vedi tabella I), passa sia sul versante orientale come su quello occidentale verso tipi nettamente più acidi e più ricchi di feldispati alcalini. Quanto alla massa di andesite del dosso sud-orientale del M. Lonzina sembra difficile poter stabilire con sicurezza, soprattutto a causa delle condizioni del terreno, in quale rapporto sia con le formazioni eruttive già citate. Come già osservato in precedenza dalla roccia andesitica si passa verso occidente a facies trachitiche, e ciò avviene senza che si possa osservare una indipendenza delle due rocce come se queste risultassero dalla solidificazione di un unico complesso magmatico già differenziato nelle sue parti ed intrusosi come tale nelle marne. Se ciò risponde a realtà, l'eruzione dell'andesite sarebbe quindi contemporanea o quasi a quella della trachite.

In questa massa andesitico-trachitica e nella stessa massa trachitica principale del M. Lonzina si notano inoltre alcuni limitati affioramenti talora chiaramente filoniani ed aventi un aspetto di trachiti piuttosto acide o di andesiti anfiboliche a facies spiccatamente porfirica. Sulla base di osservazioni effettuate anche in altri settori degli Euganei siamo perciò indotti a ritenere che alle effusioni ed alle iniezioni di vario tipo delle grandi masse liparitiche, trachitiche ed andesitiche, sia succeduto un periodo di quiete nell'attività vulcanica, e che soltanto più tardi in limitate fratture attra-

(10) Il basalto di Muscaltò è ritenuto anche da L. MADDALENA (op. cit. p. 29) certamente più antico della trachite dalla quale è in qualche punto palesemente iniettato. Inclusi enalogeni di basalto sono d'altra parte contenuti nella trachite stessa.



versanti indifferentemente tutte le formazioni rocciose eruttive, sedimentarie e piroclastiche, si siano avute dall'ultimo focolaio magmatico rimasto attivo, delle iniezioni di un magma debolmente differenziato in senso aplitico (filoni a facies trachiliparitica o trachitica che ricordano le bostoniti e le gauteiti<sup>(11)</sup>), ed in senso lamprofirico (filoni trachiandesitici e trachibalsatici a carattere più o meno spiccatamente camptonitico). Questi ultimi chiudono l'attività magmatica nella regione euganea come è documentato chiaramente dal fortunato ritrovamento dei due filoni intrecciati descritti nelle pagine precedenti<sup>(12)</sup>.

Le considerazioni svolte trovano una conferma nel chimismo delle rocce considerate di cui la rappresentazione triangolare riprodotta nella fig. 1 ed ottenuta mediante i tre raggruppamenti fondamentali delle « basi », Q, L ed M, offre una sintetica ed efficace espressione. Il basalto di Muscabò (N. 1) cade nel campo dei basalti a carattere prevalentemente alcali-calcico (delimitato dalla linea punteggiata) nel quale pure, come uno di noi ha dimostrato<sup>(13)</sup> sono comprese altre rocce basiche degli Euganei e dei Berici sicuramente pretrachitiche e costituenti corpi eruttivi di notevole entità quasi

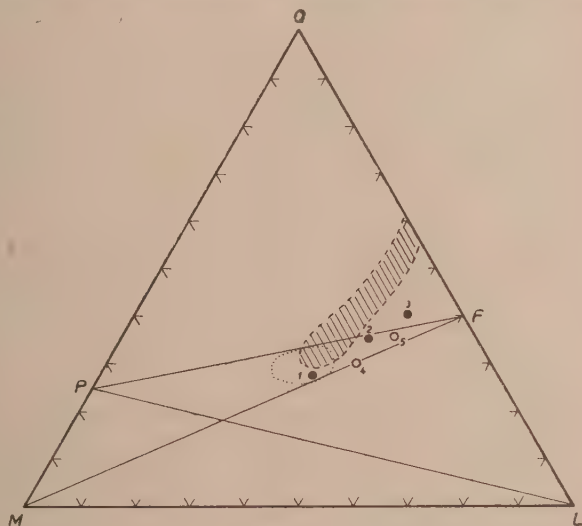


Fig. 1.

sempre iniettati sotto una copertura sedimentaria. L'andesite e la trachite in massa del Monte Loncina (N. 2 e 3) segnano con il basalto di Muscabò un perfetto allineamento indice di una regolare ed unitaria differenziazione del magma dal quale hanno avuto origine. Tale allineamento si trova già al di fuori del campo caratteristico per le associazioni spiccatamente pacifiche, delimitato nella fig. 1 dalla linea tratteggiata e stabilito mediante ricerche

(11) Non vanno confusi con questi alcuni grandi dicchi trachitici della regione centrale degli Euganei che appaiono più verosimilmente come propaggini di masse trachitiche sottostanti spintesi attraverso le fratture delle rocce della copertura e riferibili quindi alla fase principale dell'attività eruttiva.

(12) Un analogo motivo di filoncelli lamprofirici che tagliano un altro filone pure differenziato ma più acido, fu da noi osservato anche lungo la mulattiera che da Castelnuovo conduce a Monte Venda.

(13) G. SCHIAVINATO, *Ricerche chimico-petrografiche sui Monti Berici*. « Rend. della Soc. Min. Ital. », III, 1946.

statistiche da P. Niggli<sup>(14)</sup>. Si conferma così, anche per queste rocce, un chimismo intermedio fra l'alcali-calcico e l'alcalino già riscontrato in tutta la provincia petrografica euganea.

I due filoni analizzati (N. 4 e 5) si scostano invece sensibilmente dall'allineamento delle rocce di massa accentuando il distacco dalle differenziazioni pacifiche per portarsi verso le posizioni dei magmi più decisamente alcalini e delineando una abbastanza marcata differenziazione in questo senso per i residui magmatici a medio ed a basso contenuto di silice. Il filoncello basico del M. Lonzina presenta quindi dei caratteri che ci autorizzano a considerarlo una vera e propria manifestazione tardiva di tipo lamprofirico che riflette motivi particolari di differenziazione magmatica caratteristici del chimismo euganeo.

**Fisiologia vegetale.** — *Azione antimitotica dei prodotti del metabolismo fungino*<sup>(\*)</sup>. Nota di F. M. GEROLA, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. GOLA.

Nelle mie Note precedenti<sup>(1)</sup> ho potuto mettere in evidenza la presenza di sostanze mitoinibitorie o addirittura carioclasiche nei filtrati di cultura e nel pressato del feltro miceliare di alcuni funghi isolati dalla rizosfera di diverse piante a micorrizza.

A questa particolare mitoinibizione avevo ravvicinato quanto si è acquisito recentemente sull'azione batteriostatica di varie sostanze isolate dai filtrati di cultura di numerosi funghi.

D'altro lato avevo potuto trovare numerose analogie tra le azioni esercitate dai filtrati da me esaminati sulle radici immerse in essi (blocco della mitosi, impedimento della crescita per distensione di alcune zone della radice, mancanza di peli radicali, ecc.) ed il particolare aspetto morfologico e citologico assunto dalle micorrizze di molte piante superiori.

La ricerca di nuove sostanze ad azione batteriostatica più intensa, ed attive anche verso nuove specie batteriche resistenti all'azione di quelle finora note, ha fatto rivolgere con successo l'attenzione di vari studiosi ai funghi maggiormente evoluti, ed in particolare agli Imenomiceti. Bose (1945)<sup>(2)</sup> ha potuto così rilevare che sia i filtrati di cultura, sia gli estratti del corpo fruttifero (« sporophore extracts ») di *Polyporus* sp., producono delle zone litiche nelle piastre di cultura di vari Schizomiceti.

Per quanto invece si riferisce al complesso problema della micorrizza, se ormai certa (specialmente dopo i lavori di Melin e di Peyronel) è l'importanza

(14) « Schweiz. Min. Petr. Mitt. », XVIII, 1938.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) F. M. GEROLA, « Rendic. Acc. Naz. Lincei » (1946 e 1947).

(2) S. R. BOSE, « Nature », 156 (1945).

degli Imenomiceti nella formazione di alcuni tipi di micorrizia, tuttavia ancora discussa è l'importanza di tale simbiosi, e tutt'ora in ipotesi è la spiegazione di alcuni fenomeni da essa dipendenti (come ad esempio la sterilità del terreno che si manifesta in corrispondenza delle zone ove si sviluppano i corpi fruttiferi nei « circoli delle streghe », analoga a quella rilevata da Mattiolo per le tartufoie di *Tuber melanosporum* in simbiosi sulle radici di *Quercus Ilex*).

Ho eseguito pertanto ricerche analoghe a quelle descritte nelle mie Note precedenti, anche sui pressati dei corpi fruttiferi di alcuni funghi superiori. E ciò particolarmente in seguito a quanto avevo già notato in relazione alla presenza nei pressati del feltro miceliare dei funghi di cultura di sostanze mitoinibitorie.

L'influenza dei pressati dei corpi fruttiferi sui nuclei vegetali in mitosi non era stata ancora esaminata; nel campo animale recentemente Serre e Cazal<sup>(3)</sup>, con iniezioni di estratti di *Amanita* avevano notato nel parenchima epatico una intensa distruzione nucleare per cariolisi, cariorresi e pinosi, e nelle cortico-surrenali la mitosi di cellule adulte, mostranti metafasi atipiche con cromosomi mal orientati, disposti in ammasso.

Pressai al torchio i corpi fruttiferi di alcuni funghi superiori, e nel succo ottenuto immersi le radici di giovani piantine di frumento. Estesi questo mio esame sia a Basidio- che ad Ascomiceti, a funghi semplicemente saprofiti e ad altri parassiti, ed ad altri ancora partecipanti sicuramente alla simbiosi micorrizica.

In una ricerca preliminare, eseguita direttamente sui pressati freschi di un gran numero di corpi fruttiferi, misurai unicamente l'eventuale allungamento delle radici e del coleoptile delle piantine immerse nei succhi, ritenendo ormai (dopo quanto avevo potuto osservare nelle mie precedenti esperienze), che al blocco dell'allungamento della radice e del coleoptile sia legata una notevole azione carioclasica dei succhi, mentre il blocco dell'allungamento della sola radice rispecchi la presenza di sostanze molto meno tossiche per le cellule.

Riporto l'elenco dei funghi presi in esame, indicando per ciascuno i valori proporzionali dell'allungamento della radice (primo numero) e quello dei coleoptili (secondo numero) delle piantine immerse nei pressati.

<i>Amanita caesarea</i>	0-2	<i>Lactarius scrobiculatus</i>	0-0
<i>Amanita muscaria</i>	0-2	<i>Lactarius thejogalus</i>	0-0
<i>Amanita pantherina</i>	0-2	<i>Lactarius deliciosus</i>	0-0
<i>Lepiota procera</i>	0-2	<i>Boletus bovinus</i>	0-2
<i>Russula cyanotantha?</i>	0-0	<i>Boletus scaber</i>	0-0
<i>Russula rosea</i>	0-0	<i>Boletus edulis</i>	0-0
<i>Hypholoma fasciculatum</i>	0-1	<i>Polyporus confluens</i>	0-1
<i>Tricholoma colossus</i>	0-0	<i>Clavaria cinerea</i>	0-0
<i>Gomphidius viscidus</i>	0-0	<i>Hydnum imbricatum</i>	0-1
<i>Armillaria mellea</i>	0-0	<i>Lycoperdon maximum</i>	0-1
<i>Clitocybe infundibuliformis</i>	0-0		

(3) M. SERRE et P. CAZAL, « C. R. Soc. Biol. », 137, Paris (1943).

In nessun caso si è avuto un allungamento sensibile della radice.

L'allungamento del coleoptile non subisce sempre un analogo arresto, e ciò in maniera corrispondente a quella che avevo già potuto constatare per i filtrati di cultura.

Di alcuni dei funghi sopra menzionati ed inoltre di altri due (*Polyporus pubescens* e *Lepiota naucina*) eseguii anche l'esame citologico delle radici immerse nei pressati dei corpi fruttiferi.

Ecco i risultati (4).

Controllo in H <sub>2</sub> O	484-290-3	= 348-229-5 = 344-210-5
<i>Lepiota naucina</i>	6 - 3 - 0	= 0 - 0 - 0 = 0 - 0 - 0
<i>Tricholoma colossus</i>	0 - 0 - 0	= 0 - 0 - 0 = 0 - 0 - 0
<i>Gomphidium viscidus</i>	335-209-0	= 392-244-0 = non colorato
<i>Armillaria mellea</i>	0 - 0 - 0	= 0 - 0 - 0 = 0 - 0 - 0
<i>Russula cyanotantha</i>	0 - 0 - 0	= 0 - 0 - 0 = 0 - 0 - 0
<i>Clitocybe infundibuliformis</i>	0 - 0 - 0	= non colorato
<i>Polyporus pubescens</i>	210-143-0,5	= 571-280-2 = 303-142-2
<i>Lycoperdon maximum</i>		non colorato.

In *Tricholoma* e *Russula* ho potuto constatare la espulsione della cromatina nucleare dal nucleo e sua diffusione nel plasma cellulare sotto forma di goccioline. Un tale fenomeno era già stato osservato da Cappelletti (1930) (5), nelle cellule delle radici di *Allium* intossicate da filtrati di *Rhizoctonia*; in queste cellule si notava « la trasformazione della cromatina nucleare in una sola cromatina di tipo nucleinico... successivamente la nucleolina, staccata dal reticolo nucleare, viene espulsa gradatamente dalla membrana nucleare e si raccoglie in grosse goccioline, appoggiate alla periferia del nucleo ». Già dai preparati da me ottenuti con la colorazione di Feulgen si potevano osservare delle figure nucleari analoghe a quelle descritte da Cappelletti; in seguito, usando la medesima tecnica di colorazione all'ematossilina-saffranina, potei constatare che la cromatina espulsa era di tipo nucleinico ed ossi-cromatinico. Come unica differenza da quanto fu messo in evidenza da Cappelletti è da notare una rapidità molto maggiore del manifestarsi di questi fenomeni di smescolamento cromatinico (già nelle prime ore di intossicazione), in quanto nei filtrati di *Rhizoctonia* « già al terzo giorno compaiono i segni della disorganizzazione cellulare ».

In *Armillaria* ho riscontrato un'azione in parte analoga alla precedente, ma meno intensa, in quanto pur verificandosi nell'interno del nucleo la frammentazione della cromatina in goccioline, non si osservava mai, almeno nelle prime 72 ore, la sua espulsione nel plasma cellulare.

(4) In questa e nelle tabelle successive nelle tre colonne corrispondenti ai tempi di azione dei succhi sulle radici, il primo numero indica il numero totale delle mitosi osservate nell'apice radicale, il secondo il numero delle metafasi, il terzo un punto di merito sulla crescita in lunghezza della radice.

(5) C. CAPPELLETTI, « Annali di Botanica », 19 (1930).



In *Clitocybe* dopo un'ora di azione si ha una notevole alterazione delle mitosi, con metafasi coartate (pochissime sono ancora di aspetto normale); dopo 4 ore le metafasi sono assenti completamente, mentre le ana-telofasi si notano ancora; in seguito non si osservano più mitosi, ed i nuclei così in riposo resistono più a lungo contro le sostanze carioclasiche del pressato. Successivamente, dapprima in poche cellule, poi via via sempre più diffusamente, si notano profonde alterazioni, portanti alla dissoluzione della cromatina nel nucleo (che assume una colorabilità più pallida e diffusa, e che non mostra più distinti i nucleoli) ed in seguito alla scomparsa del nucleo per dissoluzione della cromatina nel plasma cellulare (che appare da questo momento colorato in rosa). In altre cellule, prima di tale lisi, si ha l'addensamento della cromatina in goccioline, che ben presto si disperdono nel plasma cellulare.

In *Lepiota* già dopo 24 ore le cariocinesi sono quasi mancanti, dopo 48 ore i nuclei presentano aspetto picnotico in gran numero, dopo 72 ore la cromatina di molte cellule è disciolta nel plasma cellulare, mentre altri nuclei sono in forte picnosi.

In *Gomphidium* l'azione carioclasica portante alla dissoluzione della cromatina nel plasma cellulare si verifica solo dopo 72 ore.

In tutti questi funghi il risultato finale della alterazione nucleare consiste nella dissoluzione più o meno precoce della cromatina nel plasma cellulare, e l'organismo rimane talmente intossicato da non presentare più alcun allungamento, né della radice, né del coleoptile.

In *Polyporus*, invece, non sembra che il pressato abbia un'azione così intensa sui nuclei, ma sembra anzi che (almeno per i primi tempi), si abbia un'azione stimolante sul processo mitotico (571 mitosi dopo 48 ore, mentre nei controlli non superano mai le 350). Questa rapida entrata in mitosi dei nuclei, contemporanea all'arresto della crescita in lunghezza della radice, deve essere considerata più come la manifestazione di un carattere patologico premortale, che non di una vera eccitazione mitotica vitale. Riponendo infatti in acqua le piantine di frumento, dopo immersione per 24 o 48 ore nel succo di *Polyporus*, non si ha alcun accenno alla ripresa della crescita in lunghezza delle radici, ma alla base dell'asse caulinare spuntano altre radici.

Questa azione a volte fortemente carioclasica, a volte eccitante la mitosi, è posseduta anche dai pressati diluiti?

Esaminai al riguardo solo due specie, eseguendo diluizioni dei succhi di 1/50 ed 1/1000. Riporto i risultati ottenuti:

<i>Russula</i>	1/50	307-207-2	= 104- 50-1
<i>Russula</i>	1/1000	385-229-1,5	= 185- 98-0,6
<i>Polyporus</i>	1/50	530-256-2	= 391-222-2,5

La diluizione dei succhi di *Russula* annulla la forte azione carioclasica propria del pressato usato tal quale, tuttavia le mitosi hanno in parte un aspetto contratto. (Anche per i filtrati di cultura già la diluizione ad 1/10 riduce o annulla l'azione carioclasica dei filtrati stessi).

Nelle diluizioni del pressato di *Polyporus* rimane presente l'azione eccitante il processo mitotico; essa però non darebbe più luogo ad una intossicazione totale della pianta, talché le radici possono crescere regolarmente. Da notare che l'eccitazione della mitosi non sarebbe limitata alle prime ore di immersione nei succhi, ma sarebbe ancora notevolmente sensibile dopo 72 ore. Il fatto che questa eccitazione delle cariocinesi può essere legata o no alla crescita in lunghezza delle radici potrebbe portare ad ammettere l'esistenza di una sostanza mitoeccitatrice, ben distinta da quella distensiva (probabilmente di tipo auxinico).

Ho in seguito esaminato se il principio tossico fosse termolabile.

Del pressato di *Armillaria* venne riscaldato a bagnomaria a 100° per 10 minuti e quindi fatto agire nel solito modo su piantine di frumento. Dopo 24 ore si notano solo scarse mitosi, aventi aspetto compatto, del tutto anormale; molti nuclei presentano l'espulsione di cromatina nel plasma cellulare. Dopo 48 e 72 ore anche le scarse mitosi osservate precedentemente non si ritrovano più, e si ha una più accentuata dispersione della cromatina nel plasma. Confrontando queste osservazioni con quelle più sopra riportate per il pressato non riscaldato di *Armillaria*, si può notare come si verifichi un aumento della sua tossicità. Si può ritenere pertanto che il principio tossico contenuto nei pressati fungini sia termostabile e normalmente in presenza di una sostanza limitante la sua azione tossica. Questo è in perfetta corrispondenza con quanto ho già messo in evidenza in altra Nota per i filtrati di cultura.

Considerando nel loro complesso i vari tipi di lesioni nucleari riscontrate, possiamo ritenere che le diverse modificazioni del nucleo si possono riportare ad un unico tipo di alterazione, più o meno intensa a seconda della concentrazione della sostanza carioclasica dei pressati. Si passerebbe così per gradi dalla fuoriuscita della cromatina dal nucleo e suo addensamento attorno ad esso o dispersione nel plasma cellulare; al raggrupparsi in goccioline della cromatina, ma entro lo stroma nucleare; alla comparsa più che dell'azione carioclasica, di quella mitoinibitoria con disturbi gravissimi delle mitosi, rilevabili dall'apparire di figure cariocinetiche non più definite, ma contratte e non portanti certamente a termine la divisione cellulare.

Nei filtrati di cultura e nei pressati dei feltri miceliari non ebbi mai ad osservare l'espulsione della cromatina in goccioline, però, come ho già fatto rilevare, alle volte si ha una precoce ed abnorme colorazione intensa dei nuclei al Feulgen, seguita dall'assunzione di tale colore da parte di tutta la cellula, ciò che fa ritenere per certa la dispersione nel plasma cellulare della cromatina del nucleo.

Le osservazioni di Cappelletti sull'azione tossica sui nuclei dei filtrati di *Rhizoctonia*, concordano pienamente d'altro lato con le alterazioni nucleari da me osservate nelle radici immerse nei succhi dei corpi fruttiferi dei funghi superiori. Corrispondenza tra filtrati di cultura, pressato dei feltri miceliari e pressato dei corpi fruttiferi si ha pure per la comparsa, in dipendenza di una tossicità limitata, di metafasi coartate.

Questa notevole corrispondenza tra i vari liquidi da me esaminati si manifesta pure riguardo alla eccitazione mitotica che alle volte, per alcune specie fungine, viene a sostituire la carioclasi, eccitazione mitotica riscontrata sia per i succhi di *Polyporus*, come pure per vari filtrati di cultura (miceli del gruppo D della mia prima Nota).

Ritengo perciò che le azioni sui nuclei dei filtrati di cultura, dei pressati del feltro miceliare e dei corpi fruttiferi dei funghi superiori, rientrano tutte in un unico tipo di alterazione, presentante alcune variazioni in dipendenza della minore o maggiore tossicità dei liquidi impiegati.

Normalmente il pressato dei corpi fruttiferi possiede un'azione carioclasica molto più notevole di quella dei filtrati e dei pressati dei feltri miceliari, e mentre per tali ultimi liquidi alle volte si aveva assenza o molto debole azione mitoinibitoria, per i primi invece ebbi sempre azioni molto intense.

Vorrei far notare infine la notevole rassomiglianza dei fenomeni carioclasici più intensi osservati, con quelli messi in evidenza da Gola.<sup>(6)</sup> nelle radici di *Trapa natans* in condizioni di asfissia. Ciò porta ad impostare il problema dei rapporti tra i fenomeni carioclasici ed i processi respiratori.

**Citologia.** — *Il problema dell'accrescimento interfascico e delle variazioni volumetriche del nucleo durante lo sviluppo*<sup>(\*)</sup>. Nota di G. SCHREIBER, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. GOLA.

Dalle ricerche esposte in una Nota precedente, emergono due fenomeni che ci son sembrati importanti per lo studio del nucleo durante lo sviluppo: 1° la diminuzione del volume nucleare durante lo sviluppo, diminuzione che segue una serie di valori ritmici e quindi probabilmente riflette variazioni di ordine quantitativo del genoma, come unità di moltiplicazione nucleare; 2° la variazione del volume nucleare «ritmica», ma con salti di un valore minore di due e eguale all'incirca a 1,5.

Nella letteratura citologica i rapporti tra grandezza nucleare e numero di cromosomi sono considerati in modo piuttosto confuso. Molti lavori mettono in evidenza una proporzionalità diretta tra questi valori, mentre altri pochi, considerano la superficie nucleare come proporzionale al numero di cromosomi. A questo proposito bisogna ben chiarire che non tutte queste ricerche sono esenti da critica sia per considerare come oggetto di studio

(6) G. GOLA, «Annali di Bot.», 5, 441 (1907).

(\*) Le considerazioni svolte in questa Nota sono state oggetto di una relazione alla *Settimana di Genetica* tenutasi alla «Escola Agrícola» di Piracicaba (Fac. Agraria della Università di São Paulo) nel 1943 in occasione del corso di lezioni tenuto dal prof. Th. Dobzhansky alla Facoltà di Scienze di São Paulo. La partecipazione dell'Autore tra i relatori di questo Congresso venne sollecitata dai Professori A. Dreyfus e F. Brieger, ai quali l'A. esprime i più sentiti ringraziamenti.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) «Revista de Agricultura» *Semana da Genetica* Piracicaba, Brasil, 18, 458 1943.



nuclei non sferici, sia per considerare stadi di sviluppo embrionali nei quali le divisioni nucleari e l'accrescimento intercinetico sono talvolta notevolmente differenti dai tessuti adulti. Inoltre fenomeni di ordine genetico possono interferire e rendere inconfondibili i valori tra specie e specie o anche entro una stessa specie. Molti lavori infine considerano la grandezza cellulare anzichè quella nucleare, cosa che non sempre i trattatisti mettono bene in evidenza. Il problema che si apre dalla ricerca kariometrica nei tessuti di embrioni e larve è di stabilire se si tratta di una vera riduzione di grandezza in epoche successive degli stessi nuclei oppure di una sostituzione nel tessuto di nuclei di categorie differenti preesistenti nel tessuto. Abbiamo già accennato nella Nota precedente che questo fenomeno si può escludere in certi casi per la totale assenza in uno stadio delle categorie di nuclei che predominano nello stadio successivo; ciò sarà ancora più evidente dall'esame dei risultati delle ricerche kariometriche dei tessuti uterini che saranno esposte in una Nota successiva.

Che possa esistere una reale riduzione del volume nucleare accompagnata da una effettiva riduzione del numero di cromosomi in cellule somatiche poliploidi, apparisce chiaramente dai fenomeni chiamati «somatic reduction» nei tessuti intestinali delle zanzare durante la metamorfosi. Berger e collaboratori<sup>(2-7)</sup> dimostrarono che i nuclei grandi, altamente poliploidi dell'intestino larvale, subiscono una vera riduzione cromosomica alla metamorfosi originando i nuclei piccoli diploidi dell'adulto. Il meccanismo di questa riduzione consiste nella soppressione dell'accrescimento interfase e nell'appaiamento somatico caratteristico di tutti i Ditteri.

Non vediamo perciò nulla di strano nei fenomeni di riduzione ritmica del volume nucleare durante l'ontogenesi dei Vertebrati, e non ci sembra difficile ammettere che anche qui avvenga una riduzione quantitativa del genoma. Painter e collaboratori<sup>(8)</sup> hanno mostrato in tessuti neoplastici come i nuclei di volumi superiori varianti con valori ritmici, o come sono chiamati anche «periodici», possono solamente esser prodotti o da una situazione poliploide o da una situazione diploide con cromosomi «politrenici» e con le parole di questi autori «hydration does not explain the periodicity of nuclear volumes, and it could not change the number of nucleolar organizer», quest'ultimo fenomeno essendo l'indice caratteristico della situazione multipla del genoma.

Non è per ciò sempre necessario che i nuclei grandi sieno poliploidi (come in certi casi venne dimostrato da D'Ancona), ma vi possono esser nuclei 2-4-8-16 ecc. volte il normale con un numero diploide di cromosomi i quali però hanno 2-4-8 ecc. cromonemi.

Altri fenomeni indicano che i nuclei possono realmente «ridursi» di volume ritmicamente. Così la terza divisione della spermatogenesi (Hert-

(2) «Anat. Rec.», 67, Suppl. 1936, 63. «J. Hered.», 29, 35, 1938. Pubbl. 493, «Carnegie Inst.», 1938. Proc. 7 Int. Cong. Genet., 1939, suppl. «J. Genet.», 28, 63. Cold Spring Harb. Simp. Quant. Biol. 19, IX, 1941.

(7) «Genetics», 31, 1946, 60 e 77.

(8) «Univ. Texas», Pubbl. 4243, 1942.



wig<sup>(9)</sup>, Spuhler<sup>(10)</sup>, G. Schreiber<sup>(11)</sup> mostra che i cromosomi del complesso aploide sono doppi e suscettibili a una ulteriore divisione equazionale successiva alle due della meiosi tipica. Altro fenomeno di riduzione del numero di cromosomi nelle cellule somatiche e quello descritto da Krug<sup>(12)</sup> in *Coffea* e confrontabile ai fenomeni sopra menzionati descritti da Berger.

Ho ritenuto interessante cercare una denominazione per questi fenomeni che non originasse confusione con la «riduzione» meiotica che è caratterizzata dal complesso dei fenomeni auxocitari (crossing-over) e la «diminuzione cromatinica» di significato ancora oscuro e forse non eguale in tutti i casi descritti nelle divisioni blastomeriche in *Ascaris*, *Miastor*, *Ditiscus*, *Sciara* ecc.). Nei casi che ci interessano si tratta di una diminuzione del valore multiplo del genoma aploide, in ultima analisi una riduzione del poliploidismo o del grado di politenia dei cromosomi durante fasi determinate dello sviluppo e forse differente in grado e in cronologia nei vari tessuti embrionali. Ho perciò denominato questo fenomeno col termine di «elassi» dalla parola greca «ἐλάσσω» che ha lo stesso significato di riduzione, o diminuzione, ma non si può così confondere con gli altri termini già in uso. Questi fenomeni di elassi sarebbero per ciò praticamente l'inverso di ciò che viene chiamato «endoschisi» o «endomitosi» cioè la duplicazione del genoma senza una corrispondente divisione nucleare. L'elassi sarebbe quindi la divisione nucleare (in nuclei di categorie superiori, poliploidi o politenici) senza la duplicazione interfaseica precedente del genoma. G. Hertwig considera sotto questo punto di vista la diminuzione ritmica del volume nucleare dei blastomeri e contrappone a questa l'accrescimento ritmico da lui analizzato della vescicola germinativa.

A questo proposito pensiamo che il problema vada assumendo un nuovo indirizzo colle ricerche sul metabolismo degli acidi nucleinici durante la segmentazione, per cui è prematura qualsiasi generalizzazione.

Quale è il significato che questo fenomeno può avere nello sviluppo, per ora è assolutamente oscuro. Sappiamo solamente che in certi tessuti i nuclei si riducono ritmicamente fino ad un minimo e che in questo momento si ha la maturazione citologica specifica dell'organo. Dopo di ciò i nuclei possono eventualmente riaumentare sempre ritmicamente come succede nel fegato di Carpa. Problemi di notevole interesse si possono prospettare dal punto di vista genetico inerenti al diverso grado di azione dei geni rappresentati in quantità differenti nelle differenti fasi dello sviluppo dell'organo, ma nulla per ora ci autorizza a concludere più che non la semplice esposizione dei fatti.

Il secondo fenomeno qui considerato, quello della variazione ritmica con modulo differente da 2 è stato oggetto di tre interpretazioni totalmente

(9) «Z. mikr. Anat. Forsch.», 87, 1933.

(10) «Z. mikr. Anat. Forsch.», 442, 23, 1936.

(11) I<sup>a</sup> Reun. Soc. Biol. Brasileiras São Paulo settembre 1946.

(12) «Rev. Agric. Piracicaba», XII, 1937.

differenti, e ci sembra assai interessante esaminarle criticamente. Heidenhain, aveva già interpretato la variazione ritmica di 1,5 volte il volume nucleare trovato da Jacobi<sup>(13)</sup> come dovuto alla duplicazione di soltanto metà del materiale nucleare, o il paterno o il materno. Questa stessa interpretazione, accettata da G. Hertwig nel 1939<sup>(14)</sup> venne successivamente abbandonata da questo autore. Egli interpreta attualmente queste « Zwischenklassen » ammettendo che in certi casi il numero di cromosomi sia proporzionale al volume nucleare, ed altre volte alla superficie nucleare. Due nuclei con egual numero di cromosomi, ma nei quali agisca in uno il fattore di correlazione col volume e nell'altro quello colla superficie hanno i rispettivi volumi che stanno nel rapporto 1 : 1,41 (ossia 1 : 2). Brummelkamp<sup>(15)</sup> interpreta una serie di casi nei quali i nuclei stanno tra loro come 1 sta ad un valore approssimativamente 1,41 con una serie di ammissioni e approssimazioni matematiche basate sulla curva di accrescimento del macronucleo degli Infusori. Lo spazio concesso a questa Nota non ci permette di esporre integralmente questi ragionamenti. Tutte queste interpretazioni ci sembrano totalmente sprovviste di significato genetico ed in certi punti assolutamente fantastiche.

Molto più logica, e, come vedremo, più documentabile, ci sembra la primitiva idea di Heidenhain della duplicazione del materiale nucleare avente come « unità di duplicazione » non il corredo diploide, ma quello aploide. Se la correlazione tra il valore multiplo del genoma ed il volume nucleare è valida (e lo dimostreremo nelle due Note successive), la moltiplicazione di metà del genoma diploide deve portare a un volume 1,5 volte l'originale. Ora in una serie di nuclei crescenti con questo ritmo, cioè per duplicazione successiva dei genomi aploidi noi avremo una serie di volumi proporzionali ai valori 1 ; 1,5 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ecc. È importante far notare che il valore del rapporto tra due di questi valori successivi è alternativamente 1,5 e 1,33. La media aritmetica di questi due valori è 1,4166, cioè di appena nella terza decimale diverso dalla radice di 2. È evidente che nelle ricerche statistiche cariometriche forzosamente la variabilità del rapporto tra due tappe di accrescimento non è piccola e nella media dei casi, come appunto Brummelkamp rileva, e press'a poco il valore di 1,41.

Pensiamo che questa coincidenza possa non esser stata estranea nello indurre gli autori sopra citati ad una valutazione erronea del significato biologico e matematico di questo valore.

Si dovrebbe, secondo la interpretazione da noi adottata ammettere che nel processo di accrescimento interfasicò del nucleo i due genomi aploidi possano duplicare uno alla volta e non contemporaneamente. Questo *almeno* nei casi dove la ritmicità dell'accrescimento nucleare si manifesta proporzionale a 1,5.

(13) « Anat. Anz. Verh. Anat. Ges. », 72, 1931.

(14) « Anat. Anz. Verh. Anat. Ges. », 870, 1930.

(15) « Acta Neerl. Morf. », II, 177.

Il nucleo perciò passerebbe nel suo accrescimento interfaseico per una tappa di grandezza 1,5 volte l'iniziale ed ho denominato questa tappa *sesquifase* da «sesqui», una volta e mezzo (lat.), ed intercalandola così, anche come denominazione alla serie degli stadi cariocinetici come «fase» dentro della interfase.

È necessario qui ricordare che le ricerche cinematografiche sull'accrescimento del nucleo nelle culture in vitro di Wermel e Portugalow <sup>(16)</sup> hanno messo in evidenza appunto una serie di ciclo ad «s» di accrescimento, di circa 1,5 volte il precedente.

Nelle ricerche sull'accrescimento interfaseico dello spermatogonio che esporremo successivamente, questo fatto apparisce con grande chiarezza.

Se volessimo ora, in base a quanto abbiamo esaminato più sopra interpretare il meccanismo e la natura della diminuzione di volume nucleare colla serie delle «Zwischenklassen» verificato nei girini ci troveremo dinnanzi ad una serie di nuovi quesiti che richiedono ulteriori ricerche. Nella Nota del 1943 avevamo abbozzato una interpretazione sul seguente concetto; se in un nucleo poliploide o politenico l'interfase è limitata alla sesquifase, la successiva divisione in due nuclei eguali porta alla formazione di una serie di stadi i cui volumi stanno tra loro come 4 : 3 : 2 : 1,5 : 1.

Ci vien fatto però di chiederci perchè in certi casi come nella Carpa la diminuzione segue perfettamente la legge del dimezzamento ed in altri no. In base ai risultati delle ricerche sull'interfase dello spermatogonio è possibile intravedere una maggior complicazione del fenomeno, per cui non riteniamo ancora mature le nostre conoscenze sull'accrescimento interfaseico per abbordare definitivamente l'interpretazione della serie del fegato dei girini.

Si tratta ora di indagare che base genetica e citologica può avere questo concetto della sesquifase. Si deve pensare quindi che la duplicazione dei due genomi aploidi avvenga successivamente e non contemporaneamente. Non possiamo precisare se dei due genomi sia il paterno o il materno a duplicare precocemente; e nemmeno possiamo precisare se son tutti i cromosomi di un genoma aploide di eguale origine gametica che duplicano prima di quelli dell'altro gamete. Potrebbe darsi invece che semplicemente sia un membro di ogni paio di cromosomi del corredo diploide a duplicare prima dell'altro a caso senza predilezione per l'origine gametica. In ogni caso il genoma aploide sarebbe l'«unità» di duplicazione simultanea. Può sembrare un po' eterodosso ed ardito questo modo di vedere il problema, ma vi sono alcuni fatti di ordine citologico che possono giustificare il concetto di sesquifase così concepito.

Vediamo rapidamente questi fatti. Holt <sup>(17)</sup> nell'intestino di larva di *Culex* ha constatato cellule con differente grado di poliploidismo. Esistono individui con multipli pari del genoma aploide ( $n-3$ ) e cioè con 6-12 24-48

(16) «Z. Zellf.», 22, 133, 1935.

(17) «J. Morph.», 29, 607, 1917.



cromosomi (serie 6) e d' altri con 9-18-36 (serie 9) cioè multipli dispari. Holt interpreta questa «serie 9» come dovuta ad una duplicazione precoce o ripetuta di un «set» paterno o materno aploide. È sintomatico che Bogojawlensky<sup>(18)</sup> in ricerche kariometriche sulle larve di zanzara trovò nuclei con volumi proporzionali ad 1,5.

Altri fatti che mostrerebbero un comportamento differenziale dei due genomi aploidi nel ciclo nucleare sono quelli inerenti alla «eteropicnosi» di un set aploide nei tessuti somatici e germinale di certi Coccidi (*Pseudococcus*, Schrader e altri). In questi casi la velocità di condensazione o spiralizzazione dei cromosomi all'inizio della profase sarebbe differente nei cromosomi dei due genomi i quali sembrano in questi casi essere differenziati in senso sessuale nella loro totalità.

Il comportamento specifico di alcuni dei cromosomi paterni nelle mitosi somatiche e germinali di *Sciara* descritti da Metz, è un altro esempio di differenziamento dei cromosomi omologhi secondo la loro origine gametica e che secondo Metz persisterebbe solamente per una generazione.

Il caso estremo di differenziamento e indipendenza dei genomi aploidi è dato dal fenomeno piuttosto raro della «gonomeria» ossia la permanenza dei genomi paterno o materno in due nuclei differenti durante le prime fasi della segmentazione in alcuni animali (Gopepodi-Gasteropodi) e che sembra del tutto analoga alla indipendenza dei due nuclei nella diplofase dei Basidiomiceti e Ascomiceti e nella *Amoeba diploidea*.

Sono tutti questi, casi di indipendenza fisiologica dei genomi «physiological isolation» di Bridges<sup>(19)</sup> aploidi con manifestazioni di indipendenza morfologica in stadi differenti del ciclo nucleare. La sesquifase potrebbe essere una nuova forma di questa indipendenza, più limitata, e che colpisce solamente la velocità o la precedenza della duplicazione durante la interfase e non si manifesterebbe morfologicamente. L'«inizio di una nuova combinazione corrispondente ad una nuova «individualità» fisiologica.

Si potrebbe pensare che la base di questa individualità fisiologica consista appunto nella unità funzionale del genoma aploide, ma anche potrebbe risiedere nella natura dei materiali estranei al genoma annessi nella formazione del cromosoma e forse come ammette Metz ad un effetto genetico su tutti i cromosomi di uno stesso gamete. Forse infine, nell'ordine delle supposizioni possibili sarebbe anche un effetto del citoplasma materno sui geni di origine paterna, come manifestazione estremamente lieve di una incompatibilità che in certi incroci si manifesta assai più profondamente.

Possiamo ancora pensare ad un altro tipo di interpretazione basata sui fenomeni di politenia cromosomica. In un cromosoma costituito da due cromonemi potrebbe verificarsi che sempre duplica uno e poi l'altro dei due cromonemi, cioè sempre sieno i geni di uno stesso genoma, come un corpo unico a duplicare insieme.

(18) «Z. Zellf. mikr. Anat.», 22, 1935.

(19) «Sex and interval Secretions», Allem. II, p. 15, 1939.



Altre ipotesi come queste si possono emettere basate sulle varie teorie della duplicazione dei geni, ma ci porterebbero assai lontani e nel campo della speculazione pura. Ci limitiamo perciò qui a considerare come ipotesi di lavoro tutte queste interpretazioni che hanno il loro valore in quanto ci permettono di impostare dei problemi *la cui soluzione può illuminare il meccanismo della duplicazione dei geni da un lato e dall'altro la unità funzionale del genoma aploide*, cioè in ultima analisi i principî essenziali della vita. Ciò che ci sembra rimanere per ora positivamente accertato è la esistenza di questa fase transitoria che abbiamo chiamata «sesquifase», come manifestazione caratteristica quantitativa di questo delicatissimo periodo della vita cellulare che è l'interfase.

Ci sembra necessario insistere ancora come chiusa di queste considerazioni che il problema dell'accrescimento nucleare considerato dal punto di vista morfologico-carionetrico deve esser integrato collo studio citochimico e citofisico di tutta la cellula durante l'interfase.

Ciò che ci sembra fondamentale è che la corrispondenza tra genoma e grandezza nucleare è valida soltanto durante le «tappe» dell'accrescimento interfase (frequenze massime statistiche). Durante le fasi di «movimento» è presumibile che questa correlazione sia profondamente alterata dai fenomeni di metabolismo (assimilazione materiale, variazioni delle costanti chimico-fisiche) dei costituenti nucleari.

Questo fatto deve essere considerato tutte le volte che l'indirizzo carionetrico viene criticato con argomenti fisiologici.

**Citologia vegetale.** — *Agglutinazione cromatica («stickiness») in Allium Cepa L. e altre Liliaceae.* Nota di F. D'AMATO, presentata<sup>(\*)</sup> dal Corrisp. A. CHIARUGI.

Alla fine di novembre del 1946 furono da me riprese, presso il Laboratorio di Citogenetica dell'Associazione Svedese dei Semi a Svalöf, le esperienze relative al perfezionamento della tecnica dello «striscio» al Feulgen<sup>(1)</sup>, con l'impiego di apici radicali di *Allium Cepa* ottenuti da bulbi in cultura acquosa.

La non rara osservazione di agglutinazione cromatica («stickiness») durante le varie fasi del processo mitotico mi convinse della opportunità di sottoporre il fenomeno ad un accurato esame e — nello stesso tempo — di ricercarne le possibili cause determinanti.

Essendosi riscontrate temperature oscillanti fra 0° e — 4° C. nel magazzino dell'Associazione Svedese dal quale i bulbi provenivano, non priva di fondamento appare l'ipotesi che le basse temperature abbiano potuto espli-

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) F. D'AMATO, *Osservazioni critiche su alcuni metodi di impiego della reazione nucleale in Citologia vegetale.* «Nuovo Giorn. Bot. Ital.», n. s., LIII, 1946.

care un « effetto fisiologico » capace di indurre quelle modificazioni chimico-fisiche della matrice cromosomica (« Kalimma ») <sup>(2)</sup>, che sembrano responsabili dell'agglutinazione cromatica. In favore della detta ipotesi parlano l'impossibilità di ottenere durante il periodo invernale sui mercati di Lund e Svalöf dei bulbi che non presentassero agglutinazione cromatica e ancora alcune osservazioni sulla vitalità di piante ottenute da bulbi piantati in serra nel gennaio 1947. Non è, tuttavia, da escludere la possibilità che altre cause più difficilmente controllabili, quali, ad esempio, l'età, le condizioni di magazzino, lo stato di più o meno completa maturazione dei bulbi all'atto del raccolto, possano aver rappresentato l'agente determinante nell'induzione del fenomeno qui considerato.

I bulbi fatti oggetto di studio furono tutti prelevati dal Magazzino dell'Associazione Svedese dei Semi. Allo stesso lotto appartenevano quelli sui quali fu studiata l'azione della colchicina e del glicol etilenico <sup>(3)</sup>.

I risultati che ora - in via preliminare - vengono comunicati, oltre che basarsi sulla diretta osservazione del fenomeno in bulbi non sottoposti ad alcun trattamento sperimentale, riguardano anche l'azione esplicata da differenti agenti fisici e chimici sul corso della mitosi e sulla matrice cromosomica negli apici radicali ottenuti da bulbi, così come l'azione del disseccamento su plantule di *Allium Cepa* ottenute da seme. Essi, inoltre, denunciano l'esistenza di agglutinazione cromatica per altre tre specie di *Liliaceae*, nelle quali questa non era ancora stata osservata e per una di esse - un biotipo tetraploide di *Fritillaria imperialis* - riguardano anche esperienze eseguite alla temperatura di - 2° C. su piante viventi in vaso.

#### I. METODI ED ESPERIENZE. - Possono così raggrupparsi:

1° *Diretta osservazione del fenomeno.* - Per *Allium Cepa* furono studiati apici radicali ottenuti per immersione della porzione basale dei bulbi in acqua di fonte e - raramente - in soluzione di Knop. Per *Tricyrtis hirta* furono osservati preparati embriologici gentilmente messi a disposizione dal dott. Tjio Joe Hin e riguardanti piante viventi in serra nell'Orto Botanico di Copenhagen (il fenomeno fu riscontrato nelle cellule della nucella e della parete ovariale). Per *Scilla sibirica* e *Fritillaria imperialis* furono utilizzati apici radicali di piante viventi in serra a Svalöf (osservazioni eseguite nella prima decade di febbraio del 1947):

2° *Vitalità di bulbi mostranti « stickiness ».* Il comportamento e la vitalità di 20 piante ottenute da bulbi piantati in serra l'8 gennaio 1947 furono attentamente seguiti. Un controllo citologico periodico fu eseguito negli apici radicali allo scopo di chiarire la connessione esistente fra manifestazioni macroscopiche preludenti alla morte (alla data del 25 maggio tredici

(2) E. HÉITZ, *Chromosomenstruktur und Gene*. « Zeitsch. f. Abst. u. Vererb. », 70, 402-sgg., 1935.

(3) F. D'AMATO, *The effect of colchicine and ethylene glycol on sticky chromosomes in « Allium Cepa » L.* « Hereditas », in corso di stampa, 1947.

delle venti piante risultano perite, la massima mortalità essendosi verificata nel periodo febbraio-marzo) e corso dei fenomeni citologici. Fu così stabilito che la progressiva perdita di vitalità nella pianta è accompagnata (o determinata ?) da un progressivo aumento nel grado di agglutinazione cromatica che si manifesta - oltre che nella assai più frequente apparizione di fenomeni di adesione superficiale (agglutinazione cromatica intra e inter-cromosomica) - anche nella non rara produzione di aberrazioni cromosomiche (fusioni di cromatidi e frammentazioni), che si manifestano solo come casi eccezionali in apici radicali ottenuti da bulbi in cultura acquosa. A parte possibili differenze nella frequenza di manifestazione, il quadro delle aberrazioni cromosomiche negli apici di piante avviantisi alla morte è perfettamente identico a quello realizzabile in condizioni sperimentali, quali il disseccamento e l'azione di agenti chimici. L'accertata correlazione fra condizioni subvitali di esistenza e aumentato grado di agglutinazione cromatica, insieme a varie altre considerazioni, apre la via ad una visione critica dei risultati riportati da alcuni Autori che si sono occupati del problema delle aberrazioni cromosomiche.

L'arresto della mitosi e la deformazione - talora assai pronunciata - dei nuclei quiescenti sembrano essere i fenomeni generali precedenti la morte della pianta.

3° *Azione delle basse temperature.* - Per *Allium Cepa* le seguenti esperienze su piante ottenute da bulbo furono eseguite: sette piante a 0°C. per 5 giorni; una pianta a 0°C. per 16 ore e a - 2°C. per 2,8 e 24 ore; una pianta a - 2°C. per 24 ore; una pianta a - 2°C. per 24 ore e a temperatura gradualmente portata a + 1°C. nel giro di 24 ore. Per *Fritillaria imperialis*: due piante a - 2°C. per 42 ore.

In accordo con precedenti osservazioni di altri Autori l'azione del freddo si manifesta con l'arresto delle mitosi alla metafase, il prolungamento in durata di questo stadio e la conseguente « superspiralizzazione » cromosomica (azione colchicino-mitotica delle basse temperature). A parte i disturbi e spesso l'abolizione della attività fusale, una spiccata azione svolge il freddo sulla matrice cromosomica inducendo - nei casi di forte choc - una fortissima liquefazione cromatica che spesso finisce nella morte della cellula e - nei casi meno gravi - una diminuita produzione delle sostanze costituenti la matrice. Di notevole interesse è soprattutto la scarsa resistenza al freddo delle due piante di *Fritillaria imperialis* da me studiate, a paragone di quella riportata da altri Autori<sup>(4)</sup> per piante normali di specie affine, cioè per piante non presentanti agglutinazione cromatica. Un trattamento di 42 ore a - 2°C. fu - infatti - capace di determinare la completa deturgenza e la morte delle radici.

4° *Azione delle alte temperature.* - Radici di *Allium Cepa* attaccate al bulbo furono rimesse in acqua di fonte dopo immersione per 30" e 60"

(4) C. D. DARLINGTON e L. LA COUR, *Nucleic acid starvation of chromosomes in Trillium*. « Journ. of Genetics », 40, 185 e sgg., 1940.



in acqua alla temperatura di 45°, 55° e 60° C.; la fissazione fu eseguita a differenti intervalli di tempo. Gli aspetti della agglutinazione cromatica sono identici a quelli già descritti <sup>(5)</sup> per la stessa pianta e nelle stesse condizioni sperimentali. Una analisi comparata dei fenomeni citologici negli apici sottoposti all'azione dell'acqua a 60° C. per 60" e negli apici direttamente - cioè senza previa fissazione idrolizzati in N/HCl a 60° C. per la colorazione Feulgen - ha permesso osservazioni degne di rilievo non solo sul comportamento dell'acido timonucleico <sup>(6)</sup> ma anche su quello delle figure mitotiche in generale e dei cromosomi in particolare.

5° *Azione della CrO<sub>3</sub>, del PtCl<sub>4</sub> e di vari sali inorganici.* - È stata studiata su radici isolate e su radici attaccate al bulbo in *Allium Cepa*. Tutte le soluzioni, prima di operare la completa fissazione delle strutture, inducono una spiccata agglutinazione cromatica e un aumento di aberrazioni cromosomiche. Particolarmente interessanti, nelle esperienze con la CrO<sub>3</sub>, le deformazioni dei nuclei quiescenti sotto l'azione del vacuolo perinucleare e il conferimento al citoplasma di una netta struttura fibrillare.

6° *Azione del disseccamento sulle plantule di Allium Cepa.* - Aberrazioni cromosomiche nelle plantule di *Allium Cepa* sono state già descritte e la loro frequenza in relazione all'età dei semi è stata già studiata <sup>(7)</sup>.

Le osservazioni da me eseguite non permettono un completo accordo con le vedute dell'A. americano, trascurando egli completamente l'importanza dei fenomeni di adesione superficiale durante il processo mitotico e fornendo, perciò, un quadro inesatto delle percentuali di aberrazioni cromosomiche nelle diverse varietà studiate.

Sulla scorta dei risultati riportati da altri Autori riguardo all'azione del disseccamento sulle cellule vegetali « in vivo », si è messa in evidenza l'importanza che la deficienza idrica ha nell'aggravamento della agglutinazione cromatica e nell'aumento delle aberrazioni cromosomiche.

II. IL PROCESSO MITOTICO NEI CROMOSOMI « STICKY ». - Lo studio della agglutinazione cromatica alla meta-anafase permette di riaffermare - in perfetto accordo col Resende e la sua scuola - l'importanza che questo fenomeno ha nella giusta interpretazione delle aberrazioni mitotiche e di accettare in pieno la distinzione dei ponti mitotici anafasici nelle seguenti tre categorie <sup>(8)</sup>:

1° Falsi ponti, dovuti ad adesione terminale (agglutinazione) dei cromatidi fratelli durante la separazione anafasica.

2° Veri ponti, dovuti a distensione asimmetrica dei cromatidi fratelli.

(5) P. F. MILOVIDOV, *Einfluss von Wasser hoher Temperatur auf den Kern der Pflanzenzellen in Lichte der Nuklealreaktion.* « Protoplasma », 17, 32 e sgg., 1932.

(6) F. D'AMATO, op. cit., 1946.

(7) Ch. NICHOLS, *Spontaneous chromosome aberrations in Allium.* « Genetics », 26, 89 e sgg., 1941.

(8) F. RESENDE, *Movimento, agglutinação, pontes e distensão dos cromosomas na mitose.* « Boll. Socied. Brot. », XXV, 163 e sgg., 1941.



3° Veri ponti, dovuti a fusione dei cromonemi (unica specie di ponte ritenuta possibile prima della messa a punto del Resende). Come le presenti mie ricerche hanno potuto chiaramente mostrare, questi sono espressione di un più avanzato grado di agglutinazione cromatica.

Generalmente accettabili appaiono anche le conclusioni del Pinto-Lopez<sup>(9)</sup> sulla diversa estensibilità delle varie zone cromosomiche e sul meccanismo dei ritardi cromosomici e della costituzione dei micronuclei durante la mitosi nei cromosomi affetti da « stickiness » e le conclusioni del Resende<sup>(10)</sup> sui fenomeni di distensione del filo satellifero.

Inaccettabile – almeno in molti casi – è, invece, la spiegazione data dal Resende<sup>(11)</sup> al costituirsi dei « veri ponti » della categoria 2<sup>a</sup>. Lo studio della congressione metafasica ha infatti mostrato che l'origine di simili ponti è spesso da ricercare in una incompleta congressione e quindi nella divisione del o dei centromeri fuori della zona equatoriale. Per quanto riguarda la accidentale costituzione di una costrizione secondaria in cromosomi presentanti la sola costrizione cinetica, essa pare dovuta ad un fenomeno di completa « despiralizzazione » in una ristretta zona del cromosoma e non ad un processo di contemporanea delezione e traslocazione fra cromosomi omologhi, quale sembra possibile nei cromosomi « sticky » di *Vicia Faba*<sup>(12)</sup>. La presente mia spiegazione sembra trovare una conferma, oltre che nello studio morfologico dei cromosomi, anche nei difetti di spiralizzazione per cui – nei casi di forte agglutinazione cromatica – zone di diverso diametro possono osservarsi lungo il corpo cromosomico.

In accordo con le conclusioni di Darlington e La Cour<sup>(13)</sup> la particolare sottigliezza dei cromosomi « sticky » viene ascritta sia ad « underspiralisation » sia a « general starvation » dei cromosomi. Con questo termine, tuttavia, si intende da me esprimere non solo una generale rarefazione di « correctly polymerized nucleic acid »<sup>(14)</sup>, ma anche una diminuita produzione delle sostanze proteiche contenute nella matrice cromosomica.

III. LA STRUTTURA CROMOSOMICA. – Una caratteristica dei cromosomi presentanti agglutinazione è quella di manifestare una chiara evidenziazione della loro struttura interna anche con fissativi – quali quelli osmici –

(9) J. PINTO-LOPEZ, *Caryological studies on the Aloinae*. IV. *Chromosomic set and chromatic agglutination of the species of the section Coarctatae of the genus Haworthia*. « Portug. Acta Biol. », I, (3), 87 e sgg., 1946.

(10) F. RESENDE, *Ueber das Verhalten des Sat-Fadens*. « Planta », 29, 306 e sgg., 1939; *Ueber die Chromosomenstruktur in der Mitose der Wurzelspitzen: II*. « Chromosoma », I, 486 e sgg., 1940; op. cit., 1941.

(11) F. RESENDE, op. cit., 1941.

(12) L. COUTINHO, *Os virus como agentes modificadores dos cromosomas*. « Rev. Agron. », 28, 83 e sgg., 1940.

(13) C. D. DARLINGTON e L. LA COUR, *Chromosome breakage and the nucleic acid cycle*. « Journ. of Genetics », 46, 180 e sgg., 1945.

(14) C. D. DARLINGTON e L. LA COUR, op. cit., 1945.

assolutamente inadatti allo studio della struttura cromosomica nei cromosomi normali.

In *Allium Cepa* una perfetta evidenziazione strutturale è possibile in tutti gli stadi del processo mitotico, specialmente nei casi di forte agglutinazione (piante avviantesi alla morte o trattamenti sperimentali). In accordo con la massima parte degli Autori che si sono occupati della struttura cromosomica, si è accertato che in *Allium Cepa* i cromosomi sono quadripartiti (due cromatidi costituiti ognuno da due semicromatidi) dallo stadio di spirema a quello di metafase e bipartiti alla ana-telofase.

Come risultato delle presenti osservazioni l'idea — sostenuta da Darlington e La Cour <sup>(15)</sup> — che il particolare aspetto vacuolato presentato dai cromosomi fissati in miscele alcool-acetiche e osmio-acetiche sia semplicemente un artefatto, viene ritenuta del tutto priva di fondamento.

**Biologia.** — *Ricerche sperimentali sull'origine del simpatico toraco-lombare nell'embrione di pollo* <sup>(\*)</sup>. Nota di R. LEVI-MONTALCINI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. LEVI.

È noto che il sistema simpatico negli Uccelli è caratterizzato dalla comparsa alla fine della 3ª giornata dello sviluppo embrionale del cordone limitante primitivo, seguito alla fine della 4ª giornata dall'inizio della formazione del cordone limitante secondario; l'uno e l'altro decorrono longitudinalmente: il 1º dorsalmente all'aorta, il 2º ventralmente alla colonna vertebrale. Il cordone limitante primitivo avrebbe origine, secondo alcuni Autori (Müller, Ingvar, van Campenhout, Hammond ed Yntema) da cellule migrate dai gangli spinali lungo le radici dorsali, secondo altri, in base a ricerche pure sperimentali, da neurociti migrati dalla porzione ventrale del midollo, lungo le radici spinali ventrali (Kuntz, Bateson, Jones). L'origine mesenchimale, prospettata da Remak, Paterson, Fusari, Camus, fu sostenuta particolarmente con ricerche condotte con metodo descrittivo, da Tello nell'embrione di pollo. Questo Autore ritiene di aver dimostrato la derivazione dell'ortosimpatico da una matrice comune all'endotelio dell'aorta e dei vasi segmentali.

Sull'origine del cordone secondario quasi tutti gli Autori sono concordi nel ritenere che esso deriva per gemmazioni che partono dai gangli del cordone limitante primitivo, si portano in direzione dorsale seguendo i vasi intersegmentali dell'aorta, e si localizzano alla confluenza della radice spinale

(15) C. D. DARLINGTON e L. LA COUR, *Differential reactivity of the chromosomes*. « Ann. of Bot. », N. S. 1, 83 e sgg., 1938.

(\*) Ricerca eseguita nel Centro di Studi sull'accrescimento e la senescenza alle dipendenze del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Anatomico di Torino.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

anteriore con la posteriore. Nella regione toraco-lombare il cordone primitivo si risolve nel plesso periaortico, e i nervi spinali forniscono al simpatico un ramo comunicante apportatore di fibre pregangliari. Nella regione cervicale mancano i rami comunicanti; il cordone primitivo si costituisce in forma di abbozzo insegmentato e continuo ai lati dell'aorta come prosecuzione del cordone omonimo toracico; le fibre pregangliari arrivano, oltre che indirettamente dal cordone primitivo, anche direttamente dai rami comunicanti dei primi quattro segmenti toracici che si sono fatti ascendenti nel cordone cervicale, come fu posto in luce per la prima volta da Terni.

Dal punto di vista della genesi, essendo il cordone secondario emanazione del primitivo, interessa rintracciare l'origine di questo, e tale ricerca è giustificata dalle conclusioni contraddittorie, e molte volte diametralmente opposte alle quali giunsero i varî Autori, in base a ricerche sperimentali e descrittive. La recente monografia di Tello (1945) dimostra infatti come ancora oggi il problema non possa considerarsi risolto, e come oltre agli Autori già citati, Goormaghtigh e Greeven si esprimano in favore dell'origine del simpatico per migrazione dalla cresta neurale, mentre Raven propende per una duplice origine: canale neurale e cresta neurale.

MATERIALE E METODO DI INDAGINE. — L'attuale ricerca fu condotta con metodo sperimentale su embrioni di pollo, materiale usato di preferenza da quasi tutti gli Autori che trattarono questo argomento.

Furono operati embrioni allo stadio di 12-18 somiti di asportazione del midollo toraco-lombare per un'altezza di 10-12 somiti.

Fu asportato cioè tutto il midollo toraco-lombare dal 4°-6° somite cervicale sino al limite tra il somite più caudale e il mesoblasto ancora insegmentato. In corrispondenza di questo (fig. 1) la doccia neurale non può essere estirpata perchè i suoi margini sfumano lateralmente. All'atto dell'asportazione la doccia midollare era in via di chiusura in corrispondenza della porzione cervicale, mentre in corrispondenza dei somiti più caudali, i labbri midollari erano ancora divaricati. A questo periodo dello sviluppo, come si poté rilevare dall'esame istologico di embrioni di controllo colorati con il metodo all'argento ridotto Cajal-De Castro, inizia in corrispondenza dei segmenti cervicali la differenziazione dei neuroblasti motori e associativi. Questi sono alla fase bipolare, ancora distribuiti irregolarmente e non raccolti in una colonna anteriore.

La cresta neurale è compatta.

Le operazioni eseguite in circa 50 embrioni furono di tre ordini:

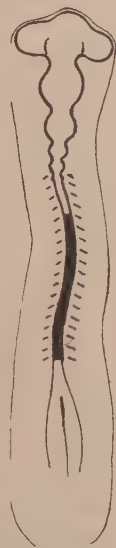


Fig. 1. — Embrione di pollo allo stadio di 18 somiti. In nero il segmento di midollo asportato.

1° asportazione limitata al segmento dorsale del midollo, avendo cura di lasciare integra la porzione ventrale motrice;

2° asportazione totale del midollo rispettando la notocorda, la quale spiccava come un sottile cordone più chiaro e refrangente sul mesenchima contiguo;

3° asportazione completa del midollo e della notocorda.

Tutti gli embrioni, sia quelli nei quali l'operazione era limitata al segmento dorsale del midollo, che quelli nei quali l'asportazione fu più demolitiva, si svilupparono perfettamente, e furono fissati tra il 10° e il 15° giorno d'incubazione, colorati con il metodo all'argento ridotto Cajal-De Castro e sezionati in serie. I risultati riferiti in questa Nota sono tratti dall'esame di una ventina di casi ben riusciti, sia per l'operazione che per la colorazione argentea.

RISULTATI. - 1° Negli embrioni del 1° gruppo operati di asportazione del segmento dorsale del midollo toraco-lombare, la porzione ventrale del midollo si formò normalmente. In assenza della catena dei gangli spinali, il simpatico si sviluppò per tutta l'altezza del segmento asportato, cioè per circa 10 somiti. Questi risultati, in accordo con quelli ottenuti da Jones sullo stesso materiale, sono in contrasto con l'ipotesi di una derivazione dei simpatoblasti dalla cresta neurale, e cioè dalla stessa matrice dei gangli spinali.

2° Negli embrioni del 2° gruppo, il midollo risultò completamente mancante per un'altezza varia da 6 a 11 somiti, in corrispondenza della regione toraco-lombare. La presenza della notocorda permise la formazione delle vertebre, che se pure difettose, e per lo più ridotte al corpo vertebrale senza archi, tuttavia si costituirono per tutta la zona corrispondente al midollo asportato. Malgrado la completa assenza del midollo e della catena dei gangli spinali, *l'ortosimpatico si formò normalmente.*

In completa assenza di fibre nervose sensitive e motrici, i gangli dell'ortosimpatico risultarono collegati l'uno all'altro dal cordone limitante secondario, e intimamente aderenti al corpo vertebrale. In molti casi i due cordoni limitanti secondari si fusero l'uno con l'altro in corrispondenza della faccia dorsale del corpo vertebrale e nel punto di fusione si costituì un raggruppamento gangliare derivato dalla unione di due gangli (fig. 2). Molte volte i gangli si svilupparono di volume inferiore al normale, e risultò difettosa la disposizione segmentale. In qualche esemplare tuttavia (fig. 2) particolarmente riuscito, i gangli raggiunsero un volume paragonabile a quello di embrioni di controllo, ed anche il numero fu normale. In uno di questi la catena dei gangli costituitasi in completa assenza di fibre nervose, si estese per un tratto corrispondente a 10 somiti e il numero di gangli privi di connessioni con fibre nervose pregangliari fu di 10 per lato e tipicamente segmentale.

La formazione della catena toraco-lombare dell'ortosimpatico in assenza del midollo e dei gangli spinali si verificò in tutti i casi operati, nei quali la presenza del corpo vertebrale - sia pure ridotto - permise che tra questo e il cordone limitante secondario si stabilissero rapporti non molto dissimili da quelli consueti.



Per quel che riguarda le modalità di origine del cordone limitante primitivo, dei gangli preaortici derivati da quello, del metasimpatico, e del simpatico cervicale, le ricerche sono tuttora in corso e saranno riferite in un'altra Nota.

3° Negli embrioni compresi nel 3° gruppo risultarono assenti i gangli che costituiscono il cordone secondario del tratto toraco-lombare. Questo intervento fu più demolitivo del precedente, in quanto con il midollo si asportò anche la notocorda e non si formarono nè i corpi nè gli archi vertebrali.

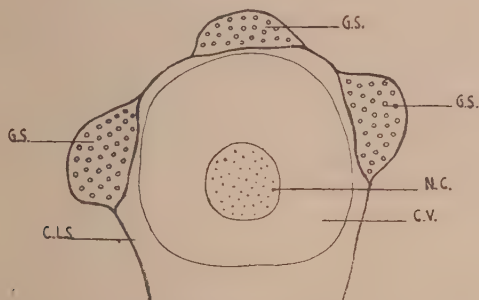


Fig. 2. - Figura semischematicca disegnata colla camera lucida dall'embrione N. 630, fissato al 10° giorno di sviluppo. In assenza del sistema nervoso toraco-lombare per un tratto di 10 somiti, i gangli simpatici si svilupparono normalmente e i due cordoni limitanti secondari si unirono dorsalmente al corpo vertebrale.

G. S. Gangli simpatici della catena toraco-lombare.  
C. L. S. Cordone limitante secondario.  
C. V. Corpo vertebrale.  
N. C. Notocorda.

**DISCUSSIONE.** - Le esperienze del 2° gruppo dimostrano che il simpatico toraco-lombare si forma con la tipica disposizione segmentale anche in completa assenza del midollo spinale e dei gangli spinali.

Il caso riferito nel quale in assenza del midollo e dei gangli spinali, si formarono 10 gangli simpatici della catena toraco-lombare a tipica disposizione segmentale, dai due lati del corpo vertebrale, mi sembra decisivo in favore dell'interpretazione di un'origine in sito dal mesenchima. In questo modo vien data la conferma con metodo sperimentale alle belle ricerche di Tello sull'origine mesenchimale del simpatico. All'ipotesi dello stesso Autore il simpatico abbia una comune matrice con gli endoteli vascolari, non posso portare, in base ai dati delle mie esperienze, alcun elemento. Con il 3° gruppo di esperienze si dimostra che se l'operazione è molto demolitiva, e non si son formati i corpi vertebrali in conseguenza della distruzione della notocorda, non si costituiscono i gangli del cordone secondario toraco-lombare. Ritengo, in base a questi risultati, che la mancata formazione del simpatico in seguito all'asportazione del midollo, interpretata dai varî Autori come conseguente alla mancata migrazione di simpatoblasti lungo le fibre nervose sensitive o motrici, sia da imputare alla difficoltà di rispettare la

notocorda necessaria per la formazione dei corpi vertebrali. Questa ipotesi è convalidata dal seguente reperto accidentale: in un embrione operato di asportazione totale del midollo e della notocorda, un frammento di midollo di una certa lunghezza spostato lateralmente durante l'operazione, e scivolato di nuovo casualmente nella sua sede, si sviluppò in assenza della notocorda e dei corpi vertebrali, in intimo contatto con i visceri. Malgrado la normale formazione delle radici ventrali e dei gangli sensitivi, i gangli simpatici risultarono del tutto assenti.

Tuttavia perchè lo sviluppo dell'ortosimpatico toraco-lombare sia condizionata dalla formazione della notocorda e dei corpi vertebrali, non sono per il momento in grado di precisare.

I risultati riferiti in questa Nota si accordano con quelli ottenuti in base a ricerche sperimentali nel territorio del parasimpatico mesencefalico. Fu dimostrato infatti (Levi-Montalcini e Amprino) che il ganglio ciliare si forma in completa assenza di fibre nervose,

**Biologia.** — *Ricerche sulle correlazioni nello sviluppo del sistema nervoso. - Regressione secondaria del ganglio ciliare dopo asportazione della vescicola mesencefalica in embrione di pollo* (\*). Nota di R. LEVI-MONTALCINI, presentata (\*\*) dal Socio G. LEVI.

In una comunicazione precedente furono esposti i risultati sperimentali dai quali emerge che il ganglio ciliare si costituisce normalmente in embrioni di pollo anche in completa assenza di fibre nervose apparenti (Levi-Montalcini ed Amprino). La formazione del ganglio in embrioni operati di asportazione del mesencefalo e delle due matrici del ganglio del V paio (rombencefalo e placode oftalmico) prima dell'emergenza dell'oculomotore e rispettivamente della formazione del ganglio del trigemino, permise di escludere la derivazione dei neurociti per migrazione lungo le radici motrice e sensitiva, ed escluse pure che le fibre nervose esercitino un'influenza formativa sul ganglio stesso.

Oggetto di questa ricerca è studiare il destino del ganglio ciliare privato delle connessioni con il centro motore viscerale, dalla sua formazione in terza giornata alla fine dello sviluppo embrionale.

In embrioni di pollo di 10-12 somiti fu asportata con la tecnica riferita in altre comunicazioni la vescicola mesencefalica. Gli embrioni si svilupparono normalmente, furono fissati in periodi successivi all'operazione tra il 4° e il 21° giorno dello sviluppo, colorati con la tecnica all'argento ridotto

(\*) Ricerca eseguita nel Centro di studi sull'accrescimento e la senescenza, alle dipendenze del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Anatomico di Torino.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

Cajal-De Castro e sezionati in serie. I dati riportati in questa Nota si riferiscono a una ventina di casi perfettamente riusciti sia dal lato sperimentale che della colorazione argantica.

**RISULTATI.** — Lo sviluppo del ganglio ciliare in embrioni operati tra la 32<sup>a</sup> e la 38<sup>a</sup> ora (stadio 8-12 somiti) di asportazione del mesencefalo, procede in modo normale fino al 10<sup>o</sup> giorno, e differisce da quello di embrioni di controllo soltanto per l'assenza del fitto plesso costituito dalle fibre pregangliari in seno al ganglio stesso. Malgrado la mancanza di queste, sia i processi mitotici che le prime fasi della differenziazione neuroblastica si attuano normalmente. Al 10<sup>o</sup> giorno in quasi tutti i neuroblasti si è differenziato un cono neurofibrillare intensamente impregnato, eguale a quello di embrioni di controllo. A partire dall'11<sup>o</sup> giorno i neuroni vanno incontro a processi regressivi che si accentuano nei giorni successivi, culminando nell'ultimo periodo dello sviluppo embrionale in un'atrofia estesa a tutti i neuroni, in forma più o meno accentuata. In embrioni fissati tra il 17<sup>o</sup> ed il 21<sup>o</sup> giorno dello sviluppo, il ganglio si presenta di volume molto ridotto (circa 1/10 del normale), malgrado che il numero delle cellule non sia molto inferiore a quello di embrioni normali. La diminuzione di volume del ganglio è determinata quasi esclusivamente dalla riduzione nella grandezza dei singoli neuroni. Le cellule nervose fittamente addossate le une alle altre presentano un aspetto epiteloide che dipende verisimilmente dalla regressione delle neurofibrille.

Confrontando il destino del ganglio in conseguenza della mancata connessione con il centro pregangliare, con il destino del ganglio stesso in seguito all'asportazione eseguita in un periodo precoce dello sviluppo embrionale dell'organo periferico (Amprino) risulta, che i due processi, pur culminando tutti e due nell'atrofia del ganglio, tuttavia differiscono notevolmente nel quadro istologico. In embrioni operati all'inizio della terza giornata dello sviluppo embrionale di asportazione parziale o totale del bulbo oculare, lo sviluppo del ganglio ciliare prosegue sin verso l'8<sup>o</sup> giorno in modo eguale a quello di embrioni di controllo. Le cellule si differenziano normalmente assumendo i caratteri di neuroblasti. Dall'8<sup>o</sup> giorno in poi si produce l'atrofia di un numero rilevante di neuroblasti, in seguito alla quale essi scompaiono del tutto senza lasciar traccia, fatta eccezione per un numero limitato di neuroblasti, i quali rimangono integri e presentano soltanto una lieve riduzione di volume (Amprino).

L'Autore interpreta quest'atrofia come conseguente all'impossibilità da parte dei neuroni di stabilire connessioni sinaptiche normali con la periferia in assenza del bulbo oculare, interpretazione alla quale io mi associo. I neuroni che non vanno incontro ad atrofia avrebbero secondo Amprino, istituito connessioni con elementi del connettivo e della parete dei vasi.

Lo svolgimento del processo è del tutto differente da quello che io ho osservato per effetto dell'assenza dei neuroni pregangliari. In seguito alla asportazione della vescicola mesencefalica, infatti, la differenziazione del

ganglio procede normalmente sino al 10° giorno e soltanto allora incomincia una lenta e progressiva sdifferenziazione delle cellule, per effetto della quale il reticolo neurofibrillare scompare, e i neurociti assumono come fu detto carattere di cellule epitelioidi. In seguito ad estirpazione dell'organo periferico l'atrofia dei neuroni è invece tanto veloce, che non è concesso seguire le tappe del processo involutivo e soltanto la rilevante diminuzione del numero dei neuroni fornisce la prova indiretta di tale processo.

Nelle esperienze riferite in questa Nota il ganglio ciliare costituitosi normalmente incominciò a regredire in modo lento e progressivo soltanto dopo il 10° giorno. Questo dimostra che le mancate connessioni con i centri nervosi pregangliari si riflettono sullo sviluppo dei neuroni del ganglio ciliare soltanto quando i neuroblasti, pur presentando ancora segno d'immatùrità, hanno tuttavia già il carattere di cellule nervose.

Nello sviluppo normale i neuroni si differenzierebbero dunque sin verso il 10° giorno per proprietà ad essi insite; successivamente essi proseguirebbero la loro differenziazione sotto l'influenza esercitata dai neuroni pregangliari.

L'influenza esercitata dalle fibre pregangliari motrici attraverso la connessione sinaptica sulla differenziazione del ganglio, è anche dimostrata indirettamente dal differente comportamento del ganglio ciliare in seguito alla distruzione del ganglio del V nervo. La distruzione della cosiddetta radice sensitiva non disturba lo sviluppo del ganglio ciliare che procede in modo del tutto normale (Amprino). Come è noto la radice sensitiva non stabilisce sinapsi coi neuroni ciliari ma ha con essi rapporti puramente contingenti.

RIASSUNTO. — In embrioni di pollo nei quali mediante distruzione del mesencefalo i neuroni del ganglio ciliare sono sottratti all'influenza dei neuroni pregangliari, i primi si differenziano normalmente sino al 10° giorno; successivamente sono soggetti ad una lenta sdifferenziazione che culmina nell'atrofia completa; quest'atrofia, dipende, secondo la mia interpretazione, dall'assenza dello stimolo funzionale trasmesso dal centro pregangliare.

**Biologia.** — *Studi sul meccanismo d'azione della Streptomycin.* — I. Alterazioni dell'«*Escherichia coli*», in fase biotica e trattata colla Streptomycin, osservate al microscopio elettronico (\*). Nota di G. PENSO e F. SCANGA, presentata (\*\*) dal Corrisp. V. PUNTONI.

L'azione della Streptomycin sull'*Escherichia coli*, viene da noi studiata sistematicamente sia dal punto di vista delle alterazioni morfologiche prodotte, sia dal punto di vista delle conseguenze biologiche derivate.

(\*) Le osservazioni sono state compiute, in collaborazione con DARIA BOCCIARELLI, col microscopio elettronico dell'Istituto Superiore di Sanità, microscopio progettato e costruito nel laboratorio di Fisica dell'Istituto stesso.

(\*\*) Nella seduta del 10 maggio 1947.



In questa prima Nota riferiamo sulle alterazioni, osservate al microscopio elettronico, che dosi subinibenti di Streptomicina hanno provocato sull'*Escherichia coli* in fase biotica, vale a dire su germi in via di sviluppo, mantenuti in terreno culturale e a temperatura di crescita.

Vedremo in una Nota successiva l'azione della Streptomicina sull'*Escherichia coli* in fase anabiotica.

Il ceppo di *Escherichia coli* da noi usato è un ceppo normale, conservato nella collezione dell'Istituto col N. 18, ceppo che resta inibito da 1 unità Waksman di Streptomicina per centimetro cubo.

La tecnica seguita è stata la seguente: in provette contenenti 5 cm<sup>3</sup> di brodo di carne a pH 7,2 si aggiungevano 2 unità di Streptomicina (0,40 U.W./cm<sup>3</sup>) e si seminavano con un'ansata di brodocultura di 18 ore di *Escherichia coli*.

Il materiale da osservare al microscopio elettronico veniva così ottenuto:

1° Centrifugazione, dopo il tempo voluto, della brodocultura a 1500 giri al minuto per 20'.

2° Il sedimento viene trattato con 5 cm<sup>3</sup> di una soluzione di formalina al 10 %, agitato e centrifugato a 1500 giri per 20'.

3° Il sedimento viene raccolto con 5 cm<sup>3</sup> di acqua bidistillata, agitato e centrifugato per 20' a 1500 giri.

4° Il sedimento viene raccolto con 5 cm<sup>3</sup> di acqua bidistillata agitato centrifugato per 20' a 1500 giri.

5° Il sedimento viene raccolto con circa 1 cm<sup>3</sup> di acqua bidistillata: la sospensione è pronta per essere osservata al microscopio elettronico.

Come controllo viene usata, con la stessa tecnica, una uguale cultura di *Escherichia coli* senza aggiunta di Streptomicina.

Ed ora passiamo a considerare le conseguenze che una tale metodologia ha provocato sui germi.

Le culture di coli di due ore (senza aggiunta di Streptomicina) mostrano, al microscopio elettronico, individui allungati, a margini netti, a protoplasma compatto, omogeneo, non trasparente; appena accennata, talvolta, la membrana pericellulare ed esclusivamente in vicinanza dei poli.

Non si tiene conto in questa descrizione, né nelle successive, della presenza o meno di ciglia, in quanto le ripetute centrifugazioni sono deleterie per questi delicatissime appendici.

I coli di uguale anzianità, ma trattati con dosi subinibenti di Streptomicina, si presentano di dimensioni pressochè analoghe ai controlli, ma leggermente rigonfi, con protoplasma meno compatto, più trasparente, talvolta leggermente aereolato. La membrana pericellulare non è mai visibile, ed è logico sia così, dato il rigonfiamento interno del protoplasma.

Le culture di coli di quattro ore (senza Streptomicina) mostrano, al microscopio elettronico, individui più corti di quelli di due ore e leggermente più larghi, di aspetto generale, quindi, lievemente più tozzo.

I margini cellulari sono sempre netti, il protoplasma sempre compatto, omogeneo, non trasparente, la membrana pericellulare pressochè invisibile, e ciò può essere logico dato l'ingrossamento subito dal germe.

I coli di uguale anzianità, ma trattati con dosi subinibenti di Streptomicina, mostrano dimensioni analoghe ai germi normali, sebbene sia possibile incontrare forme leggermente meno tozze e più allungate. Il protoplasma è nuovamente compatto, omogeneo, ma coartato e a limiti ondulati: la membrana pericellulare è, di conseguenza visibile sia ai poli, dove sopravanza nettamente il protoplasma, sia lungo i margini laterali.

Le culture di coli di sei ore (senza Streptomicina) mostrano, sempre al microscopio elettronico, individui ancora più corti e più tozzi di quelli osservati nelle culture di quattr'ore. Il protoplasma è sempre a margini netti, compatto, omogeneo, non trasparente. La membrana pericellulare è pressochè invisibile.

I coli di uguale anzianità, ma trattati con dosi subinibenti di Streptomicina, mostrano individui corti, tozzi, a barilotto, a margini sfumati, a protoplasma meno compatto e meno omogeneo degl'individui normali, diremmo quasi ch'esso si presenta d'aspetto torbido e con addensamento maggiore al centro che alla periferia, dove la membrana pericellulare è rigonfia, male individuabile ma comprensibile. Accanto a simili organismi, si rinven- gono altri individui che hanno invece, il protoplasma ancora compatto, omogeneo, poco trasparente, malgrado siano osservabili alcune zone vacuo- late, specialmente periferiche e lungo i margini, dai quali si distacca la mem- brana pericellulare che sopravanza nettamente le regioni polari dei batteri.

Le culture di coli di dodici ore (senza Streptomicina) mostrano, al micro- scopio elettronico, individui presso a poco analoghi, come dimensioni, a quelli di sei ore; il protoplasma, però, non è omogeneamente compatto, ma presenta uno schiarimento polare a semiluna. La membrana pericellulare, poi, è nettamente distaccata da tutto il corpo protoplasmatico del germe, salvo nelle regioni polari dove alcuni sottilissimi filamenti congiungono il protoplasma con la membrana.

I coli di uguale anzianità, ma trattati con la Streptomicina, presen- tano alterazioni nuove. Il protoplasma ha generalmente margini sfumati, non si presenta omogeneo, né uniforme; si notano, invece, ispessimenti carat- teristici alle due estremità polari e, a volte, qua e là anche nello stroma pro- toplasmatico. Generalmente il centro del corpo batterico è più chiaro, e quindi meno spesso, del rimanente. La membrana pericellulare è distaccata. In alcuni esemplari si osservano nettamente le lacinie che uniscono il protoplasma alla membrana.

Le culture di coli di 24 ore (senza Streptomicina) presentano individui di diverse dimensioni e caratterizzati dal fatto di avere il protoplasma non omogeneo, non compatto, con ispessimenti irregolarmente diffusi in tutto il corpo batterico i cui margini protoplasmatici sono irregolari e quasi seghet- tati. La membrana pericellulare è completamente distaccata dal corpo bat- terico. A volte essa non si vede, l'aspetto del protoplasma conserva, però, le sue caratteristiche.

I coli di uguale anzianità, ma trattati con dosi subinibenti di Strepto- micina, presentano alterazioni tipiche che sono una chiara evoluzione delle

alterazioni osservate dopo 12 ore. Il protoplasma batterico diminuisce di compattezza, divenendo più trasparente al centro del corpo, mentre si ha un netto addensamento protoplasmatico agli estremi del germe. Lo schiarimento interno è accompagnato da un ingrossamento dello stroma protoplasmatico, i cui margini debordano da quelli delle estremità, per cui tra gli estremi distali e il centro del germe si viene ad avere un vero scalino. A volte s'incontrano germi la cui alterazione protoplasmatica ha colpito anche una estremità del germe stesso, per cui tali organismi si presentano con un solo estremo a protoplasma addensato. La membrana pericellulare è, di solito, scarsamente visibile, a volte s'indovina ed è staccata dal protoplasma.

Le culture di coli di quarantotto ore (senza Streptomicina) mostrano individui di dimensioni varie, con protoplasma più o meno compatto e a margini più o meno ondulati, ma con membrana pericellulare sempre distaccata dal protoplasma in tutto il suo perimetro. La larghezza dello spazio tra la membrana e il protoplasma dicono come questo abbia dovuto notevolmente coartarsi.

I coli di uguale anzianità, e trattati con dosi subinibenti di Streptomicina, mostrano il corpo piuttosto allungato, il protoplasma notevolmente chiarificato, l'addensamento apicale, già descritto nell'individui di 24 ore, notevolmente ridotto di volume e limitato talvolta a una piccola superficie ellittica immersa nella zona chiara, la quale si può presentare sia uniforme, sia variegata con zone di maggiore o minore addensamento. La membrana pericellulare ora è visibile ed ora no.

Da queste prime osservazioni si può dedurre che l'*Escherichia coli*, mantenuta in brodocultura, evolve la sua *facies* strutturale nel senso che le forme giovani si presentano allungate, a protoplasma omogeneo, compatto, non trasparente, a membrana pericellulare invisibile; mano mano che le culture invecchiano, le forme dapprima si raccorciano e divengono più tozze, mantenendo invisibile la membrana pericellulare, poi si riallungano più o meno, coartano il protoplasma, e la membrana pericellulare diviene nettamente visibile e completamente distaccata dal corpo batterico.

L'*Escherichia coli*, coltivata in presenza di dosi subinibenti di Streptomicina, evolve nel senso che dapprincipio i germi presentano un semplice rigonfiamento, seguito subito dal distacco della membrana pericellulare e poi da uno schiarimento protoplasmatico centrale accompagnato da un rigonfiamento della zona chiara e da un addensamento apicale che va sempre più riducendosi.

Il significato biologico di tali alterazioni verrà discusso in altra Nota basandosi su nuovi dati sperimentali. Allo stato dei fatti possiamo concludere che l'*Escherichia coli*, coltivata in presenza di dosi subinibenti di Streptomicina, subisce un invecchiamento precoce tale che dopo quattro ore si hanno forme analoghe a quelle che si rinvergono in culture normali di 12 e 24 ore.

Tale invecchiamento precoce sembra evolvere, però, differentemente dall'invecchiamento naturale.

**Biologia.** — *Sostanze modificanti lo sviluppo embrionale e viscosità di soluzioni contenenti macromolecole.* Nota di P. CITTERIO e S. RANZI, presentata (\*) dal Corrisp. G. BRUNELLI.

In un precedente lavoro<sup>(1)</sup> mostrammo che NaSCN, NaI, piocianina, che agendo su embrioni di Anfibi producono mostri con la corda grande e iperevocazione<sup>(2)</sup>, determinano, alla concentrazione attiva sugli embrioni (ca. 0,05 mol per NaSCN e NaI), un abbassamento di viscosità degli estratti di embrioni che contengono particelle che sono, o hanno notevole tendenza a presentarsi in forma filamentosa, mentre un simile abbassamento non si osserva negli estratti che contengono esclusivamente proteine a particelle globulari. Le sostanze invece, che producono impicciolimento della corda e ipoevocazione (LiCl, NaCl, Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, MgCl<sub>2</sub>, Na-tartrato [neutro], alcool etilico), producono, alla concentrazione attiva sugli embrioni (ca. 0,14 mol. per i sali), un aumento di viscosità su tutti gli estratti di proteine embrionali. Questo ci portò a concludere che l'abbassamento di viscosità delle soluzioni di proteine, che hanno una notevole tendenza a presentarsi in forma filamentosa, dovuto a NaSCN (e alle sostanze che agiscono come esso) fosse l'espressione della prima alterazione che, modificando la determinazione dell'embrione, determina corda grande e iperevocazione e che l'aumento di viscosità delle medesime soluzioni ad opera di LiCl (e delle sostanze che agiscono come esso) fosse l'espressione della prima alterazione che determina corda piccola e ipoevocazione. Si poneva così in proteine, che hanno tendenza a presentarsi in forma filamentosa, la base della determinazione dell'embrione e si concludeva che l'euglobulina *b* deve giocare un ruolo di primo piano in questi fenomeni.

Il presente lavoro<sup>(3)</sup> è stato eseguito al fine di vedere se il particolare comportamento dell'euglobulina *b* dipendeva dalla forma della sua molecola o da altre sue proprietà. Abbiamo pertanto studiato, con metodi identici a quelli seguiti nello studio della viscosità degli estratti embrionali, la viscosità di alcune macromolecole meglio studiate dai chimici biologi: soluzioni a particelle allungate (miosina e timonucleinato di Na); soluzioni a particelle sferiche o poco allungate (globulina X della muscolatura, gelatina marca oro).

La miosina e la globulina X sono state estratte<sup>(4)</sup> dalla muscolatura di co-

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) R. AROSIO, P. CITTERIO, P. MENOTTI, S. RANZI e F. SEMENZA, « Riv. Biol. », 38, 152 (1946).

(2) S. RANZI, E. TAMINI e E. STORARI OFFER, « Ist. Lombardo, Rend. Sc. », 79, 161 (1946).

(3) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Milano sussidiate nel 1946 e 1947 dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(4) In queste estrazioni ci furono di valido aiuto R. Arosio, M. Giudici e P. Menotti, che ringraziamo.



niglio e di colombo, secondo lo schema di estrazione presentato da Schäffner<sup>(5)</sup> in base ai metodi di Weber, Edsall ecc. Miosina e globulina X, dopo essere state precipitate a pH appropriato, venivano ridissolte la prima in 1 mol. KCl, la seconda in 0,5 mol. KCl.

L'acido timonucleinico è stato estratto da pancreas di bovino secondo lo schema presentato da Klein<sup>(6)</sup>, in base ai metodi di Hammarsten, Bang, Jones, Levene e Jorpes e ridissolto, quale sale sodico, in acqua.

Prove di controllo sono state eseguite con euglobulina *b*, estratta da uova di rana.

Tutte queste estrazioni sono state eseguite in locale refrigerato sotto 0°C.

La gelatina extrafina marca oro (A G S, Berlin-Wien) veniva sciolta a 0,8 % in acqua distillata tiepida.

La condotta degli esperimenti veniva fatta secondo lo schema: 10 cc. di soluzione contenente la miosina (o altra sostanza) venivano diluiti con 10 cc. di una soluzione costituita da 1 mol. KCl (controllo) ovvero con 10 cc. di una miscela di 1 mol. KCl e 1 mol. KSCN (o altro sale) graduata in maniera che il KSCN raggiungesse nel tutto la concentrazione desiderata. Dopo una notte di permanenza in ghiacciaia a ca. +1°C, si provvedeva alla determinazione di viscosità col viscosimetro di Ostwald a temperatura di  $11,5^{\circ} \pm 0,02^{\circ} \text{C}$ <sup>(7)</sup>.

I risultati sono i seguenti:

Piccole concentrazioni di KSCN determinano, sulle soluzioni di miosina (fig. 1 D, E), una graduale caduta della viscosità, che raggiunge un minimo ad una concentrazione di KSCN nella soluzione totale di ca. 0,05 - 0,06 mol. A concentrazioni più elevate si osserva un aumento più o meno marcato della viscosità. La diminuzione di viscosità si osserva anche per timonucleinato di Na (è stata studiata la sola concentrazione 0,05 mol. KSCN, rispetto al controllo privo di KSCN) (fig. 1 L). Con la miosina si ottengono cioè le medesime variazioni di viscosità che presenta l'euglobulina *b*; per quest'ultima forse l'aumento di viscosità a concentrazioni di SCN' superiori al 0,1 mol è più marcato (cfr. Arosio ecc., op. cit., fig. 2). Sulla globulina X (fig. 2 F) e gelatina (fig. 2 E)<sup>(8)</sup> il KSCN, fino alla concentrazione 0,5 mol., induce un aumento di viscosità rispetto al controllo (pivo di KSCN)<sup>(9)</sup>.

(5) A. SCHÄFFNER, *Proteine, Protamine, Abbauprodukte und Peptide*, in BAMANN u. MYRBÄCK, *Methoden der Fermentforschung*, p. 349 (1941).

(6) W. KLEIN, *Nucleinsäure und ihre Spaltprodukte* in BAMANN u. MYRBÄCK (op. cit.), p. 313.

(7) Tutte le letture vennero fatte da P. Citterio.

(8) La gelatina è una proteina filamentosa che si presenta polidispersa quando è in soluzione (E. B. SANIGAR, L. E. KREJCI e E. O. KRAEMER, «J. amer. Chem. Soc.», 60, 757, 1938) con particelle poco allungate (G. BOHEM e R. SIGNER, «Helv. Chim. Acta», 14, 1370, 1931) forse rotondeggianti o quasi. Sarebbe interessante dimostrare che il primo tratto del grafico della fig. 2 E (aumento di viscosità) corrisponde ad una frammentazione di queste particelle con liberazione di molecole o complessi molecolari filamentosi, e il secondo tratto (diminuzione della viscosità) al graduale spezzettamento di questi filamenti.

(9) La differenza tra i presenti dati e quelli di J. LOEB (*Les protéines*, Paris, 1924, fig. 46) sta nel fatto che noi sostituiamo KSCN a KCl mentre Loeb aggiunge semplicemente NaSCN.

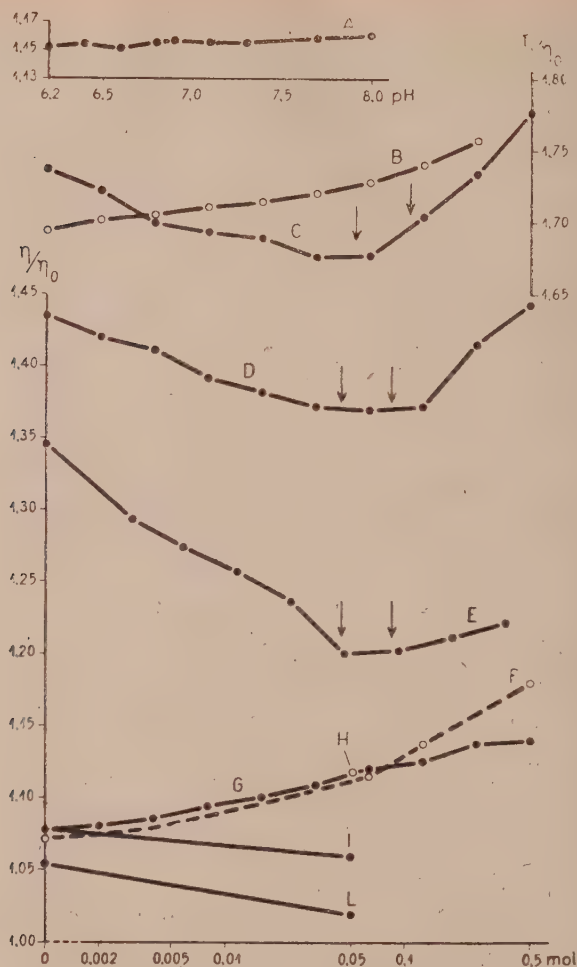


Fig. 1. - Viscosità relativa di soluzioni di proteine filamentose. Sulle ascisse la concentrazione molare del sale sperimentato in scala logaritmica; sulle ordinate la viscosità relativa. (Per il grafico A le ascisse danno il pH).

A miosina di coniglio (0,1 %) in 1 mol KCl con pH aggiustato con tampone a fosfati; B miosina di coniglio (0,6 %) in 1 mol KCl tamponato a pH 8, trattata con  $K_2SO_4$ ; C miosina di coniglio (0,7 %) in 1 mol KCl trattata con KI; D miosina di coniglio (0,5 %) in 1 mol KCl tamponato a pH 8 trattata con KSCN; E miosina di Colombo (0,5 %) in 1 mol KCl trattata con NaSCN; F euglobulina *b* di embrione di rana in 1 mol KCl tamponato a pH 7 trattata con LiCl; G miosina di Colombo (0,2 %) in 1 mol KCl trattata con LiCl (i punti H e I riguardano la stessa soluzione trattata rispettivamente con Na-tartrato e NaSCN); L timonucleinato di Na (0,02 %) sciolto in acqua trattato con KSCN (controllo con KCl).

Il KI agisce come il KSCN. Nelle soluzioni di miosina (fig. 1 C) il minimo di viscosità si ha quando il KI raggiunge la concentrazione di ca. 0,06 mol. Le soluzioni di globulina X presentano un graduale aumento di viscosità man mano che cresce la concentrazione del KI (fig. 2 G). L'azione del I' sul

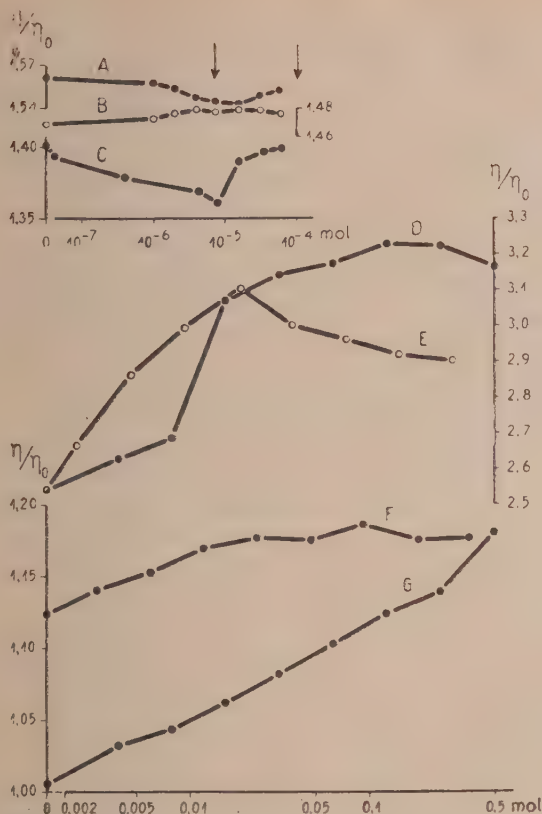


Fig. 2. — Viscosità relativa di soluzioni di miosina, gelatina, globulina X. Ascisse e ordinate come la fig. 1.

A miosina di coniglio (0,6%) in 1 mol. KCl tamponato a pH 8 trattata con blu di metilene; B globulina X di coniglio (0,5%) sciolta in 0,5 mol. KCl trattata con blu di metilene; C miosina di coniglio (0,5%) sciolta in 1 mol KCl trattata con blu di metilene; D gelatina sciolta in acqua (0,4%) trattata con LiCl (controllo in KCl); E gelatina sciolta in acqua (0,4%) trattata con NaSCN (controllo con KCl); F globulina X di Colombo (0,02%) sciolta in 0,5 mol. KCl trattata con NaSCN; G globulina X di coniglio (0,01%) sciolta in 0,5 mol. KCl trattata con KSCN.

timonucleinato di Na non è stata da noi studiata, ma Greenstein e Jenrette<sup>(10)</sup> trovano che il timonucleinato ha una viscosità minore in 0,5 mol. NaI che non in 0,5 mol. NaCl.

Il blu di metilene (aggiunto in sostanza alle soluzioni di miosina o globulina X in 1 mol. ovvero 0,5 mol KCl) determina un abbassamento della viscosità della miosina, che raggiunge il massimo per concentrazioni tra  $8 \cdot 10^{-6}$  e  $3,2 \cdot 10^{-5}$  mol. blu di metilene (fig. 2 A, C). È praticamente senza effetto, o forse determina un leggero aumento della viscosità, su soluzioni di globulina X (fig. 2 B).

(10) J. P. GREENSTEIN e W. V. JENRETTE, «Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.», 9, 236 (1941).

Il punto che a noi sembra molto importante in questa osservazione è che KSCN, KI, blu di metilene determinano un abbassamento di viscosità delle soluzioni di miosina, abbassamento che ha il suo massimo proprio per le concentrazioni attive nel determinare mostri con corda grande e ipervocazione, concentrazioni che sono quelle indicate nei grafici tra le due frecce (fig. 1 C, D, E, fig. 2 A, C). Nessun effetto paragonabile si osserva sulla globutina X (fig. 2 F, G).

Il LiCl e il  $K_2SO_4$  determinano, fino alla concentrazione di 0,2 mol., un aumento della viscosità di tutte le proteine studiate (fig. 1 B, G, fig. 2 D). Una osservazione eseguita con Na-tartrato (neutro) (fig. 1 H) allinea il punto del tartrato con quelli del LiCl. L'aumento di viscosità prodotto da LiCl,  $Na_2SO_4$ , Na-tartrato sulla euglobulina *b* ha quindi il parallelo in una simile azione sulla miosina.

L'aumento prodotto dal LiCl sulla euglobulina *b* sembra però più forte al disopra di 0,06 mol. (fig. 1 F, G), e cioè per le concentrazioni attive sugli embrioni. Però mentre le soluzioni di miosina usate erano sufficientemente pure non sappiamo se il metodo seguito per separare l'euglobulina *b*<sup>(11)</sup> fosse tale da isolarla da tutte le proteine globulari presenti negli estratti come, d'altra parte, non sappiamo se una parte dell'euglobulina *b* stessa non si conserva in condizione globulare.

Si esclude che i cambiamenti di viscosità siano in rapporto a cambiamenti di pH, perchè le variazioni osservate non superavano mai 0,1 unità di pH e le variazioni di viscosità di miosina a pH tra 6,2 e 8,0 sono trascurabili (fig. 1 A che ha l'ordinata nella stessa scala delle altre ordinate) (cfr. anche Dainty e altri<sup>(12)</sup>).

Un paragone può istituirsi tra le presenti ricerche e quelle di Dainty e altri (op. cit.) che videro che miosina sciolta in KI e KSCN perde birifrangenza di flusso e, cioè, la forte anisotropia delle particelle di miosina va perduta, o in certa maniera mascherata, per azione di questi sali. La birifrangenza di flusso è invece conservata da miosina sciolta in  $K_2SO_4$  o LiCl.

Interessante ai nostri fini è l'osservazione di Edsall e Mehl<sup>(13)</sup>, che la denaturazione si accompagna ad una diminuzione di viscosità delle soluzioni di miosina a differenza di quello che avviene per le proteine globulari che, con la denaturazione, aumentano la viscosità<sup>(14)</sup>. Secondo Edsall i due fenomeni avrebbero le stesse basi, la denaturazione si accompagnerebbe sempre ad una rottura di alcuni legami e pertanto la molecola globulare denaturata si presenterebbe aperta (maggiore viscosità), la molecola filamentosa denaturata sarebbe rotta in pezzi più corti (minor viscosità).

(11) A. S. C. LAWRENCE, M. MIALI, J. NEEDHAM a. S.-C. SHEN, « J. gen. physiol. », 27, 233 (1944).

(12) M. DAINTY, A. KLEINZELLER, A. S. C. LAWRENCE, M. MIALI, J. NEEDHAM, D. M. NEEDHAM a. S.-C. SHEN, « J. gen. Physiol. », 27, 355 (1944).

(13) J. T. EDSALL a. J. W. MEHL, « J. biol. Chem. », 133, 409 (1940).

(14) W. T. ASTBURY, S. DICKINSON a. K. BAILEY, « Biochem. J. », 29, 2351 (1935).



Seguendo questa interpretazione si potrebbe pensare che l'abbassamento di viscosità da noi osservato nelle soluzioni di miosina ad opera di SCN', I', blu di metilene e l'azione inversa su globulina X corrispondano a denaturazione. Si potrebbero pertanto porre in relazione le malformazioni osservate nello sviluppo embrionale ad opera di questi sali come espressione di un fenomeno di denaturazione. In questo caso, però, di natura diversa dovrebbe essere l'azione del Li' e del SO<sub>4</sub>" perchè la denaturazione della miosina è sensibile solo quando questi ioni raggiungono e superano la concentrazione 0,5 mol (concentrazione letale per gli embrioni). Si potrebbe invece per basse concentrazioni di questi ioni pensare a fenomeni di solvatazione o di aumento delle forze attrattive tra molecola e molecola, ma per questo sono necessarie altre ricerche.

Riassumendo: quanto da noi osservato dimostra che le variazioni di viscosità, prodotte sull'euglobulina *b* dalle sostanze che determinano alterazioni dello sviluppo embrionale, possono venir riprodotte sulla miosina e, per quanto sperimentato, su timonucleinato di Na, non su proteine che presentano in soluzione particelle sferiche o poco allungate (globulina X, gelatina). L'euglobulina *b* deve quindi le modificazioni osservate alla forma filamentosa, che può acquistare la sua molecola. E, pertanto, questa forma filamentosa è di fondamentale importanza nei fenomeni di determinazione embrionale.

**Biologia.** — *Attività secretoria nel nucleo magnocellulare preottico di « Triturus cristatus carnifex »* (Laur.) (\*). Nota di V. MAZZI, presentata (\*\*) dal Corrisp. N. BECCARI.

L'attività secretoria a livello del nucleo magnocellulare preottico dei Teleostei e degli Anfibi anuri è stata fatta oggetto in questi ultimi anni di una numerosa serie di studi, dovuti principalmente ad E. Scharrer e alla sua scuola. Sotto questo riguardo sono invece molto meno noti gli Anfibi urodeli, nei quali si ritiene (E. e B. Scharrer, 1945)<sup>(1)</sup> che i fenomeni neurosecretori ipotalamici siano assai meno accentuati.

Nel corso di una ricerca sul ciclo ipofisario del tritone crestato m'è occorso di rilevare segni indubbi di attività secretoria nel nucleo magnocellulare preottico; attività che si esplica secondo un meccanismo peculiare che credo interessante di illustrare brevemente.

Per questa ricerca mi sono valso di preparati ottenuti da materiale fissato nei liquidi di Stieve e Sanfelice, incluso in paraffina e celloidina, sezionato in serie di 5 micron e colorato con la modificazione del metodo Mallory,

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata della Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) « *Physiol. Reviews* », vol. 25, p. 171 (1945).

dovuta a Galgano<sup>(2)</sup>. Per le zolle cromofile ho fissato in Carnoy senza acido acetico, incluso in paraffina o paraffina celloidina, sezionato a 7-8  $\mu$  e colorato con il metodo Dominici. Ho eseguito anche il metodo di J. Brachet per la messa in evidenza dell'acido ribonucleinico<sup>(3)</sup>. Questo metodo consiste nell'applicare contemporaneamente la colorazione col verde di metile-pironina secondo Unna a due sezioni dello stesso organo, una delle quali precedentemente trattata con un enzima specifico per l'acido ribonucleinico, la ribonucleasi. La presenza dell'acido ribonucleinico viene svelata dal fatto che, là dove esso era presente, viene a mancare l'affinità per la pironina in conseguenza del trattamento con la ribonucleasi.

La parte magnocellulare del nucleo preottico, descritta da Herrick (1910, 1927)<sup>(4)</sup> in *Amblystoma*, non fu invece messa in evidenza da Röthig (1911)<sup>(4)</sup>, nelle numerose specie di Anfibi prese in esame. Charlton (1929)<sup>(5)</sup> ha confermato ampiamente le osservazioni di Herrick ed ha segnalata la presenza di una *pars magnocellularis* del nucleo preottico ben sviluppata in *Cryptobranchus alleghaniensis*, *C. japonicus*, *Amphiuma means*, alquanto meno in *Necturus maculatus*, *Typhlotriton spelaeus*, *Molge cristata*. Il nucleo magnocellulare preottico, costituito da grandi cellule con grossi nuclei in *Amphiuma means*, e da grandi cellule con piccoli nuclei in *Cryptobranchus japonicus*, si estende dorsalmente fino al solco diencefalico ventrale, mentre caudo-ventralmente è limitato da quella che può essere identificata con la porzione rostrale del solco limitante.

Dall'esame dei diagrammi che illustrano schematicamente la posizione e l'estensione del nucleo magnocellulare in alcune specie di Selaci, Teleostei, Dipnoi, Anfibi anuri e urodeli, emerge che il nucleo magnocellulare preottico di questi ultimi è più somigliante, per estensione, mole delle cellule e posizione, a quello dei Teleostei che non a quello degli Anuri, il che può, secondo Charlton, essere messo in relazione con il fatto che Pesci ed Urodeli sono animali essenzialmente acquatici.

Herrick (1933)<sup>(6)</sup>, in base ad un accuratissimo studio della fine struttura del telencefalo di *Necturus maculosus* giunge a distinguere nel nucleo preottico cinque parti: anteriore, magnocellulare, periventricolare, posteriore ed epichiasmatica.

Contrariamente a quanto specificò Charlton, il nucleo magnocellulare preottico costituisce, nel tritone crestato, un complesso cellulare esteso e facilmente identificabile. Si trova a tappezzare le pareti del recesso preottico, e le sue cellule sono ampiamente commiste a quelle delle parti parvocellulari (riportabili, in base ad un criterio puramente topografico, a quelle segnalate da Herrick in *Necturus*), da cui si distinguono per le più grandi dimen-

(2) In corso di pubblicazione.

(3) «J. Comp. Neur.», vol. 20, p. 413 (1910); «J. Comp. Neur.», vol. 43, p. 231 (1927).

(4) «Arch. f. mikroskop. Anat.», Bd. 77, S. 48 (1911).

(5) «Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam», vol. 32, p. 476 (1929).

(6) «J. Comp. Neurol.», vol. 58, p. 1 (1933).

sioni (19,4  $\mu$ , contro 12,5  $\mu$ ), e per alcune particolarità su cui mi intratterrò fra breve. La parte dorsale del nucleo, limitata dal solco diencefalico ventrale, tende a spostarsi caudalmente.

Nel nucleo delle cellule del nucleo magnocellulare preottico (ben studiabile in materiale colorato con il Dominici o con il verde di metile-pironina secondo Unna) si osserva un reticolo di linina assai lasso, su cui le masserelle irregolari di cromatina si addensano alla periferia. La parte centrale del nucleo appare spesso completamente acromatica, e il nucleo assume in conseguenza aspetto vescicoloso. Il metodo di J. Brachet mette in luce come la cromatina contenga preponderantemente acido timonucleinico, ma anche tracce di acido ribonucleinico. Infatti la cromatina si colora in verde-blue prima, e in verde-franco dopo trattamento con la ribonucleasi. Secondo J. Brachet nel metodo da lui adottato il verde di metile colorerebbe elettivamente l'acido timonucleinico, la pironina l'acido ribonucleinico.

I nucleoli plastinici sono assai scarsi, e contengono esclusivamente acido pentosonucleinico.

Il citoplasma, debolmente acidofilo, spesso ad aspetto vacuolare, contiene scarsa sostanza tigroide, addensata alla periferia, secondo la caratteristica propria dei nuclei secernenti ipotalamici (E. Scharrer, Palay, Nilges, 1945<sup>(7)</sup>).

Inoltre il citoplasma spesso rivela contenere una particolare sostanza, la quale, come le cellule basofile o  $\beta$  dell'ipofisi, si colora intensamente con il blue di metile con la modificazione di Galgano del metodo Mallory, e che pertanto propongo di chiamare provvisoriamente basofila. Tale sostanza si presenta sotto forma di granuli, di ammassi irregolari, di lamelle. Probabilmente essa non ha nulla a che fare con la sostanza tigroide, in quanto non si colora con il bue di toluidina nel metodo Dominici, nè con la fucsina basica nel Mallory-Vannucci. Peraltro osservazioni condotte su materiale sottoposto alla reazione di J. Brachet, e che attendono ulteriore conferma, starebbero ad indicare in questa sostanza, come nella tigroide, un forte contenuto in acido ribonucleinico.

Questa sostanza è particolarmente ben conservata in materiale fissato con il liquido di Sanfelice, e sembra essere più abbondante nei mesi di marzo, aprile e maggio. Essa è presente in quantità variabili nei diversi elementi del nucleo magnocellulare, e sembra essere strettamente legata alla elaborazione del secreto colloide.

Quest'ultimo, che si presenta con le caratteristiche già note per gli Anfibi anuri, viene formato in quantità apprezzabile, sempre però inferiore a quella che si riscontra per esempio in *Bufo vulgaris*.

Secondo le mie osservazioni, il secreto viene elaborato a spese della particolare sostanza basofila, presentandosi da prima sotto forma di minutissimi granuli amfili (violetto scuro nella colorazione da me adottata), che progressivamente aumentano di volume per fenomeni di coalescenza, e nel contempo tendono ad assumere esclusivamente la fucsina acida. I granuli

(7) « Anat. Rec. », vol. 92, p. 23 (1945).

più grandi e quelli che si trovano fra le cellule hanno una tonalità più arancione, in quanto si colorano anche con l'orange G.

Sulla scorta di queste osservazioni preliminari <sup>(8)</sup>, condotte su individui ♂♂ e ♀♀, sacrificati nei mesi di febbraio, marzo, aprile, maggio, agosto, ottobre e novembre, la elaborazione del secreto colloide avverrebbe secondo il seguente

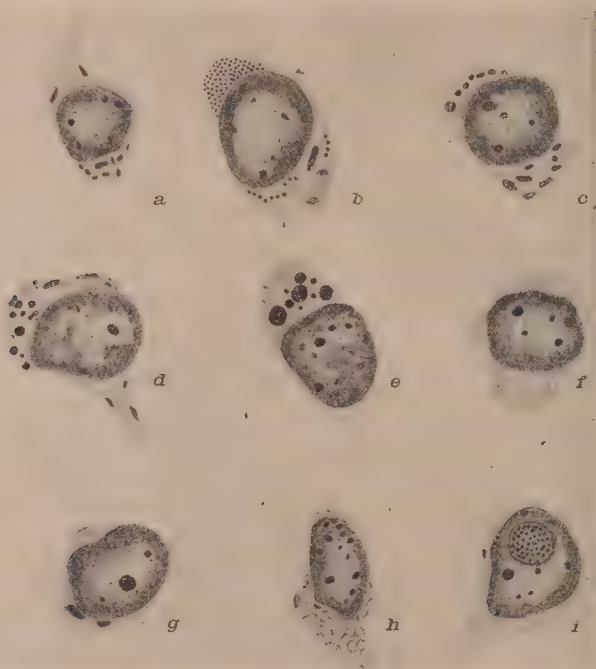


Fig. 1. - Vari aspetti della attività secretoria in cellule del nucleo magnocellulare preottico del Tritone crestatto. Spiegazione nel testo. La fig. *h*, è stata ripresa da un esemplare maschio, sacrificato in febbraio, e fissato in Stieve. Tutte le altre da un esemplare maschio sacrificato in maggio e fissato in Sanfelice. Colorazione Mallory-Galgano. Le masserelle irregolari grigie, contenute nel citoplasma, rappresentano la particolare sostanza basofila; quelle nere, tondeggianti, i granuli di secrezione.  $\times 1100$ , circa.

meccanismo. Durante l'Estate, l'Autunno e i primi mesi dell'Inverno il citoplasma contiene la sostanza basofila sotto forma di granuli minuti ed uniformemente distribuiti, che talora possono confluire a formare masserelle (fig. 1, *b*). A partire dal febbraio, e particolarmente nei mesi di marzo, aprile, questa sostanza tende a raccogliersi in formazioni più grandi ed irregolari,

(8) In gran parte del materiale, destinato, come già ho detto, allo studio del ciclo ipofisario, la regione preottica è stata, per ragioni di economia, asportata; il numero di individui esaminati è, in conseguenza limitato, eccezion fatta per i mesi di aprile e maggio, in cui ho allestito dei preparati appositamente per lo studio del nucleo preottico. Avendo iniziate le mie ricerche sull'ipofisi nell'Autunno del 1946, non ho ancora sacrificati animali estivi.



distribuite in tutto il citoplasma, compreso il cono di origine del neurite (fig. 1, *b*), a spese delle quali si formano, con il meccanismo già illustrato, i granuli di sostanza colloide (fig. 1, *c, d, e*). Terminato il periodo di attività secretoria la cellula entrerebbe in un periodo di stasi (fig. 1, *f*), al termine del quale ricomparirebbe la sostanza basofila, con l'aspetto di masserelle sparse ed irregolari (fig. 1, *g*); e si inizierebbe un nuovo ciclo. Ogni cellula quindi nei mesi di attività, attraversa, indipendentemente dalle altre, uno o, forse, più cicli secretori. La sostanza colloide espulsa, che apparentemente può conservarsi a lungo, si raccoglie negli spazi intercellulari, o si spinge per un certo tratto lungo le fibre del fascio talamo-ipofisario, ove non è raro osservarla anche nei mesi in cui le cellule si trovano in stasi.

Perciò, contrariamente a quanto avviene nel nucleo magnocellulare di *Fundulus* e *Bufo*, le cellule del nucleo magnocellulare preottico del tritone parrebbero entrare in attività soltanto in alcuni mesi dell'anno, durante i quali ogni elemento svolgerebbe il suo ciclo indipendentemente dagli altri; così si spiega il reperto, in una stessa serie, di tutti gli stadi di attività secretoria. Nel *Bufo* invece tutte le cellule entrano in attività contemporaneamente e quindi l'esame microscopico coglie, in ogni individuo, uno stadio solo della secrezione: peraltro ogni individuo svolge il suo ciclo indipendentemente dalle condizioni ambientali. Il comportamento delle cellule del nucleo magnocellulare preottico del tritone si avvicina a quello delle cellule del nucleo laterale del *tuber* della tinca, che raggiungono il colmo della attività secretoria nei mesi estivi, entrando in riposo in quelli invernali (Scharrer, 1936) <sup>(9)</sup>.

Non sembrano esistere differenze sensibili fra maschi e femmine.

Quello presentemente illustrato rappresenta un quarto meccanismo nella elaborazione di una sostanza di natura colloide a livello dei nuclei vegetativi ipotalamici (sostanza che da un punto di vista chimico, forse è sempre la stessa), che si aggiunge ai tre meccanismi segnalati da E. e B. Scharrer <sup>(1)</sup> nel citato articolo. In questi ultimi il materiale colloide viene elaborato rispettivamente: *a*) da una porzione basofila del citoplasma, omogenea, e compresa per lo più in escavazioni della membrana nucleare; *b*) dal nucleo; *c*) dalla sostanza di Nissl.

La modalità *a*), che si rinviene soltanto nel nucleo magnocellulare preottico di un limitato numero di Teleostei, non sembra avere grande importanza. La sostanza basofila accolta nelle invaginazioni nucleari non è identificabile nè con la sostanza cromofila, nè con la sostanza basofila da me ora descritta nel tritone.

Quella *b*) fu segnalata da E. Scharrer (1934) <sup>(10)</sup>, (1936) <sup>(9)</sup> nel nucleo laterale del *tuber* della tinca e del luccio, e, più di recente, nel nucleo laterale del *tuber* di *Noturus flavus* e *Ameiurus nebulosus*, da Palay (1943) <sup>(11)</sup>,

(9) «Ztschr. ges. Anat.», Bd. 106, S. 169 (1936).

(10) «Frank. Ztschr. Path.», Bd. 47, S. 143 (1934).

(11) «J. Comp. Neur.», vol. 79, p. 247 (1943).

il quale ritiene che i granuli di secrezione si formino a spese della cromatina nucleare, e vengano poi espulsi nel citoplasma.

Il meccanismo *c)* infine è stato illustrato di recente da E. Scharrer, Palay e Nilges<sup>(7)</sup>, che hanno descritto in Pesci, Anfibi, Rettili e Mammiferi i diversi aspetti che assumono le relazioni spaziali fra sostanza di Nissl e materiale neurosecretorio (granuli, vacuoli, masse acidofile omogenee) e che depongono in favore di una trasformazione diretta della prima nel secondo.

Dà un punto di vista cromatico ed istochimico è noto che questa sostanza si colora con i coloranti acidi, con la safranina, con la ematossilina ferrica, dà le reazioni delle proteine, è Feulgen negativa (Mazzi, 1941<sup>(12)</sup>, E. Scharrer, Palay e Nilges, 1945), e, posso aggiungere, non contiene acido pentosonucleinico (infatti si colora assai debolmente con la pironina prima e dopo trattamento con la ribonucleasi nella reazione di J. Brachet).

La elaborazione da parte delle cellule dei nuclei ipotalamici di sostanze colloidali che danno le reazioni delle proteine, potrebbe rientrare nel quadro delle attività proprie delle cellule ricche in acido ribonucleinico (presente, sia nella sostanza tigroide [J. Brachet, 1941<sup>(13)</sup>; Caspersson, 1941<sup>(14)</sup>], sia, forse, nella particolare sostanza basofila da me descritta nel tritone), poichè si sa che esiste una stretta relazione fra contenuto in quest'acido e l'attitudine a realizzare sintesi di proteine (J. Brachet, 1941<sup>(13)</sup>; 1944<sup>(15)</sup>; Caspersson, Landström e Aquilonius 1941<sup>(16)</sup>).

Ricerche che ho in corso tendono ad approfondire ulteriormente lo studio di queste relazioni.

Sulla vessata questione del significato funzionale che si può attribuire ai fenomeni secretori rilevabili a livello della parte magnocellulare del nucleo preottico e dei nuclei laterale e ventrale del *tuber* dei Pesci, del nucleo magnocellulare preottico degli Anfibi e di quelle parti dell'ipotalamo dei Vertebrati superiori a questi nuclei corrispondenti, ebbi modo di intrattenermi a lungo in un precedente lavoro (Mazzi, 1941<sup>(12)</sup>). Illustrai allora i concetti di neurosecrezione, di neurocrinia e di neuricrinia, sostenuti da Scharrer, Collin, Roussy e Mosinger rispettivamente.

In questi ultimi anni un contributo notevole all'elaborazione del concetto di neuricrinia (che allarga ed integra quello di neurocrinia di Collin), fondato su numerosi dati istologici e sperimentali desunti specialmente dallo studio dei centri neurovegetativi diencefalici dei Mammiferi, è stato apportato da Roussy e Mosinger, che hanno raccolto le numerose ricerche nel grande trattato di neuroendocrinologia recentemente apparso<sup>(17)</sup>, e alla lettura del quale si rimanda chi avesse interesse nell'argomento.

(12) « Arch. Ital. Anat. Embr. », vol. 46, p. 1 (1941).

(13) « Arch. Biol. », t. 53, p. 207 (1941).

(14) « Naturwiss. », Bd. 29, S. 33 (1941).

(15) J. BRACHET, *Embryologie chimique*. Masson et Cie. Paris (1944).

(16) « Chromosoma », vol. 2, p. III, (1941).

(17) G. ROUSSY et M. MOSINGER, *Traité de neuro-endocrinologie*. Masson et Cie. Paris (1946).

Eguale impulso è stato dato da E. Scharrer e dalla sua scuola al concetto di neurosecrezione. In origine secondo l'Autore per neurosecrezione doveva intendersi semplicemente « the istologically visible elaboration and discharge of granules and masses of colloid ». In un recente articolo pubblicato in collaborazione con B. Scharrer (1945)<sup>(1)</sup> egli ha cercato di ampliare il concetto spostandolo dal campo semplicemente morfologico a quello funzionale.

È noto che i fenomeni neurosecretori si manifestano nel sistema nervoso centrale dei Vertebrati e degli Invertebrati. Per quel che riguarda i Vertebrati si può dire in linea generale che prove sperimentali in favore di una funzione precisa del colloide diencefalico non ci sono, nè risulta facile mettere in relazione i fenomeni neurosecretori, che per lo più si manifestano con caratteri di irregolarità, con determinate fasi del ciclo biologico. Le ipotesi emesse riposano quindi su induzioni giustificate fino a un certo punto.

Per quel che riguarda gli Invertebrati invece è stato dimostrato che due tipi di processi regolati per via ormonale possono essere messi in relazione con l'attività secretoria del sistema nervoso centrale. Nei Crostacei le regioni secernenti del sistema nervoso centrale sarebbero responsabili dei mutamenti fisiologici di colore. Negli Insetti la parte intercerebrale del protocerebro e i corpi cardiaci ed allati formerebbero un sistema neuroendocrino legato alla elaborazione (B. ed E. Scharrer, 1944<sup>(18)</sup>) di due ormoni che regolano la velocità dello sviluppo. In questo secondo caso è istologicamente dimostrabile uno spostamento di granuli di sostanza colloide lungo le fibre dell'effettore, il nervo del corpo cardiaco, che nasce appunto dalla parte intercerebrale del protocerebro in cui si manifestano i fenomeni secretori.

Però, anche in quei Vertebrati nei quali si ha produzione di colloide ipotalamico, è generale uno spostamento visibile dei granuli lungo l'effettore (il fascio ipotalamo-ipofisario); e, come negli insetti si parla di un sistema intercerebrale-cardiaco-allato, così, per analogia, gli Autori propongono di considerare i nuclei preottici (o i loro omologhi) e la parte nervosa dell'ipofisi non come due centri secretori separati, ma legati a formare un complesso neuroendocrino ipotalamo-ipofisario, il quale « could similarly account for sustained, as for instance seasonal, changes of pituitary activity in Vertebrates ».

Pur non volendo negare valore a questa interessante ipotesi degli Scharrer, non posso fare a meno di rilevare come, dalle mie osservazioni, risulti essere lo spostamento dei granuli limitato soltanto alla prima parte del fascio talamo-ipofisario. È mio convincimento inoltre che solo allorquando sarà possibile ottenere concrete modificazioni nell'attività secretoria ipotalamica, conseguenti a ben determinate condizioni sperimentali, ci sarà consenso di formulare ipotesi con un certo margine di attendibilità.

(18) « Biol. Bull. », vol. 87, p. 242 (1944).

**Patologia.** — *Ricerche chimico-biologiche sul metodo indio di preparazione del curaro Makù.* Nota III di E. BIOCICA e M. IPPOLITO, presentata (\*) dal Corrisp. V. PUNTONI.

Le ricerche riferite nella Nota II avevano mostrato che gli alcaloidi insolubili in etere e cloroformio, ottenuti dal curaro Makù, rappresentano la frazione dotata del più elevato potere curarizzante. Esse avevano inoltre messo in evidenza che gli alcaloidi insolubili in etere e cloroformio, estratti con lo stesso metodo dall'Abuta (pianta usata dagli Indi per la preparazione del curaro Makù) posseggono un potere letale molto minore e provocano un avvelenamento ben differenziabile dal curarico. Come conseguenza di queste osservazioni eravamo stati indotti a pensare che gli Indi, durante la preparazione del curaro, avessero provocato una vera trasformazione delle proprietà chimiche e biologiche degli alcaloidi.

Tentativi eseguiti fin dal secolo scorso da Couty e Lacerda<sup>(1)</sup>, Lacerda<sup>(2)</sup> Barbosa Rodrigues<sup>(3)</sup>, ecc. di preparare curaro, cercando di estrarlo, a volte da *Loganiaceae*, a volte da *Menispermaceae*, avevano dato sempre risultati incerti e contraddittori. Gli estratti così ottenuti provocavano negli animali iniettati una sintomatologia quasi sempre analoga a quella da noi osservata in seguito all'inoculazione, sia del « curaro imperfetto » alla cui preparazione avevamo assistito, sia dell'estratto di alcaloidi, insolubili in etere e cloroformio, da noi ottenuti dall'Abuta.

Ricerche antiche avevano dimostrato che alcuni determinati alcaloidi acquistano proprietà curarizzanti, qualora vengano metilati. Queste osservazioni, confermate ed ampliate largamente in seguito, han condotto alla preparazione di prodotti, più o meno curarizzanti, derivati dalla stricnina, dalla chinina, ecc. Meritano di essere soprattutto ricordati i recenti studi di Vital Brazil e coll.<sup>(4)</sup>, i quali sono riusciti a ottenere l'etere dimetilico della metil-bebeerina, dotato di elevatissime proprietà curarizzanti, estraendo la bebeerina dal *Chondodendron platyphillum*. Per ciò che si riferisce agli studi e alla letteratura sull'azione curarisimile di sali quaternari di ammonio, rimandiamo all'interessante lavoro di Bartorelli<sup>(5)</sup>.

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) M. M. COUTY et de B. LACERDA, *Sur un curare, extrait d'une seule plante, le « Strychnos triplinervia »*. « Journ. de Phar. et Chimie », 1, 34 (1880).

(2) B. LACERDA, *Curare préparé au moyen d'une seule plante de la famille des Menispermacees: « Anomospermum grandifolium Eichler »*. « Congrès Scientifique latino-américain de Montevideo » 1901. Cit. BARBOSA RODRIGUES, *L'uraëry ou curare*. Bruxelles 1903.

(3) J. BARBOSA RODRIGUES, *L'uraëry ou curare*. Bruxelles 1903.

(4) O. VITAL BRAZIL, A. RÔCHEL SEBA e JOÃO CAMPOS, *Curare. Obtenção e farmacologia do dimetil-eter da metil-bebeerina*. « Bol. Inst. Vital Brazil », 5, 79 (1945).

(5) C. BARTORELLI, *Sulle proprietà curarisimili di alcuni sali di onio negli omeotermi*. « Aten. Parmense », 6, 318 (1934).



Era quindi da tempo conosciuto che è possibile, introducendo determinati radicali (soprattutto metilici), trasformare un alcaloide con proprietà tipicamente convulsivanti come la stricnina, in un derivato dotato di caratteristiche proprietà curarizzanti.

Ci sembra interessante insistere su altra analogia di comportamento biologico esistente tra il curaro e la stricnina: il curaro, che è paralizzante se introdotto per via sanguigna, diviene convulsivante come la stricnina se introdotto direttamente nel cervello.

In base alle citate osservazioni era quindi giustificato supporre che gli Indi, durante la lunga preparazione del curaro, determinassero una trasformazione degli alcaloidi, analoga a quella che si ottiene metilando la stricnina.

Ci siamo perciò innanzi tutto proposti di osservare se, metilando gli alcaloidi non solubili in etere e cloroformio, da noi estratti dall'Abuta, fosse possibile dare a tali alcaloidi proprietà curarizzanti analoghe a quelle presenti negli stessi alcaloidi, insolubili in etere e cloroformio, del curaro Makù.

Successivamente abbiamo voluto controllare se la metilazione degli alcaloidi insolubili in etere e cloroformio del curaro Makù provocasse una modificazione delle proprietà biologiche di questi alcaloidi<sup>(6)</sup>.

**METODO DI METILAZIONE<sup>(\*)</sup>.** — Abbiamo collocato la sostanza da metilare in un palloncino di vetro munito di un condensatore a refluxo e abbiamo successivamente addizionato per ogni 0,1 g di sostanza: 2 cm<sup>3</sup> di alcool metilico, 0,03 g di metilato di sodio e 1 cm<sup>3</sup> di ioduro di metile. Dopo riscaldamento a bagno-maria in ebollizione durante due ore, abbiamo aggiunto ancora 0,5 cm<sup>3</sup> di ioduro di metile e continuato il riscaldamento per un'altra ora. In seguito abbiamo tolto il condensatore a refluxo e fatto evaporare il solvente. Dopo questo trattamento abbiamo diluito con acqua e acidificato con H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> N/2. Gli alcaloidi così metilati sono stati precipitati con acido picrico e i picrati sono stati filtrati al vuoto e trasformati in cloridrati dopo aggiunta di acetone, etere e HCL N/2. L'acido picrico infine è stato estratto mediante lavaggi con etere, in imbuto separatore. I cloridrati degli alcaloidi metilati, ottenuti in questa maniera, sono stati portati allo stato secco, a temperatura inferiore a 50°C.

(6) Non essendo in stretta relazione con lo scopo delle nostre ricerche, evitiamo, per brevità, di riferire gli importanti studi sui principî attivi del curaro, sui nuovi prodotti sintetici ad azione curarizzante, ecc. di King (7), Berredo Carneiro (8), Bovet e coll. (9), ecc.

(7) H. KING., *Curare alkaloids*. « Journ. Chem. Soc. », 1381 (1935).

(8) P. DE BERREDO CARNEIRO, *Les principes actifs du curare*. « Compt. Rend. Ac. des Sc. », 206, 1202 (1938).

(9) D. BOVET, COURVOISIER S., DUCHOT R. et HORCLOIS R., *Propriétés curarisantes du di-iodoéthylate de bis-(quinoléloxy-8') 1-5-pentane*. « Compt. Rend. Ac. des Sc. », 223, 597 (1946).

(\*) Ringraziamo il prof. Q. Mingoja per la sua generosa assistenza chimica e per aver preparato la metil-stricnina, la metil-chinina e la metil-chinolina.

*Risultati:* La metilazione ha profondamente trasformato le proprietà biologiche degli alcaloidi insolubili in etere e cloroformio, estratti dall'Abuta, mentre ha lasciato pressochè immutate le proprietà curarizzanti degli alcaloidi, estratti con lo stesso metodo, dal curaro Makù.

Infatti, mentre prima della metilazione, per provocare la morte di un topino di circa 20g, inoculato per via muscolare, era necessario iniettare 7mg di alcaloidi dell'Abuta (frazione insolubile in etere e cloroformio), in seguito alla metilazione, per ottenere lo stesso effetto, era sufficiente una dose di 0,3mg. Inoltre la sintomatologia dell'avvelenamento, che prima della metilazione era caratterizzata da un prolungato stato agonico dell'animale, accompagnato da tremori e lievi convulsioni, in seguito alla metilazione era indifferenziabile dal tipico avvelenamento curarico.

Al contrario, come abbiamo detto, la metilazione degli alcaloidi del curaro Makù (frazione insolubile in etere e cloroformio), non ha sensibilmente modificato le proprietà curarizzanti degli stessi.

Come ricerca conclusiva dei nostri studi, abbiamo voluto sottoporre alla metilazione il nostro « curaro imperfetto ». I risultati sono stati quali prevedevamo: la metilazione ha trasformato il « curaro imperfetto », in un prodotto molto più attivo e con proprietà curarizzanti tipiche. La scarsa quantità del « curaro imperfetto » a nostra disposizione ci ha impedito di eseguire un dosaggio frazionato dei diversi gruppi di alcaloidi.

CONCLUSIONI GENERALI. - Il complesso delle indagini e osservazioni da noi riferite in queste Note ci ha dunque portato alle conclusioni seguenti:

1° La preparazione del curaro da parte degli Indi Makù viene realizzata mediante una decozione a fuoco debole di cortecce e radici, con l'aggiunta, di tanto in tanto, di macerati e infusi diversi, secondo una tecnica che non differisce sostanzialmente da quella osservata da altri ricercatori, in tribù diverse di Indi.

2° Numerose piante sono usate dagli Indi Makù per ottenere il curaro; tra quelle da noi raccolte si è dimostrata ricchissima in alcaloidi (soprattutto della frazione insolubile in etere e cloroformio, che nel curaro Makù è dotata delle più elevate proprietà curarizzanti) una *Menispermacea* e precisamente l'Abuta (*Grisebachii* ?).

3° La frazione di alcaloidi insolubili in etere e cloroformio, ottenuta dall'Abuta, possiede un potere letale molto minore della stessa frazione ottenuta dal curaro Makù e provoca un avvelenamento negli animali, ben differenziabile dall'avvelenamento curarico.

4° La metilazione di questa frazione di alcaloidi dell'Abuta ne eleva moltissimo il potere letale, e l'avvelenamento da essa prodotto diventa apparentemente indifferenziabile dall'avvelenamento curarico.

5° La metilazione del « curaro imperfetto », alla cui incompleta preparazione avevamo assistito, ne provoca ugualmente un notevole aumento dell'attività letale e la morte degli animali inoculati avviene in seguito ad una sintomatologia apparentemente curarica.

6° Al contrario di quanto è stato osservato in seguito alla metilazione, sia degli alcaloidi dell'*Abuta* (frazione insolubile in etere e cloroformio), sia del « curaro imperfetto », la metilazione degli alcaloidi del curaro Makù (frazione insolubile in etere e cloroformio) non modifica sensibilmente le loro proprietà curarizzanti. Apparentemente il processo di preparazione indio del curaro è diretto ad agire sui gruppi metilabili degli alcaloidi. Non ci sentiamo per ora autorizzati ad affermare che si tratti di una metilazione semplice, ma possiamo ammettere che gli Indi, durante il lungo processo di preparazione del curaro, non eseguano solamente una estrazione di principi attivi già esistenti nelle piante, ma determinino soprattutto una trasformazione degli alcaloidi, in maniera tale che, sottoponendoli a un processo di metilazione non si riesce più a modificarne sensibilmente l'attività curarizzante.

È forse attualmente possibile rendersi conto del perchè siano state viste impiegare per la preparazione del curaro piante diverse, a volte *Loganiaceae* (*Strychnos toxifera*, *Strychnos Crevauxii*, ecc.), a volte *Menispermaceae* (*Abuta imene*, *Chondodendron tomentosum*, ecc.), tutte ritenute indispensabili, oltre a *Rubiaceae*, *Piperaceae*, *Malpighiaceae* ecc. mentre il metodo di preparazione sia stato sostanzialmente analogo, anche se usato da tribù di Indi che vivevano a grandi distanze tra loro.

Basandoci sulle nostre osservazioni possiamo infatti supporre che alcune delle piante (*Menispermaceae*, *Loganiaceae*, ecc.) abbiano lo scopo di fornire gli alcaloidi<sup>(10)</sup> altre piante (*Rubiaceae*, *Piperaceae*, ecc.) abbiano probabilmente la funzione di permettere o di facilitare la preparazione india di derivati degli alcaloidi stessi, ad azione altamente curarizzante. L'attività del curaro infine sarebbe in relazione non solamente alle piante adoperate, ma alla tecnica più o meno accurata di preparazione, usata dagli Indi.

Ci sembra che da tutte queste osservazioni vengano in gran parte chiariti molti dei dubbi che ancora esistevano intorno al metodo e alle piante del curaro degli Indi americani.

(10) Le ricerche sui derivati, ad azione curarizzante, di alcaloidi conosciuti (chinina, stricnina, bebeerina, ecc.) e prove di controllo da noi iniziate, inducono a credere che alcaloidi del gruppo dell'isochinolina siano probabilmente quelli capaci di dare un curaro con più elevata attività. Precisamente alcaloidi del gruppo dell'isochinolina sono presenti in molte delle piante della flora tropicale americana, usate dagli Indi nella preparazione del curaro.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Ferie 1947 - Settembre-ottobre*

## NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

**Matematica** (Geometria). — *Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui*<sup>(\*)</sup>. Nota I<sup>(\*\*)</sup> del Corrisp. B. SEGRE.

In un lavoro che uscirà negli « Annali di Matematica »<sup>(1)</sup> ho studiato le relazioni intercedenti fra gli elementi differenziali, di dato ordine, che escono dai punti comuni a due curve algebriche di un piano e appartengono ad esse. Il metodo da me seguito poggia sulla teoria dei residui degli integrali abeliani, e l'ho ivi anche esteso agli iperspazi.

Avendo esposto recentemente queste mie ricerche all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, ed accennato a problemi inerenti ad alcune loro estensioni ulteriori, il Severi, nella discussione che ne seguì, ebbe a dire che — allo scopo di poter affrontare quei problemi — sarebbe stato opportuno di dare forma geometrica intrinseca al teorema dei residui per gli integrali abeliani. Ciò ora faccio in questa Nota ed in un'altra che seguirà, sorvolando tuttavia, per ragioni di spazio, sulle applicazioni che se ne potrebbero trarre nell'indirizzo del lavoro dianzi citato.

Più precisamente qui, nel n. 1, mostro come ad ogni integrale abeliano  $\mathfrak{J}$  attaccato ad una curva algebrica  $\mathcal{C}$  si possano coordinare due gruppi  $\alpha, \beta$  di punti di  $\mathcal{C}$ , privi di elementi comuni, la cui differenza equivale ad un gruppo canonico di  $\mathcal{C}$ . Viceversa, a due qualunque gruppi siffatti resta associato intrinsecamente un integrale abeliano  $\mathfrak{J}$ , definito su  $\mathcal{C}$  a meno di un'arbitraria costante moltiplicativa  $c^{-1}$  o (n. 2).  $c\mathfrak{J}$  può quindi scriversi sotto forma invariante per trasformazioni birazionali di  $\mathcal{C}$ , com'è specificato nei nn. 2-4,

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1947.

(1) B. SEGRE, *Sui teoremi di Bézout, Jacobi e Reiss*.

dove sono anche studiati i corrispondenti di  $\mathfrak{C}\mathfrak{I}$  sulle curve aventi  $\mathfrak{C}$  come trasformata razionale.

Quanto sopra porta a considerare i residui di  $\mathfrak{C}\mathfrak{I}$  quali invarianti birazionali dei gruppi  $\alpha$  e  $\beta$  su  $\mathfrak{C}$  (n. 5, Nota II); di tali residui assegno un significato geometrico inerente a  $\mathfrak{C}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  soltanto (nn. 6, 9), che ne pone in luce l'invarianza birazionale. Ciò mi permette di ottenere il teorema sui residui degli integrali abeliani, come conseguenza immediata di un semplice risultato di geometria proiettiva stabilito nei nn. 7 ed 8.

1. Ogni integrale abeliano  $\mathfrak{I}$ , attaccato ad una curva  $\mathfrak{C}$ , determina su  $\mathfrak{C}$  due gruppi  $\alpha$  e  $\beta$  legati fra loro dall'equivalenza

$$(1) \quad \alpha \equiv \beta + \kappa \quad (\text{su } \mathfrak{C}),$$

ove  $\kappa$  denota un gruppo canonico (effettivo o virtuale) di  $\mathfrak{C}$ , ed  $\alpha, \beta$  si definiscono nel modo seguente. Il gruppo  $\beta$  consiste dei punti singolari di  $\mathfrak{I}$ : precisamente, un punto di  $\mathfrak{C}$  in cui  $\mathfrak{I}$  abbia un polo di ordine  $s$ , eventualmente sovrapposto ad una singolarità logaritmica, va contato in  $\beta$  con molteplicità  $s + 1$ ; mentre un punto in cui  $\mathfrak{I}$  abbia soltanto una singolarità logaritmica va contato in  $\beta$  semplicemente. Il gruppo  $\alpha$  consiste dei punti doppi di  $\mathfrak{I}$ , ossia di ciascun punto di  $\mathfrak{C}$  in cui valga l'equazione  $d\mathfrak{I}/dt = 0$ , ove  $t$  è un qualunque parametro uniformizzante nell'intorno del punto che si mantenga ivi finito, la molteplicità del punto stesso in  $\alpha$  essendo uguale alla molteplicità della corrispondente radice per l'equazione suddetta. I gruppi  $\alpha$  e  $\beta$  non hanno nessun punto comune.

Non è restrittivo supporre che  $\mathfrak{C}$  sia una curva piana d'ordine  $n$  dotata di singolarità ordinarie,

$$(2) \quad f(x, y) = 0,$$

incontrante la retta impropria del suo piano in  $n$  punti distinti, che inoltre nessun punto di  $\alpha$  o  $\beta$  cada in un punto multiplo od in un punto all'infinito di  $\mathfrak{C}$ , e che l'asse  $y$  non sia parallelo ad alcuna tangente in un punto multiplo od improprio di  $\mathfrak{C}$ . Posto

$$(3) \quad \mathfrak{I} = \int_{\mathfrak{C}} \frac{R(x, y) dx}{f_y'(x, y)},$$

dove  $R(x, y)$  denota una funzione razionale, esaminiamo il comportamento di  $\mathfrak{I}$  nei vari punti di  $\mathfrak{C}$ .

a) Se  $O(x_0, y_0)$  è un punto semplice al finito in cui la tangente non risulti parallela all'asse  $y$ , sicchè  $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$ , nell'intorno di  $O$  su  $\mathfrak{C}$  la  $x$  è un parametro uniformizzante prossimo ad  $x_0$  e si ha

$$(4) \quad \frac{d\mathfrak{I}}{dx} = \frac{R(x, y)}{f_y'(x, y)}.$$

Dunque il punto  $O$  non appartiene nè ad  $\alpha$  nè a  $\beta$  se  $R(x_0, y_0)$  risulta finito e non nullo; mentre invece  $O$  appartiene ad  $\alpha$  con molteplicità  $b$  od a  $\beta$  con

molteplicità  $k$  se  $R(x, y)$  ha in  $O$  uno zero d'ordine  $h$  od un polo d'ordine  $k$ , ed una qualunque di queste due possibilità esclude l'altra.

b) Le stesse conclusioni valgono se  $O$  è un punto semplice al finito di  $\mathcal{C}$  la cui tangente risulti parallela all'asse  $y$ , e quindi non sia parallela all'asse  $x$ , come si vede scrivendo la (3) nella forma equivalente

$$\mathfrak{J} = - \int_{\mathcal{C}} \frac{R(x, y) dy}{f'_x(x, y)}.$$

c) Nell'intorno di un punto  $r$ -plo  $P$  di  $\mathcal{C}$  ( $r \geq 2$ ), considerato su uno qualunque determinato dei rami di  $\mathcal{C}$  uscenti da  $P$ , può ancora assumersi  $x$  come parametro uniformizzante. Siccome per ipotesi  $P$  non appartiene nè ad  $\alpha$  nè a  $\beta$ , così il secondo membro della (4) dev'essere finito e non nullo in  $P$ ; e poichè la tangente in  $P$  a quel ramo non è parallela all'asse  $y$ , ciò equivale a dire che  $R(x, y)$  deve avere nell'origine  $P$  del ramo, come ivi ha  $f'_y(x, y)$ , uno zero di molteplicità  $r - 1$ .

d) Un qualunque punto  $Q$  all'infinito di  $\mathcal{C}$  è semplice e non parallelo all'asse  $y$ , sicchè  $t = 1/x$  è un parametro uniformizzante prossimo allo zero nell'intorno di  $Q$  su  $\mathcal{C}$ . Siccome  $Q$  non appartiene nè ad  $\alpha$  nè a  $\beta$ , così

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \frac{d\mathfrak{J}}{dx} \frac{dx}{dt} = - \frac{R(x, y)}{t^2 f'_y(x, y)}$$

dev'essere finito e non nullo in  $Q$ ; e poichè  $f'_y(x, y)$  ha in  $Q$  esattamente un polo d'ordine  $n - 1$ , ciò equivale a dire che la  $R(x, y)$  deve avere in  $Q$  un polo d'ordine  $n - 3$  se  $n > 3$ , avere uno zero d'ordine  $3 - n$  se  $n = 1, 2$ , essere finita e non nulla se  $n = 3$ .

Esprimendo che gli zeri ed i poli di  $R(x, y)$  su  $\mathcal{C}$  formano due gruppi equivalenti, otteniamo

$$(5) \quad \alpha + \sum (r - 1) P \equiv \beta + (n - 3) \Sigma Q;$$

ne consegue la (1) tenendo conto che, in base alla definizione di  $\alpha$ , risulta  $(n - 3) \Sigma Q \equiv \Sigma (r - 1) P + \alpha$ .

2. Viceversa, dati su  $\mathcal{C}$  due qualunque gruppi  $\alpha$  e  $\beta$  soddisfacenti alla (1) e privi di elementi comuni, esiste un integrale abeliano  $\mathfrak{J}$ , determinato a meno di un arbitrario fattore costante  $c \neq 0$ , di cui essi siano rispettivamente il gruppo dei punti doppi ed il gruppo dei punti singolari.

Rappresentata la  $\mathcal{C}$  come dianzi, dalla (1) segue la (5); questa mostra che esiste una funzione razionale  $R(x, y)$ , definita su  $\mathcal{C}$  a meno di un arbitrario fattore costante  $c \neq 0$ , i cui zeri ed i cui poli formino rispettivamente i gruppi a primo ed a secondo membro nella (5), coll'avvertenza di portare il termine  $(n - 3) \Sigma Q$  dal secondo al primo membro se  $n = 1, 2$ . Più precisamente, in base al teorema del resto, possiamo assumere

$$(6) \quad R(x, y) = \frac{A(x, y)}{B(x, y)},$$

dove  $A$  e  $B$  sono polinomi nelle  $x, y$ , i cui gradi rispettivi  $a$  e  $b$  soddisfanno alla

$$(7) \quad a = b + n - 3,$$

tali che la curva  $A(x, y) = 0$  sia aggiunta alla  $\mathcal{C}$  e seghi su questa, fuori dei punti multipli, il gruppo  $\alpha$  ed un gruppo ulteriore (possibilmente mancante) costituente insieme a  $\beta$  l'intersezione completa della  $B(x, y) = 0$  colla  $\mathcal{C}$ ; detti polinomi possono naturalmente scegliersi in infiniti modi diversi, la  $B(x, y) = 0$  essendo una curva arbitraria che contenga il gruppo  $\beta$  e non abbia  $\mathcal{C}$  come componente.

3. Siano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_1$  due curve algebriche fra cui interceda una trasformazione  $T$  razionale nel passaggio da  $\mathcal{C}_1$  a  $\mathcal{C}$ , e sia  $\gamma^*$  il gruppo dei punti doppi di  $T$  su  $\mathcal{C}_1$  (ove ogni punto  $k$ -plo conti  $k-1$  volte). La  $T$  muta ogni integrale abeliano  $\mathfrak{I}$  attaccato a  $\mathcal{C}$  in un integrale abeliano  $\mathfrak{I}_1$  attaccato a  $\mathcal{C}_1$ , in guisa che in punti corrispondenti di  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_1$  risulti

$$(8) \quad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1.$$

Detti  $\alpha$  e  $\beta$  il gruppo dei punti doppi ed il gruppo dei punti singolari di  $\mathfrak{I}$  su  $\mathcal{C}$ , i gruppi  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  dei punti doppi e dei punti singolari di  $\mathfrak{I}_1$  su  $\mathcal{C}_1$  sono

$$(9) \quad \alpha_1 = \alpha^* + \gamma^*, \quad \beta_1 = \beta^*,$$

dove  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  denotano i trasformati di  $\alpha$ ,  $\beta$  mediante  $T$ .

Se  $\mathcal{C}$ ,  $\mathfrak{I}$  si rappresentano colle (2), (3), la  $T$  fornisce  $x$  ed  $y$  come funzioni razionali del punto scorrente su  $\mathcal{C}_1$ . Sostituendo queste funzioni in luogo di  $x$  ed  $y$  nella (3), si ottiene l'integrale abeliano  $\mathfrak{I}_1$  attaccato a  $\mathcal{C}_1$  soddisfacente alla (8); e da qui segue subito la seconda delle (9).

Se  $t, t_1$  denotano due parametri uniformizzanti finiti negli intorni di due punti corrispondenti di  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_1$ , dalla (8) si deduce

$$\frac{d\mathfrak{I}_1}{dt_1} = \frac{d\mathfrak{I}}{dt} \frac{dt}{dt_1}.$$

Si ha pertanto  $d\mathfrak{I}_1/dt_1 = 0$  o in un punto di  $\mathcal{C}_1$  a cui  $T$  faccia corrispondere un punto di  $\mathcal{C}$  nel quale sia  $d\mathfrak{I}/dt = 0$ , e cioè in un punto di  $\alpha^*$ , oppure in un punto di  $\mathcal{C}_1$  ove in virtù di  $T$  si abbia  $dt/dt_1 = 0$ , ossia in un punto di  $\gamma^*$ ; ciò prova la prima delle (9), essendo agevole sincerarsi della coincidenza fra le molteplicità dei punti nei due membri di questa.

Nell'ipotesi che  $T$  sia una trasformazione birazionale il gruppo  $\gamma^*$  viene a mancare, e le (9) mostrano il carattere covariante dei gruppi  $\alpha$  e  $\beta$  in relazione all'integrale  $\mathfrak{I}$ . Nel n. 6 (Nota II) porremo un qualunque integrale abeliano sotto una forma particolarmente semplice, col trasformare birazionalmente in modo opportuno la curva a cui esso è attaccato.

OSSERVAZIONE. - Dalla (1) si deduce

$$(10) \quad \alpha^* \equiv \beta^* + \alpha^* \quad (\text{su } \mathcal{C}_1),$$



denotando con  $\kappa^*$  il trasformato mediante  $T$  di un gruppo  $\kappa$  canonico di  $\mathcal{C}^{(2)}$ . D'altronde, detto  $\kappa_1$  un gruppo canonico di  $\mathcal{C}_1$ , applicando ad  $\mathfrak{F}_1$  il teorema del n. 1 si ottiene

$$(11) \quad \alpha_1 \equiv \beta_1 + \kappa_1 \quad (\text{su } \mathcal{C}_1).$$

Dalle (9)–(11) segue subito l'equivalenza

$$\kappa_1 \equiv \kappa^* + \gamma^* \quad (\text{su } \mathcal{C}_1),$$

esprimente il ben noto significato geometrico-funzionale della formula di Zeuthen <sup>(3)</sup>.

4. Possiamo riottenere direttamente le (9) determinando in modo esplicito  $\mathfrak{F}_1$  come segue. La  $\mathcal{C}$  sia ancora data dalla (2), e similmente  $\mathcal{C}_1$  sia una curva piana d'ordine  $n_1$  avente l'equazione  $\varphi(x_1, y_1) = 0$ . La  $T$  si rappresenterà fra  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_1$  mediante equazioni del tipo

$$(12) \quad x = \frac{u(x_1, y_1, z_1)}{w(x_1, y_1, z_1)}, \quad y = \frac{v(x_1, y_1, z_1)}{w(x_1, y_1, z_1)},$$

dove le  $u, v, w$  sono forme di uno stesso grado  $k$  nelle  $x_1, y_1, z_1$ , la  $z_1 = 1$  essendo introdotta allo scopo di ottenere l'omogeneità; per semplicità ci limiteremo al caso in cui la trasformazione definita dalle (12) fra i piani di  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_1$  non abbia punti fondamentali sul primo di questi piani. In forza delle (12) si ha allora identicamente

$$(13) \quad f(x, y) = \frac{\varphi(x_1, y_1)}{w^n(x_1, y_1, 1)},$$

onde risulta  $n_1 = kn$ . Adottando per  $\mathfrak{F}$  le notazioni dei nn. 1, 2 avremo del pari in virtù delle (12)

$$(14) \quad A(x, y) = \frac{A_1(x_1, y_1)}{w^n(x_1, y_1, 1)}, \quad B(x, y) = \frac{B_1(x_1, y_1)}{w^n(x_1, y_1, 1)},$$

dove  $A_1$  e  $B_1$  sono polinomi nelle  $x_1, y_1$  dei gradi rispettivi  $a_1 = ka$  e  $b_1 = kb$ . Infine, posto per abbreviare,

$$J(x_1, y_1, z_1) = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_1, y_1, z_1)},$$

un semplice calcolo mostra che è

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)} = \frac{J(x_1, y_1, 1)}{kw^3(x_1, y_1, 1)}.$$

Dalla (13) si deduce derivando che in punti corrispondenti di  $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$  risulta

$$\varphi'_{x_1} = w^n(x_1, y_1, 1)(f'_x x'_{x_1} + f'_y y'_{x_1}), \quad \varphi'_{y_1} = w^n(x_1, y_1, 1)(f'_x x'_{y_1} + f'_y y'_{y_1}),$$

(2) Cfr., ad esempio, F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I (Bologna, Zanichelli, 1926), p. 63.

(3) Ved., per esempio, F. SEVERI, *ibid.*, p. 208.

d'onde

$$J = \frac{1}{w^n(x_1, y_1, I)} \frac{\partial(x, \varphi)}{\partial(x_1, y_1)} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)};$$

si ha inoltre

$$dx = x'_{x_1} dx_1 + x'_{y_1} dy_1 = x'_{x_1} dx_1 - x'_{y_1} (\varphi'_{x_1} / \varphi'_{y_1}) dx_1 = \frac{\partial(x, \varphi)}{\partial(x_1, y_1)} \frac{dx_1}{\varphi'_{y_1}(x_1, y_1)},$$

eppertanto

$$(15) \quad J \frac{dx}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x, \varphi)}{\partial(x_1, y_1)} \frac{w^n(x_1, y_1, I) dx_1}{\varphi'_{y_1}(x_1, y_1)} = \frac{J(x_1, y_1, I) w^n(x_1, y_1, I) dx_1}{k \varphi'_{y_1}(x_1, y_1)}.$$

Tenuto conto delle (3), (6), (7), (8), (14), (15), otteniamo l'integrale richiesto nella forma

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{k} \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{A_1(x_1, y_1) J(x_1, y_1, I)}{B_1(x_1, y_1)} \frac{dx_1}{\varphi'_{y_1}(x_1, y_1)},$$

su cui si leggono le (9). Invero, in base al n. 2,  $A_1(x_1, y_1) J(x_1, y_1, I) = 0$  è una curva di ordine

$$a_1 + (3k - 3) = k(b + n - 3) + (3k - 3) = b_1 + n_1 - 3$$

aggiunta a  $\mathfrak{C}_1$ , segante  $\mathfrak{C}_1$  fuori dei punti multipli nel gruppo  $\alpha^* + \gamma^*$  ed in un gruppo ulteriore costituente insieme a  $\beta^*$  l'intersezione completa della  $B_1(x_1, y_1) = 0$  colla  $\mathfrak{C}_1$ .

**Matematica** (Geometria). — *Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui* (\*). Nota II (\*\*) del Corrisp. B. SEGRE.

5. Preso su di una curva algebrica  $\mathfrak{C}$  di genere  $p$  un gruppo  $\beta$  di  $b$  punti, la serie lineare ad esso covariante

$$|\alpha| = |\beta + \alpha| \quad (\text{con } \alpha \text{ gruppo canonico di } \mathfrak{C})$$

è una  $g_\mu^v$  effettiva se  $p > 0$ ,  $b \geq 1$  oppure se  $p = 0$ ,  $b \geq 2$ , dove, per abbreviare, abbiamo posto

$$\mu = b + 2p - 2, \quad v = b + p - 2.$$

Si noti che, se  $p > 0$ ,  $b = 1$ , l'unico punto di  $\beta$  è punto fisso di  $|\alpha|$ ; mentre invece, se  $p \geq 0$ ,  $b \geq 2$ , la  $\alpha$  è priva di punti fissi. In quest'ultima ipotesi, per ogni gruppo  $\alpha$  della suddetta serie covariante che non abbia nessun punto in comune con  $\beta$  resta definito su  $\mathfrak{C}$ , a meno di un'arbitraria costante moltiplicativa  $c \neq 0$ , un integrale abeliano avente  $\alpha$  come gruppo dei punti doppi e  $\beta$  come gruppo dei punti singolari (nn. 1, 2). I residui di

(\*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1947.

(\*\*) Continuazione della Nota I, pubblicata a p. 167 di questi « Rendiconti ».

questo integrale nei punti di  $\beta$ , ossia i suoi periodi polari divisi per  $2\pi i$ , sono conseguentemente determinati da  $\alpha$  e  $\beta$  a meno del comune fattore  $c \neq 0$ ; a norma del n. 3 essi sono degli *invarianti birazionali omogenei* di  $\alpha$  e  $\beta$  su  $\mathcal{C}$ , e li diremo i *residui del gruppo  $\beta$  relativamente ad  $\alpha$* . Poichè la somma dei periodi polari di un qualunque integrale abeliano è nulla<sup>(1)</sup>, così

*La somma dei residui di un qualunque gruppo  $\beta$  di punti di una curva  $\mathcal{C}$  relativamente ad un gruppo arbitrario della sua serie covariante  $|\alpha|$ , che con  $\beta$  non abbia nessun punto comune, vale sempre zero.*

La serie lineare  $|\alpha - \beta| = |\alpha|$  è la  $g_{2p-2}$  canonica, che è effettiva e di dimensione  $p-1$  se  $p \geq 1$ . Dunque, in quest'ipotesi, i  $b$  punti di  $\beta$  impongono precisamente

$$v - (p-1) = b-1,$$

condizioni distinte ai gruppi di  $|\alpha|$  che debbano contenerli, ossia vi è esattamente una dipendenza lineare fra le  $b$  condizioni tralasciate il passaggio di  $\alpha$  per  $\beta$ ; si vede poi subito che questa stessa conclusione vale altresì nell'ipotesi che sia  $p=0$ . Se

$$\lambda_0 A^0(x, y) + \lambda_1 A^1(x, y) + \dots + \lambda_v A^v(x, y) = 0$$

è un sistema lineare di aggiunte che seghi  $|\alpha|$  su  $\mathcal{C}$ , fuori del gruppo dei punti multipli di  $\mathcal{C}$  e dei punti in cui  $B(x, y) = 0$  sega  $\mathcal{C}$  ulteriormente a  $\beta$  (n. 2), la dipendenza lineare fra le condizioni suddette si ottiene esplicitamente, in base a ciò che precede, esprimendo che la somma dei periodi polari dell'integrale abeliano

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda_0 A^0(x, y) + \lambda_1 A^1(x, y) + \dots + \lambda_v A^v(x, y)}{B(x, y)} \frac{dx}{f_y'(x, y)}$$

si annulla identicamente.

Notiamo che, se  $\beta$  consta di uno o di due punti (da contarsi una o più volte), la relazione che così si ottiene esprime semplicemente il fatto ovvio che  $\beta$  ammette un unico residuo uguale a zero o due residui fra loro opposti; nel seguito escluderemo questi due casi banali, e cioè supporremo che  $\beta$  consti di almeno tre punti (eventualmente da contarsi più volte), talchè sarà  $b \geq 3$ .

6. Poichè  $b \geq 3$ , la  $g_{\mu}^v |\alpha|$  è certamente priva di coppie neutre. Invero, sottraendo da  $|\alpha|$  una tal coppia, supposta esistente, si otterrebbe una  $g_{\mu-1}^v$  di dimensione  $\geq v-1 \geq p$ , dunque non speciale; ma ciò contraddirebbe il teorema di Riemann-Roch, essendo  $v-1 > (\mu-2)-p$ . Pertanto l'immagine proiettiva di  $|\alpha|$  è una curva  $\Gamma$ , di ordine  $\mu$  ed appartenente ad un  $S_v$ , priva di punti multipli; per semplicità continueremo a denotare con  $\alpha$  e  $\beta$  le immagini su  $\Gamma$  di questi due gruppi. Il gruppo  $\alpha$  non è che la sezione di  $\Gamma$  con un iperpiano  $S_{v-1}$  di  $S_v$  non passante per nessuno dei punti di  $\beta$ ;

(1) Cfr., ad esempio, F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), p. 241.

in base al n. 5, il gruppo  $\beta$  consta di  $b$  punti (distinti od infinitamente vicini) di  $\Gamma$  appartenenti ad un  $S_{b-2}$ , il quale è uno spazio subordinato di  $S_v$  o coincide con  $S_v$  secondochè  $p$  è maggiore od uguale a zero.

Supporremo dapprima che *i*  $b$  punti del gruppo  $\beta$  siano distinti. Allora questi punti risultano  $a \cdot b - 1$  linearmente indipendenti. Ciò è ovvio se  $p = 0$ , poichè in tal caso  $\Gamma$  è una curva razionale normale di  $S_v$ , di ordine  $\mu = v = b - 2$ , onde  $b - 1 (= v + 1)$  dei suoi punti non possono mai stare in un iperpiano di  $S_v$ . Se  $p > 0$ , basta osservare che, sottraendo dalla  $g_\mu^v$  delle sezioni iperpiane di  $\Gamma$  un gruppo di  $b - 1$  punti dipendenti, supposto esistente, si otterrebbe una serie lineare di ordine  $\mu - (b - 1) = 2p - 1$  e dimensione  $\geq v - (b - 2) = p$ , il che è assurdo.

Va rilevato che, nell'ipotesi fatta al principio dell'ultimo capoverso, il gruppo  $\beta$  ammette relativamente ad  $\alpha$   $b$  residui non nulli, uno per ciascuno dei suoi punti, i cui mutui rapporti forniscono  $b - 1$  invarianti birazionali di  $\alpha$  e  $\beta$ . Daremo ora un significato geometrico semplicissimo di tali rapporti, da cui subito discende la loro invarianza birazionale, provando che:

*Il rapporto dei residui di  $\beta$  relativamente ad  $\alpha$  in due punti  $M_1, M_2$  distinti di  $\beta$  vale  $-(M_2 M_1 N N')$ , dove  $N$  ed  $N'$  denotano rispettivamente le intersezioni della retta  $M_1 M_2$  coll'  $S_{b-2}$ , di  $S_{b-2}$  congiungente i  $b - 2$  punti di  $\beta$  distinti da  $M_1, M_2$ , e col suddetto  $S'_{v-1}$ .*

Supponiamo anzitutto  $p > 0$ , talchè  $b - 2 \leq v - 1$ , e prendiamo in  $S_v$  un iperpiano  $S'_{v-1}$  generico passante per  $S_{b-2}$ : questo sega  $\Gamma$  fuori di  $\beta$  in un gruppo canonico  $\kappa$ , consistente di  $2p - 2$  punti distinti. Dividiamo tali punti in  $p - 1$  coppie, e consideriamo le  $p - 1$  rette congiungenti i punti di ciascuna coppia; scegliamo poi genericamente, entro lo spazio intersezione di  $S'_{v-1}$  ed  $S''_{v-1}$ , un  $S_{v-3}$  passante per i  $p - 1$  punti dove le rette suddette incontrano  $S'_{v-1}$ : ciò è certamente possibile, in quanto  $v - 3 \geq p - 2$ .

Proiettando  $\Gamma$  da  $S_{v-3}$  su di un piano  $\pi$  di  $S_v$  sghebo con  $S_{v-3}$ , otteniamo una curva piana  $\Gamma$  di ordine  $\mu$ , a singolarità ordinarie, trasformata birazionale di  $\Gamma$ . Assumiamo su  $\pi$  le rette tracce di  $S'_{v-1}$  ed  $S''_{v-1}$  rispettivamente come retta impropria e come asse  $x$  di un sistema di coordinate proiettive non omogenee  $(x, y)$ . È chiaro che  $\bar{\Gamma}$  sega la prima di tali rette nel gruppo  $\bar{\alpha}$  di punti proiezione di  $\alpha$ , e la seconda nel gruppo  $\bar{\beta}$  proiezione di  $\beta$  ed in un gruppo  $\bar{\delta}$  di  $p - 1$  punti, doppi per  $\Gamma$ . Il gruppo  $\bar{\beta}$  contiene i punti distinti  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  proiezioni di  $M_1, M_2$ , e consiste ulteriormente di  $b - 2$  punti, distinti da  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ , il cui insieme denoteremo con  $\bar{\gamma}$ . I punti di  $\bar{\delta}$ , contati su ciascuno dei due rami di  $\Gamma$  di cui sono origini, costituiscono il gruppo canonico  $\bar{\kappa}$  di  $\Gamma$  proiezione di  $\kappa$ .

Dette  $\beta(x) = 0$  e  $\delta(x) = 0$  le equazioni dei gruppi  $\bar{\beta}$  e  $\bar{\delta}$  sull'asse  $x$ , i cui punti sono fra loro distinti e tutti al finito, ed i cui gradi rispettivi sono dunque  $b$  e  $p - 1$ , la curva  $\Gamma$  si rappresenterà con un'equazione della forma

$$(16) \quad f(x, y) \equiv \beta(x) \delta^2(x) + y g(x, y) = 0,$$



$g(x, y)$  essendo un polinomio di grado  $\leq \mu - 1$  nelle  $x, y$ . Se  $(x_1, 0), (x_2, 0)$  sono le coordinate dei punti  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ , avremo  $x_1 \neq x_2$  ed inoltre

$$(17) \quad \beta(x) = (x - x_1)(x - x_2)\gamma(x) \quad \text{con} \quad \gamma(x_1)\gamma(x_2)\delta(x_1)\delta(x_2) \neq 0,$$

dove  $\gamma(x) = 0$  è l'equazione del gruppo  $\gamma$ . L'esistenza su  $\Gamma$  del gruppo canonico  $\bar{\alpha}$  suddetto, fa sì che  $\Gamma$  ammetta un'aggiunta

$$(18) \quad \omega(x, y) = 0$$

d'ordine  $\mu - 3$  passante doppiamente per i  $p - 1$  punti del gruppo  $\delta$ , doppi per  $\Gamma$ , e quindi non segante  $\Gamma$  fuori dei suoi punti multipli. La  $g_\mu^v$  immagine di  $|\alpha|$  su  $\Gamma$  è la serie ivi segata, fuori dei punti multipli, dalle aggiunte d'ordine  $\mu - 2$  che contengono doppiamente i punti di  $\delta$ ; in particolare la curva (18), completata colla retta impropria di  $\pi$ , è quella che così determina su  $\bar{\Gamma}$  il gruppo  $\bar{\alpha}$ .

In base al n. 2 (Nota I), l'integrale abeliano-attaccato a  $\bar{\Gamma}$  definito dai gruppi  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  può scriversi nella forma

$$\mathfrak{J} = c \int_{\Gamma} \frac{\omega(x, y) dy}{y f'(x, y)} \quad (c \text{ costante} \neq 0).$$

In virtù delle (16), (17) si ha

$$f'_x(x_1, 0) = (x_1 - x_2)\gamma(x_1)\delta^2(x_1) \neq 0,$$

talchè il residuo di  $\mathfrak{J}$  in  $\bar{M}_1$  vale

$$(19) \quad \rho_1 = \frac{c \omega(x_1, 0)}{(x_1 - x_2)\gamma(x_1)\delta^2(x_1)};$$

analogamente si vede che  $\mathfrak{J}$  ha in  $\bar{M}_2$  il residuo

$$(20) \quad \rho_2 = \frac{c \omega(x_2, 0)}{(x_2 - x_1)\gamma(x_2)\delta^2(x_2)}.$$

Notiamo ora che fra le aggiunte di  $\Gamma$  d'ordine  $\mu - 2$  passanti doppiamente per il gruppo  $\bar{\delta}$  ve ne sono (almeno)  $\infty^{v-(b-2)} = \infty^b$  che contengono il gruppo  $\bar{\gamma}$ ; poichè quelle aventi l'asse  $x$  come componente sono soltanto  $\infty^{b-1}$ , così una generica fra esse non ammette tale componente e può quindi venir rappresentata con un'equazione della forma

$$\gamma(x)\delta^2(x) + y h(x, y) = 0,$$

dove  $h(x, y)$  denota un polinomio di grado  $\leq \mu - 3$  nelle  $x, y$ . Nel riferimento con  $S_v$ , questa curva corrisponde ad un iperpiano  $S_{v-1}$ , non passante nè per  $M_1$  nè per  $M_2$  e contenente i rimanenti  $b - 2$  punti di  $\beta$ ; perciò  $S_{v-1}$  non contiene la retta  $M_1 M_2$ , e la sega nel punto che abbiamo dianzi indicato con  $N$ . Gli iperpiani  $S_{v-1}, S'_{v-1}$  sono certamente distinti, in quanto  $S'_{v-1}$ , a differenza di  $S_{v-1}$ , non contiene nessun punto di  $\beta$ . Gli iperpiani del loro fascio che contengono ordinatamente i punti  $M_1, M_2, N, N'$  corrispondono proiettivamente alle curve del fascio

$$\omega(x, y) + \lambda [\gamma(x)\delta^2(x) + y h(x, y)] = 0$$

provenienti dai valori  $\lambda_1, \lambda_2; \infty, 0$  del parametro  $\lambda$ ,  $\lambda'_1$  e  $\lambda_2$  essendo i valori di  $\lambda$  che competono alle curve del fascio passanti rispettivamente per  $\bar{M}_1$  e per  $\bar{M}_2$ . Si ha pertanto

$$(M_1 M_2 NN') = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \lambda_1 = -\frac{\omega(x_1, 0)}{\gamma(x_1) \delta^2(x_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{\omega(x_2, 0)}{\gamma(x_2) \delta^2(x_2)},$$

sicchè, confrontando colle (19), (20), si ha il risultato asserito

$$(M_1 M_2 NN') = -\rho_2/\rho_1.$$

Il caso dianzi escluso  $p = 0$  può trattarsi similmente, ma in modo più semplice, osservando che  $\Gamma$  è ora una curva razionale normale rappresentabile in coordinate omogenee  $(x_0, x_1, \dots, x_v)$  colle equazioni

$$x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_v = 1 : t : t^2 : \dots : t^v,$$

ed assumendo

$$\mathcal{J} = \int \frac{\alpha(t) dt}{(t-t_1)(t-t_2)\gamma(t)} \quad (t_1 \neq t_2, \alpha(t_1)\alpha(t_2)\gamma(t_1)\gamma(t_2) \neq 0),$$

dove  $\alpha(t)$  e  $\gamma(t)$  denotano due polinomi di grado  $v$  nella  $t$ .

7. In virtù del n. 6, il teorema sui residui dato nel n. 5 - nel caso di un gruppo  $\beta$  di  $b = r + 2 \geq 3$  punti distinti - discende subito dal seguente risultato di geometria proiettiva.

*Presi comunque in un  $S_r$   $r + 2$  punti  $M_1 M_2 \dots M_{r+2}$  ad  $r + 1$  ad  $r + 1$  linearmente indipendenti ( $r \geq 1$ ) ed un  $S_{r-1}$  che non contenga nessuno di essi, si considerino su ogni retta  $M_i M_j$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, r + 2$ ) i punti  $N_{ij}$  ( $= N_{ji}$ ),  $N_{ij}$  ( $= N_{ji}$ ) ov'essa rispettivamente incontra l'iperpiano congiungente gli  $r$  punti  $M$  distinti da  $M_i, M_j$ , ed il dato  $S_{r-1}$ . Si può allora associare a ciascun punto  $M_i$  un numero  $\rho_i \neq 0$ , in modo tale che si abbia*

$$(M_i M_j N_{ij} N'_{ij}) = -\rho_j/\rho_i;$$

*questi  $r + 2$  numeri  $\rho$  sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità, ed hanno per somma zero.*

Per dimostrarlo, introduciamo in  $S_r$  coordinate proiettive omogenee  $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$  in guisa che  $M_l$  risulti il punto fondamentale avente tutte le coordinate nulle tranne  $x_l$  ( $l = 1, 2, \dots, r + 1$ ), ed  $M_{r+2}$  sia il punto unità. Il dato  $S_{r-1}$  avrà allora un'equazione della forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{r+1} x_{r+1} = 0,$$

dove le  $a$  sono costanti tutte diverse da zero la cui somma non si annulla. Si vede subito che le condizioni per i suddetti numeri  $\rho$  si traducono nelle

$$\rho_1 : \rho_2 : \dots : \rho_{r+1} : \rho_{r+2} = a_1 : a_2 : \dots : a_{r+1} : -\sum_{l=1}^{r+1} a_l,$$

onde segue l'asserto.

Il prof. Guido Castelnuovo, che qui sentitamente ringrazio, mi ha fatto gentilmente osservare che il teorema dianzi stabilito può venir formulato

in coordinate generali nel modo seguente, che tosto porge un'elegante interpretazione affine dei residui di  $\beta$  relativamente ad  $\alpha$ , definiti nel n. 5, sempre nel caso che  $\beta$  consti di  $b = r + 2$  punti distinti. Conservando le notazioni di detto teorema ed introducendo in  $S_r$  coordinate proiettive omogenee  $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$  arbitrarie, siano  $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{r+1,i})$  le coordinate del punto  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r+2$ ) ed  $f(x) = 0$  l'equazione di  $S_{r-1}$ ,  $f(x)$  essendo una forma lineare nelle  $x$ . Il determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1, r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r+1, 1} & x_{r+1, 2} & \dots & x_{r+1, r+2} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_{r+2} \end{vmatrix}$$

dove  $f_i$  denota il valore assunto da  $f(x)$  nel punto  $M_i$ , è nullo in quanto l'ultima riga risulta manifestamente combinazione lineare delle rimanenti. Ebbene, lo sviluppo di  $D$  secondo gli elementi di tale riga è una somma di  $r+2$  termini:

$$D = f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2 + \dots + f_{r+2} \varphi_{r+2}$$

( $\varphi_i$  essendo il complemento algebrico di  $f_i$  in  $D$ ), i quali sono ordinatamente uguali o proporzionali ai numeri  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{r+2}$  suddetti; si vede così di nuovo che questi numeri hanno per somma zero. In particolare poi, ove si assuma  $S_{r-1}$  come iperpiano, all'infinito di  $S_r$  (onde i punti  $M_i$  risulteranno tutti al finito), dall'espressione indicata di  $\rho_i$  si deduce subito che il numero  $\rho_i$  uguaglia (a meno di un fattore di proporzionalità) il volume del simpleso che ha per vertici gli  $r+1$  punti  $M_1, M_2, \dots, M_{r+2}$  distinti da  $M_i$  presi in ordine opportuno. Questo risultato può anche ottenersi direttamente dalla definizione di  $\rho_i$  data nel primo enunciato di questo numero, mediante semplici considerazioni di geometria elementare.

8. Il risultato dimostrato al principio del n. 7 viene esteso dal seguente teorema.

*Dati genericamente in  $S_r$  un iperpiano  $S_{r-s}$  ed  $s \geq 3$  spazi  $S_{h_i}$  ( $h_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ) le cui dimensioni  $h_i$  abbiano per somma  $r - s + 2$ , si considerino due qualunque  $S_{h_i}, S_{h_j}$  distinti di questi spazi ed il punto  $Q_{ij} \in Q_{ij} \cap Q_{ji}$  intersezione dell' $S_{h_i+h_j+1}$  che li congiunge coll' $S_{r-h_i-h_j-1}$  congiungente i rimanenti  $S_{h_i}$ . Esiste una ed una sola retta per  $Q_{ij}$  incidente a  $S_{h_i}$  ed  $S_{h_j}$ , e siano ordinatamente  $P_{ij}, P_{ji}$  i suoi punti d'appoggio con questi spazi e  $Q_i (= Q_{ii})$  la sua intersezione col dato  $S_{r-1}$ . Si può allora associare a ciascuno spazio  $S_{h_i}$  un numero  $\sigma_i$ , in guisa tale che risulti*

$$(P_{ij} P_{ji} Q_{ij} Q_{ji}) = -\sigma_j / \sigma_i \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, s).$$

*Scelti comunque  $h_i + 1$  punti indipendenti in ciascuno spazio  $S_{h_i}$ , talchè così si ottengono complessivamente  $r+2$  punti  $M_1, M_2, \dots, M_{r+2}$  di  $S_r$ , si associno a questi, in relazione al dato  $S_{r-1}$ , e giusta il n. 7, altrettanti numeri  $\rho_i$ ;*

allora quale numero  $\sigma_i$  può assumersi la somma dei numeri  $\rho$  inerenti agli  $h_i + 1$  punti  $M$  che appartengono ad  $S_{h_i}$ . Ne consegue che gli  $s$  numeri  $\sigma_i$  suddetti sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità ed hanno per somma zero.

Adottando per  $S_r$ ,  $S_{r-1}$  e per i punti  $M$  le notazioni usate al principio del n. 7, possiamo senza restrizione assumere  $i = 1$ ,  $j = 2$  e supporre che  $S_{h_1}$  ed  $S_{h_2}$  siano gli spazi determinati da  $M_1 \cdots M_{h_1+1}$  e da  $M_{h_1+2} \cdots M_{h_1+h_2+2}$ . Allora è subito visto che i punti  $Q_{12}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{21}$ ,  $Q'_{12}$  hanno tutte le coordinate nulle, tranne rispettivamente

$$\begin{aligned} x_1 = \cdots = x_{h_1+h_2+2} = 1, \quad x_1 = \cdots = x_{h_1+1} = 1, \quad x_{h_1+2} = \cdots = x_{h_1+h_2+2} = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \cdots = x_{h_1+1} = a_{h_1+2} + \cdots + a_{h_1+h_2+2} \\ x_{h_1+2} = \cdots = x_{h_1+h_2+2} = -(a_1 + \cdots + a_{h_1+1}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

In base al n. 7 ed alla (21) si ha pertanto

$$\begin{aligned} \sigma_1/\sigma_2 &= (a_1 + \cdots + a_{h_1+1})/(a_{h_1+2} + \cdots + a_{h_1+h_2+2}) = \\ &= (\rho_1 + \cdots + \rho_{h_1+1})/(\rho_{h_1+2} + \cdots + \rho_{h_1+h_2+2}), \end{aligned}$$

e ciò prova l'asserto.

9. Riferiamoci da ultimo ad un qualunque integrale abeliano  $\mathfrak{I}$  sopra una curva  $\mathcal{C}$ , il cui gruppo  $\beta$  dei punti singolari non consti di  $b$  punti distinti ma contenga ad esempio un punto  $M$  di molteplicità  $h + 1$  ( $\geq 2$ ). È chiaro anzitutto che  $\mathfrak{I}$  può sempre ottenersi come limite di un integrale abeliano  $\bar{\mathfrak{I}}$ , attaccato a  $\mathcal{C}$ , il cui gruppo  $\bar{\beta}$  dei punti singolari consti di  $b$  punti distinti. Quando l'integrale  $\bar{\mathfrak{I}}$  tende ad  $\mathfrak{I}$ , il gruppo  $\bar{\beta}$  tende a  $\beta$  ed esattamente  $h + 1$  dei suoi punti tendono ad  $M$ ; ebbene

*Il residuo di  $\bar{\mathfrak{I}}$  in  $M$  è il limite della somma dei residui di  $\bar{\mathfrak{I}}$  nei suddetti  $h + 1$  punti di  $\bar{\beta}$ .*

Ciò è una facile conseguenza della definizione topologica di residuo. Il risultato segue altresì subito — mediante una semplice considerazione di limite — dal teorema del n. 5, nell'ipotesi che  $\beta$  non abbia altri punti multipli all'infuori di  $M$ ; da qui lo si deduce poi in ogni caso, tenendo conto del carattere locale (o differenziale) della nozione di residuo.

Avuto riguardo all'osservazione testè fatta ed ai nn. 7, 8; dal teorema del n. 6 mediante un opportuno passaggio al limite si deduce tosto la seguente sua estensione, che fornisce un significato geometrico e l'invarianza birazionale dei residui nel caso più generale, nonchè (in virtù del n. 8) una nuova giustificazione del teorema del n. 5.

*Preso su di una curva algebrica  $\mathcal{C}$  un gruppo  $\beta$  arbitrario di punti, che consti di  $s$  ( $\geq 3$ ) punti distinti da contarsi con date molteplicità  $h_i + 1$  ( $h_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ), sia  $\alpha$  un qualunque gruppo della serie covariante  $|\beta + \kappa|$  ( $\kappa$  essendo un gruppo canonico di  $\mathcal{C}$ ) che non abbia nessun punto comune con  $\beta$ . Gli  $s$  residui  $\sigma_i$  del gruppo  $\beta$  relativamente ad  $\alpha$  possono allora ottenersi nel modo seguente.*



Si costruisca l'immagine proiettiva  $\Gamma$  di  $|\alpha|$ , e siano  $M_1, \dots, M_s$  i punti di  $\Gamma$  che, contati colle rispettive molteplicità  $h_1 + 1, \dots, h_s + 1$ , costituiscono il gruppo immagine di  $\beta$  su  $\Gamma$ . Detto  $S_{h_i}$  lo spazio di dimensione  $h_i$  osculatore a  $\Gamma$  in  $M_i$ , due qualunque spazi  $S_{h_i}, S_{h_j}$  sono sghembi fra loro e congiunti da uno spazio che incontra in uno ed un sol punto lo spazio congiungente i rimanenti spazi  $S_{h_i}$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, s$ ). Allora vale la (2I), dove  $Q_{ij} (= Q_{ji})$  denota tale punto;  $P_{ij}, P_{ji}$  indicano i punti appartenenti rispettivamente agli spazi  $S_{h_i}, S_{h_j}$  e situati sulla retta per  $Q_{ij}$  incidente a questi; infine  $Q'_{ij} (= Q'_{ji})$  è il punto determinato su detta retta dall'iperpiano secante su  $\Gamma$  l'immagine del gruppo  $\alpha$ .

**Geometria.** — *Su alcuni lavori di W. L. Edge.* Nota (\*) del Socio G. FANO.

I. W. L. Edge in un gruppo di lavori pubblicati negli anni 1937-40 (1) ha determinato per via geometrica alcuni luoghi legati proiettivamente a una rete di quadriche dello spazio  $S_3$ , valendosene per trovare covarianti e combinanti delle forme primi membri delle equazioni di quelle quadriche. Alcuni dei suoi risultati valgono però in ipotesi più generali; e altri, frammentari a questioni di minor importanza, non sempre appaiono in piena luce.

Considerazione fondamentale è quella di una curva di genere 3 non iperellittica, riferibile perciò a una quartica piana; della sua serie lineare completa non speciale  $g_3^5$  doppia della  $g_4^2$  canonica, e della curva  $C_3^8$  dello spazio  $S_3$  che ne è immagine proiettiva. Su quest'ultima i  $G_4$  canonici stanno in piani mutuamente incidenti; i piani dei gruppi di una  $g_4^1$  formano un  $S_6$ -cono cubico; e i vertici di questi  $\infty^2$  coni hanno per luogo una superficie  $F^4$  di Veronese contenente la  $C_3^8$ , e incontrata da quei piani nelle sue  $\infty^2$  coniche. La  $C_3^8$  è intersezione completa della  $F^4$  con una quadrica, la quale non può contenere il piano di alcuna delle sue  $\infty^2$  coniche (piani secanti di  $F^4$ ) né alcun suo piano tangente.

Le curve  $C_3^8$  di  $S_3$  dipendono da 44 parametri (2); ma la condizione qui posta loro di essere immagine proiettiva della  $g_3^5$  doppia della serie canonica — una  $g_3^2$  determinata, fra  $\infty^3$  — limita i parametri a 41, d'accordo col fatto che in uno spazio  $S_3$  sono  $\infty^{27}$  le  $F^4$  di Veronese (3), e  $\infty^{14}$  le  $C_3^8$  su ciascuna

(\*) Presentata nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Notes on a net of quadric surfaces. — I. The Cremonian transformation, «London Math. Soc. Proceed.» (2), vol. 43 (1937), p. 302; II. Anharmonic covariants, «London Math. Soc. Journ.», vol. 12 (1937), p. 276; III. The scroll of trisecants of the Jacobian curve, detti «Proceed.», vol. 44 (1938), p. 466; IV. Combinantal covariants of low order; V. The pentahedral net, ibid., vol. 47 (1940-42), pp. 123, 455. V. anche i lavori anteriori: The net of quadric surfaces associated with a pair of Möbius tetrads, ibid., vol. 41 (1936), p. 337; Octadic surfaces and quartic plane curves, ibid., vol. 34 (1932), p. 492.

(2) SEVERI, Vorlesungen über algebraische Geometrie (trad. LÖFFLER), Teubner 1921, pp. 160-61.

(3) Sono  $\infty^{35}$  le omografie di  $S_3$ , e due qualunque di queste  $F^4$  sono omografiche in  $\infty^8$  modi.

di esse (tante quante le quartiche piane loro immagini nella consueta rappresentazione piana della  $F^4$ ).

In seguito, mi riferirò sempre a  $C_3^8$  del tipo anzidetto. Ogni quadrica ne contiene  $\infty^{27}$ . Ma le  $F^4$  di Veronese contenute in una quadrica assegnata di  $S_5$  sono  $\infty^{12}$ , ripartite in due schiere, secondo che incontrano in 3 punti i piani della quadrica dell'uno o dell'altro sistema; e perciò le  $C_3^8$  contenute in queste  $F^4$  sono soltanto  $\infty^{26}$ .

2. Consideriamo ora in  $S_5$  una quadrica determinata, non cono, come quadrica  $\Omega$  delle rette dello spazio  $S_3$ . Le  $\infty^{27}$  curve  $C_3^8$  in essa contenute sono immagini di rigate  $R^8$  di genere 3, con curva doppia di ordine 18 e genere 19 (v. appresso, nota (7)) incontrante ogni generatrice in 6 punti. I piani delle coppie di generatrici uscenti dai punti della curva doppia formano una sviluppabile di classe anche 18. La  $R^8$  ha 8 punti tripli, tali pure per la sua curva doppia, e dualmente 8 piani tritangenti, cioè contenenti 3 generatrici (4). Su di essa i complessi lineari segano le serie  $g_8^3$  doppia della serie canonica, e in particolare  $\infty^2$  complessi lineari segano i singoli  $G_4$  canonici contati due volte.

Poichè la curva  $C_3^8$  ha i gruppi canonici in piani e per conseguenza sulle coniche intersezioni di questi piani colla quadrica  $\Omega$ , i  $G_4$  canonici della rigata  $R^8$  apparterranno a altrettanti ( $\infty^2$ ) regoli, luogo dei quali sarà il complesso cubico  $L$  avente per immagine in  $S_5$  la  $M_3^6$  intersezione di  $\Omega$  colla  $M_4^3$  luogo dei piani secanti e dei piani tangenti di  $F^4$ , e per la quale  $F^4$  è superficie doppia. Il complesso cubico  $L$  ha pertanto le generatrici di  $R^8$  come rette doppie. Per ogni retta di questo complesso non appartenente a  $R^8$  passa uno di quegli  $\infty^2$  regoli; nessuno di essi è cono, ma  $\infty^1$  si spezzano in due fasci di rette, in corrispondenza ai piani secanti di  $F^4$  che sono tangenti a  $\Omega$ . Ogni  $G_4$  canonico di  $R^8$  contenente due generatrici incidenti ne contiene altre due pure incidenti; e queste due coppie di generatrici determinano una di quelle  $\infty^1$  coppie di fasci, aventi a comune una retta  $r$ , congiungente dei loro centri e intersezione dei loro piani. Gli  $\infty^1$  fasci costituiscono insieme una congruenza (18, 18), avente per immagine in  $S_5$  la rigata  $R^{36}$  intersezione di  $\Omega$  colla varietà, di ordine 18, luogo delle corde di  $C_3^8$ , e anche colla  $M_3^{18}$  luogo dei piani secanti di  $F^4$  che sono tangenti a  $\Omega$  (5). I centri delle coppie di fasci di cui sopra formano sulla curva doppia della rigata  $R^8$  un'involuzione  $\gamma_2^1$  priva di elementi doppi; e le rette  $r$  loro congiungenti hanno per luogo una rigata  $R^{18}$  (6), la

(4) CASTELNUOVO, « Rend. Circ. Mat. Palermo », vol. 3 (1888), p. 27; C. SEGRE, *Mehr-dimensionale Räume*, art. III C 7 della « Encykl. der Mathem. Wissenschaften », n. 31, p. 912 (1912).

(5) I piani delle coniche di un fascio su  $F^4$  formano una  $V_3^3$ , incontrata da  $\Omega$  in una superficie di ordine 6, a sezioni di genere due, con sei coniche spezzate in coppie di rette. Perciò quei piani di coniche di  $F^4$  che sono tangenti a  $\Omega$  formano una varietà equivalente a 6 volte la precedente.

(6) L'ordine di questa rigata si determina applicando una nota formola di SCHUBERT. V. per esempio SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I (geometria delle serie lineari), Bologna, 1926, p. 253.

cui immagine in  $S_3$  è la curva anche di ordine 18 luogo dei punti di contatto di  $\Omega$  coi piani secanti di  $F^4$  e tangenti a  $\Omega$ . Tale curva è doppia per la rigata  $R^{36}$  suddetta (7).

Il complesso cubico  $L$  contiene un secondo sistema  $\infty^2$  di regoli, corrispondenti alle coniche intersezioni di  $\Omega$  coi piani tangenti di  $F^4$ , tali che per una retta di  $L$  ne passano due. Fra questi regoli, di nuovo  $\infty^1$  si spezzano in due fasci aventi per immagini in  $S_3$  le generatrici di un'altra rigata  $R^{36}$  (8); sicchè i fasci stessi hanno per luogo una seconda congruenza (18, 18). Questa nuova  $R^{36}$  ha anche una curva doppia di ordine 18, luogo dei punti di contatto di  $\Omega$  coi piani tangenti ad essa e a  $F^4$ .

La varietà  $M_4^3$  dei piani secanti e tangenti di  $F^4$  non contiene altre rette all'infuori di quelle contenute in questi piani; perciò il complesso  $L$  non contiene altri fasci di rette oltre i due sistemi  $\infty^1$  già incontrati, i cui centri hanno per luoghi 2 curve di ordine 18. D'altra parte la curva complessiva luogo di tali centri deve essere di ordine 90 (9), e i fasci stessi devono costituire complessivamente una congruenza (90, 90). Evidentemente, una almeno delle due congruenze (18, 18) dovrà avere per la congruenza complessiva una certa molteplicità. Ora la  $M_4^3$  ha la superficie  $F^4$  come doppia; e pertanto la sua intersezione con un  $S_3$  generico è una superficie cubica con 4 punti doppi, le cui congiungenti, sezioni di altrettanti piani secanti di  $F^4$ , assorbono ciascuna 4 rette di una superficie cubica generale, mentre le rimanenti 3 rette contano semplicemente. Pertanto la prima  $\infty^1$  di fasci del complesso  $L$ , determinati da coppie di generatrici incidenti di  $R^8$ , va contata 4 volte, l'altra semplicemente (10).

(7) Il genere della curva doppia, di ordine 18, della rigata  $R^8$  si può determinare in più modi. 1) Tale curva è in corrispondenza (2, 1) colla rigata  $R^{18}$  delle rette  $r$ . E il genere di questa rigata, cioè della  $\gamma_2^1$  di cui sopra, cioè della  $\infty^1$  dei piani secanti di  $F^4$  e tangenti a  $\Omega$ , è quello di una  $C^6$  piana generale, cioè 10. Dalla formola di ZEUTHEN, ritenuto che la  $\gamma_2^1$  non ha elementi doppi, si ricava pertanto che il genere richiesto è 19. 2) questo stesso genere è anche quello della rigata  $R^{36}$  equivalente (come alla nota (5)), all'insieme di 6 superficie di di 6° ordine a sezioni di genere 2, aventi a coppie una conica comune. E poichè la  $R^{36}$  ha una curva doppia di ordine 18, il suo genere, che è quello della curva sezione, sarà  $6 \cdot 2 + \binom{6}{2} \cdot 2 - 5 - 18 = 19$ . - Questo risultato è d'accordo con una formola per il genere della curva doppia di una rigata algebrica, data da FR. MEYER nell'art. III C 10 b della « Encykl. der Mathem. Wiss. » (*Flächen vierter und höherer Ordnung*, p. 1759), senza indicare (almeno in modo chiaro) a chi sia dovuta.

(8) Ciò in base a considerazioni analoghe a quelle della nota (5), applicate alla  $\infty^2$  dei piani tangenti di  $F^4$  anzichè ai piani secanti.

(9) V. per esempio ZINDLER, *Algebraische Liniengeometrie*, Art. III C 8 della « Encykl. der Math. Wissenschaften », n. 41, pp. 1166-67 (1921). Proprietà dovuta a VOSS (« Mathem. Annalen », vol. 9 (1875), p. 55).

(10) Alla stessa conclusione si giunge considerando la sezione della  $M_4^3$  con uno spazio  $S_4$ . Si ha una  $V_3^3$  con quartica doppia, contenente due sistemi  $\infty^2$  di rette; uno (1, 6) di corde della quartica; e uno (2, 3) (C. SEGRE, « Mem. Accad. di Torino » (2), vol. 39 (1888), p. 3). Dovendo questi, opportunamente computati, costituire insieme il sistema (6, 27) di una  $V_3^3$  generale, non è possibile altra soluzione che di computare il primo 4 volte.

3. Passiamo ora a considerare tipi particolari di curve  $C_3^8$  e rigate  $R^8$ , nelle quali ultime la curva doppia di ordine 18 è sostituita da una curva tripla di ordine 6, o quadrupla di ordine 3, mentre i piani delle coppie di generatrici incidenti continuano a formare, generalmente, una sviluppabile irriducibile di classe 18 (oppure dualmente). Edge, prendendo le mosse da una rete di quadriche dello spazio  $S_3$ , è condotto appunto a considerare in tutta la questione i soli casi a) e c).

a) Data in  $S_3$  una rete generica di quadriche, le coppie di punti coniugati rispetto a tutte le quadriche della rete costituiscono un'involuzione  $I_2$  <sup>(11)</sup>, per la quale la linea  $\mathfrak{D}_3$  luogo dei vertici dei coni della rete è la sola linea fondamentale; e ai suoi punti  $P$  corrispondono le rette  $p$  trisecanti di essa, luogo delle quali è appunto una rigata  $R^8$  avente la sestica  $\mathfrak{D}$  come tripla, e come nel caso generale 8 piani tritangenti <sup>(12)</sup>. Queste rigate  $R^8$  dipendono, come le reti di quadriche, da 21 parametri (anziché 27). Su  $\mathfrak{D}$  i  $G_4$  canonici sono le quaderne di vertici dei coni contenuti nei fasci della rete; e è noto già da Chasles <sup>(13)</sup> che le corrispondenti quaderne di generatrici  $p$  di  $R^8$  appartengono a regoli: si tratta perciò di un caso particolare della  $R^8$  di cui al n. 2. Le 3 generatrici di  $R^8$  uscenti da uno stesso punto  $P$  di  $\mathfrak{D}$  appartengono a coppie a altrettanti  $G_4$  canonici, per i quali il regolo si spezza nel fascio di queste 2 generatrici e in un secondo fascio col centro sulla  $p$  e il piano passante per  $P$ . Le congiungenti dei due centri formano di nuovo, come al n. 2, una rigata  $R^{18}$  per la quale  $\mathfrak{D}$  è linea tripla. A questo caso è particolarmente dedicato il lavoro III di Edge qui cit. alla nota <sup>(1)</sup> <sup>(14)</sup>.

b) La  $F^4$  di Veronese contenente la curva  $C_3^8$  può essere contenuta nella quadrica  $\Omega$ , ed è allora immagine dalla congruenza (1,3) delle corde di una cubica sgheмба, oppure della congruenza duale (3,1) delle intersezioni dei suoi piani osculatori. La rigata  $R^8$  è allora intersezione di questa congruenza (l'una o l'altra) con un complesso quadratico di rette, e perciò generata da una corrispondenza simmetrica (4,4) sulla cubica, o nella svi-

(11) Le rette congiungenti queste coppie di punti sono le generatrici delle quadriche della rete; e luogo di esse è anche un complesso cubico.

(12) Ciascuno di questi 8 piani è tangente a tre coni della rete; e insieme essi formano un gruppo autoassociato, cioè base di un sistema lineare  $\infty^2$  di quadriche-inviluppo (W. P. MILNE, *In- and circumscribed triangles of a plane quartic curve*, «Lond. Math. Soc. Journ.», vol. 8 (1932), p. 211; in part. n. 4, pp. 214-16.

(13) *Aperçu historique...*, 3<sup>a</sup> ediz., Paris 1889, p. 692. In sostanza: Le intersezioni delle facce di un tetraedro coi piani polari dei vertici opposti rispetto a una stessa quadrica sono rette di un regolo.

(14) La corrispondenza involutoria  $I_2$  è caso particolare della corrispondenza Cremoniana fra due spazi  $S_3$  anche distinti, nella quale ai piani di ciascuno dei due spazi corrispondono nell'altro le superficie cubiche passanti per una sestica di genere 3 (qui la  $\mathfrak{D}$  stessa), e ai punti di questa sestica le trisecanti della sestica dell'altro spazio. Queste sestiche dipendono da 24 parametri, ma sono birazionalmente identiche alle  $\mathfrak{D}$  di cui sopra (dipendenti da 21 parametri). Per esse, la  $\mathfrak{D}$ , e la  $\mathfrak{D}$  più particolare del caso c) - indicate da EDGE (lav. cit. in «Lond. Math. Soc. Proceed.» (2), vol. 34) come SCHUR'S, HESSE'S, REYE'S *sextics* - V. le ampie indicazioni bibliografiche in ROHN BERZOLARI, *Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen*, art. III C 9 della «Encykl. der Math. Wissenschaften», (1926), n. 68, p. 1401 e sg.



luppabile  $\Gamma$  dei suoi piani osculatori; nel primo caso  $R^8$  ha la cubica come linea quadrupla, nel secondo caso ha i piani di  $\Gamma$  come piani 4 - tangenti, e una linea doppia di ordine 18; in ambo i casi le quaderne di rette appartenenti a uno stesso punto o piano osculatore della cubica sono  $G_4$  canonici di  $R^8$ . Il complesso cubico  $L$  si compone delle  $\infty^3$  rette appoggiate alla cubica, oppure rispettivamente contenute nei suoi piani osculatori.

c) Un caso ulteriormente particolare di a) e in pari tempo di b) si ha quando la rete di quadriche considerata in a) si compone delle prime polari dei punti di un piano  $\pi$  rispetto a una superficie cubica. Le stesse quadriche sono allora prime polari dei punti di  $\infty^1$  diversi piani  $\pi$  rispetto a  $\infty^2$  superficie cubiche aventi solo  $\infty^1$  diversi pentaedri, il piano  $\pi$  variando colla superficie cubica mentre rimane fisso il pentaedro. La curva  $\mathfrak{D}$  dipende allora da soli 20 parametri. Gli  $\infty^1$  piani  $\pi$  sono quelli una di sviluppabile di 3<sup>a</sup> classe  $\Gamma$ ; gli  $\infty^1$  pentaedri hanno per facce i gruppi di una serie lineare  $g'_i$  entro  $\Gamma$ , e hanno i vertici sulla sestica  $\mathfrak{D}$ , nella quale perciò essi risultano inscritti. La corrispondenza simmetrica (4,4) del caso b) è quella che intercede fra le coppie di piani di  $\Gamma$  appartenenti a uno stesso gruppo della  $g'_i$ ; la rigata  $R^8$  ha come generatrici le intersezioni di queste stesse coppie di piani, ha  $\mathfrak{D}$  come curva tripla, e i piani  $\pi$  di  $\Gamma$  come 4 - tangenti. Questi  $\infty^1$  piani incontrano perciò  $\mathfrak{D}$  in 6 punti vertici di un quadrilatero completo <sup>(15)</sup>.

4. Gli iperpiani  $(S_4^-)$  di uno spazio  $S_5$  sono a loro volta elementi di uno spazio a 5 dimensioni, nel quale gli  $\infty^2$  iperpiani tangenti lungo coniche a una  $F^4$  di Veronese sono punti anche di una superficie di Veronese. Perciò in una qualsiasi reciprocità di  $S_5$ , per esempio nella polarità rispetto alla quadrica  $\Omega$ , agli iperpiani tangenti lungo coniche alla precedente  $F^4$  corrisponderanno i punti di una nuova superficie di Veronese  $\varphi^4$  (idea applicata da Edge); e agli  $\infty^4$  iperpiani che incontrano  $F^4$  in coppie di coniche, i punti dalla varietà  $\mu^4$  luogo dei piani secanti e piani tangenti di  $\varphi^4$ . Questi stessi piani corrispondono nella detta polarità ai piani rispettivamente tangenti e secanti di  $F^4$ ; e la relazione tra  $F^4$  e  $\varphi^4$  è reciproca.

Occorre però esaminare separatamente i due casi di una  $F^4$  contenuta nella quadrica  $\Omega$ , e di una  $F^4$  incontrata da  $\Omega$  in una  $C_3^8$ .

Nel primo caso, pensando  $F^4$  costituita entro  $\Omega$  dalle corde di una cubica sghemba, le coniche di  $F^4$  sono gli  $\infty^2$  regoli composti di tali corde, con inclusi; e gli iperpiani tangenti a  $F^4$  lungo coniche sono i complessi lineari che incontrano la congruenza  $(1,3)$  di quelle corde nei detti regoli o coni, contati 2 volte. Fra questi interessano qui particolarmente i complessi lineari speciali, cioè gli iperpiani tangenti a  $\Omega$ , i cui poli appartengono a  $\Omega$ , e sono immagini delle rette direttrici di quei complessi. Ora le direttrici di uno

(15). Questa curva  $\mathfrak{D}$  non ha moduli generali; è riferibile a una quartica piana di LÜROTH («*Mathem. Ann.*», vol. 1 (1868), p. 37; *ibid.* vol. 13 (1878), p. 548), che è luogo dei vertici di  $\infty^1$  5 - lateri, tutti circoscritti a una stessa conica. V. anche C. SEGRE, «*Atti Acc. di Torino*», vol. 59 (1923-24), p. 145. A questo caso c) è dedicata da EDGE la Memoria V qui cit. alla nota (1).

dei regoli anzidetti sono rette appoggiate alla cubica in un solo punto, direttrici di complessi lineari che incontrano la congruenza (1,3) in questo stesso regolo, più un cono; e soltanto quando la direttrice è tangente alla cubica quest'intersezione si riduce a un cono contato due volte. E poichè le tangenti della cubica, aventi per luogo una sviluppabile  $S^4$ , costituiscono entro  $\Omega$  una quartica razionale normale (di  $S_4$ ), la superficie  $\varphi^4$  non sarà contenuta in  $\Omega$ , ma l'incontrerà in una quartica, evidentemente da contare due volte; cioè  $\varphi^4$  sarà tangente a  $\Omega$  lungo questa quartica <sup>(16)</sup>.

Se invece  $F^4$  non è contenuta in  $\Omega$ , ma l'incontra in una  $C_4^8$  irriducibile, gli iperpiani tangenti a  $F^4$  lungo coniche di nuovo non saranno tutti tangenti a  $\Omega$ ; perchè se no  $\varphi^4$  sarebbe contenuta in  $\Omega$ , e  $F^4$  sarebbe tangente a  $\Omega$  lungo una quartica, contro l'ipotesi.

L'intersezione di  $\varphi^4$  e  $\Omega$  sarà perciò una nuova curva  $\gamma_3^8$  irriducibile, immagine di una rigata  $\rho^8$ ; e l'intersezione  $\mu_1 \cdot \Omega$  sarà immagine di un nuovo complesso cubico  $\Lambda$  avente le generatrici di  $\rho^8$  come rette doppie, e luogo a sua volta di due sistemi  $\infty^2$  di regoli. Anzi, poichè la polarità rispetto ad  $\Omega$  muta ogni regolo nel regolo delle sue direttrici, o «complementare» del primo, questi nuovi regoli saranno i complementari di quelli contenuti nel complesso  $L$ ; e per ogni regolo contenuto in  $L$  e spezzato in due fasci  $A(\alpha)$  e  $B(\beta)$ , il complesso  $\Lambda$  conterrà i fasci  $A(\beta)$  e  $B(\alpha)$ ; sicchè i fasci dei due complessi hanno complessivamente gli stessi centri e gli stessi piani, ma collo scambio degli uni o degli altri nel modo indicato. Così si spiega il fatto <sup>(17)</sup> che nel caso *a*) si spezza in tre fasci il cono cubico uscente da un punto di  $\mathfrak{D}$  non solo pel complesso  $L$  — proprietà evidente, avendo esso come rette doppie le 3 generatrici di  $R^8$  uscenti da questo punto —, ma anche pel complesso  $\Lambda$  <sup>(18)</sup>.

Anche le relazioni fra i complessi  $L$  e  $\Lambda$  e fra le rigate  $R^8$  e  $\rho^8$  sono reciproche. Ciascuno dei due complessi  $L$  e  $\Lambda$  si compone delle rette direttrici dei regoli contenuti nell'altro; rette perciò che incontrano 4 generatrici di  $\rho^8$  o rispettivamente di  $R^8$  di un  $G_4$  canonico, e per conseguenza altre 4 di un secondo  $G_4$  canonico. *I complessi cubici  $L$  e  $\Lambda$  sono luoghi delle rette incontranti rispettivamente le rigate  $\rho^8$  e  $R^8$  in punti appartenenti a generatrici di due gruppi canonici.* Più particolarmente, per le generatrici di  $R^8$  e  $\rho^8$ , rette doppie dei due complessi, questi due gruppi canonici coincidono. *Ciascuna delle due rigate  $R^8$  e  $\rho^8$  si compone di rette 4-tangenti all'altra in punti appartenenti a generatrici di un gruppo canonico.*

5. Se  $F^4$  è contenuta in  $\Omega$ , come nei casi *b*) e *c*) del n. 3, la curva  $\gamma_3^8$  di  $\varphi^4$  è sostituita da una quartica doppia, ed è perciò prevedibile che la rigata  $\rho^8$  sia sostituita dalla sviluppabile  $S^4$  anche doppia. Nell'ipotesi *b*) mi

(16) Sono queste entro  $\Omega$  le  $\infty^{12}$  quartiche — tante quante le  $F^4$ , e  $\infty^7$  in ogni sezione iperpiana — immagini di sviluppabili  $S^4$ ; quelle stesse per cui la polarità rispetto alla quartica coincide colla polarità rispetto alla quadrica sezione di  $\Omega$  coll'iperpiano relativo.

(17) Cfr. EDGE, Mem. III, pp. 476-77.

(18) Del quale pertanto le rette intersezioni dei piani dei 3 fasci sono rette singolari, e  $\mathfrak{D}$  linea tripla dalla superficie singolare.

riferisco, per fissare le idee al caso della rigata  $R^8$  generata da una corrispondenza (4,4) nella sviluppabile  $\Gamma$ .

Ogni generatrice  $g$  di  $S^4$  è generatrice di contatto con un piano della sviluppabile  $\Gamma$ , il quale contiene 4 generatrici di  $R^8$ , formanti un gruppo canonico;  $g$  incontra pertanto queste 4 generatrici, né può incontrarne altre, perchè per nessun suo punto passano altri due piani di  $\Gamma$ . Essa è pertanto tangente a  $R^8$  nelle 4-intersezioni anzidette.

Ogni generatrice di  $R^8$  è intersezione di due piani di  $\Gamma$ , e perciò tangente a  $S^4$  nelle sue intersezioni colle generatrici di contatto di questi due piani. Può quindi considerarsi come 4-tangente alla  $S^4$  doppia. E sulla  $\rho^8$  così degenerata ogni coppia di generatrici, contata due volte, è un gruppo canonico.

Le due rigate  $R^8$  e  $S^4$  hanno a comune 8 generatrici, provenienti dagli elementi doppi della corrispondenza (4, 4) del caso *b*), e che nel caso *c*) costituiscono il gruppo Jacobiano della  $g_5^1$  entro  $\Gamma$ ; e si toccano inoltre lungo una curva di ordine 12.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Su una questione posta da S. Lie.* Nota (\*) di A. FINZI, presentata dal Socio U. AMALDI.

È noto che in ogni gruppo finito e continuo  $G$  esiste sempre un intorno della trasformazione identica tale, che ogni trasformazione dell'intorno appartiene a un sottogruppo  $g_1$  di  $G$ .

Il Lie si è posto la questione<sup>(1)</sup> se la detta proprietà valga anche per un gruppo infinito, in particolare per il gruppo di tutte le trasformazioni in  $r$  variabili.

Per avere un problema ben determinato noi considereremo il gruppo di tutte le trasformazioni, che mutano in sè una varietà chiusa  $V$  ad  $r$  dimensioni<sup>(2)</sup>.

Occorre inoltre definire il concetto di intorno di una trasformazione, in particolare quello di intorno della trasformazione identica. Noi, supponendo definita su  $V$  una metrica<sup>(3)</sup>, indicheremo con  $\mathfrak{J}(T, \delta)$  l'insieme di tutte le trasformazioni, che soddisfano alla condizione seguente; sia  $P_i$  il trasformato di  $P$  per la trasformazione  $T$ ,  $P'_i$  il trasformato di  $P$  per una

(\*) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1947.

(1) S. LIE, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. VI, Abhandl. XVIII, p. 399; vedi anche U. AMALDI, *Introduzione alla teoria dei gruppi continui e infiniti di trasformazioni*, vol. II: p. 65.

(2) Si considerano cioè le trasformazioni del gruppo totale in  $r$  variabili da un punto di vista globale, anzichè dal punto di vista locale, in cui si poneva S. LIE. Esattamente, si considera la porzione connessa del gruppo, che contiene l'identità.

(3) Per evitare possibili equivoci non sarà forse inutile precisare che non si richiede affatto che le trasformazioni del gruppo lascino invariante la metrica di  $V$ .

trasformazione di  $\mathfrak{I}(T, \delta)$ : la distanza da  $P_i$  a  $P'_i$  è sempre inferiore a  $\delta$ . Così posto il problema si vede agevolmente, con considerazioni del tutto elementari, che la risposta deve essere negativa. Più in generale in ogni intorno  $\mathfrak{I}(T, \delta)$  di una trasformazione  $T$ , che sia generabile con una trasformazione infinitesima, esistono sempre trasformazioni, che non godono di questa proprietà.

Si danno invece trasformazioni  $T$ , che non appartengono ad un gruppo ad un parametro, e tali che ogni trasformazione di un intorno di  $T$  non appartiene ugualmente ad alcun gruppo ad un parametro. Questo dimostra chiaramente che le trasformazioni di  $V$  che non appartengono ad alcun gruppo ad un parametro non devono essere considerate come eccezionali.

Non si saprebbe decidere tuttavia, per mezzo delle semplici considerazioni di questa Nota, se la trasformazione generica  $T$  della varietà  $V$  non appartiene ad alcun gruppo  $g_1$ , o se invece le probabilità che  $T$  appartenga o meno a un gruppo  $g_1$  sono comparabili fra loro.

2. Indichiamo ora una condizione necessaria, cui soddisfa una trasformazione  $T$ , appartenente ad un gruppo ad un parametro.

Supponiamo che una varietà  $S$  a  $p$  dimensioni ( $p < r$ ), appartenente alla varietà  $V$ , senza essere lasciata ferma da  $T$ , sia lasciata ferma da una sua potenza  $T^n$ .

Sia  $T'$  una trasformazione generica del gruppo ad un parametro cui appartiene  $T$ , e supponiamo che  $T'$  porti  $S$  in una nuova varietà  $S'$ . Applicando alla varietà  $V$  successivamente le trasformazioni  $T'^{-1}$ ,  $T^n$ ,  $T'$ ,  $S'$  andrà in  $S$ , rimarrà in  $S$ , e tornerà infine in  $S'$ . Ma  $T' T^n T'^{-1} = T^n$  e quindi  $S'$ , senza essere lasciata ferma da  $T$ , dovrà essere lasciata ferma da  $T^n$ . Possiamo dunque concludere che *se  $T$  appartiene ad un gruppo  $g$ , ogni varietà  $S$ , che senza rimanere ferma per  $T$ , rimane ferma per  $T^n$ , deve appartenere a una serie continua di varietà, topologicamente equivalenti, che godono della stessa proprietà.*

3. Cominciamo per semplicità col considerare le trasformazioni di un segmento di lunghezza  $2\pi$ , in cui si considerino equivalenti i due punti 0 e  $2\pi$ .

Una siffatta trasformazione  $T$  sarà rappresentata da un'equazione

$$x' = f(x)$$

dove  $f(x)$  è una funzione crescente, che soddisfa la condizione

$$f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi^{(4)}.$$

Il criterio assegnato al n. 2 ci dice in questo caso che, se la trasformazione  $T$  appartiene ad un gruppo ad un parametro, nessun punto, che non sia lasciato fermo da  $T$ , potrà essere lasciato fermo da  $T^n$ , oppure  $T^n$  si dovrà ridurre alla trasformazione identica.

(4)  $f(x)$  è dunque la somma di una funzione periodica e della funzione  $y = x$ .



Consideriamo la trasformazione

$$(I) \quad x' = x + 2 \frac{\pi}{n} + \varepsilon \sin nx \quad |\varepsilon| < \frac{1}{n}$$

i punti  $0, \frac{\pi}{n}, \dots, (2n-1)\frac{\pi}{n}$ , ed essi soltanto, rimangono fermi per  $T^n$ , onde la trasformazione (I) non può appartenere ad alcun gruppo  $g_1$ .

D'altra parte, prendendo  $n$  sufficientemente grande, si può fare in modo che la trasformazione (I) sposti ogni punto tanto poco quanto si vuole.

Si può ragionare in modo analogo nel caso di una varietà  $V$  ad  $r$  dimensioni. Sia  $\Pi$  il prodotto topologico del cerchio unitario per il solido di una sfera di raggio  $R$  ad  $r-1$  dimensioni.

Caratterizziamo i punti di  $\Pi$  con un sistema di  $r$  coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_r$  delle quali la prima, variando da  $0$  a  $2\pi$ , descrive il cerchio unitario, mentre  $x_2, \dots, x_r$  sono le coordinate cartesiane di uno spazio a  $r-1$  dimensioni, in cui l'origine coincide col centro della sfera di raggio  $R$ .

Definiamo su  $\Pi$  la trasformazione  $T^*$

$$x'_1 = x_1 + \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \left(2 \frac{\pi}{n} + \mu^2 \cos nx_1 - \mu^2\right) \quad \rho = \sqrt{x_2^2 + \dots + x_r^2}$$

$$x'_2 = x_2 \quad \mu^2 < \frac{1}{n}$$

$$\dots$$

$$x'_r = x_r$$

$T^*$  lascia fermi i punti della frontiera di  $\Pi$ . Fra i punti interni solo  $(0, 0, \dots, 0)$ ,  $\left(\frac{2\pi}{n}, 0, \dots, 0\right), \dots, \left(\frac{2n-2}{n}\pi, 0, \dots, 0\right)$  rimangono fermi per  $T^{*n}$  (5). Dunque

$T^*$  non può appartenere ad alcun gruppo  $g_1$  operante su  $\Pi$ .

È poi certamente possibile scegliere in  $V$  una regione omeomorfa a  $\Pi$ . Allora la trasformazione continua  $T$  di  $V$  in sè, che opera sui punti della regione omeomorfa a  $\Pi$  come la trasformazione indotta da  $T^*$  e lascia fermi tutti gli altri punti, non può essa pure appartenere ad alcun gruppo  $g_1$ . Inoltre, comunque sia scelto l'intorno  $\mathfrak{I}(I, \delta)$  della trasformazione identica, si potrà sempre fare in modo (prendendo  $n$  sufficientemente grande) che  $T$  appartenga a  $\mathfrak{I}(I, \delta)$ .

Si potrebbe agevolmente provare del pari che in un intorno arbitrario  $\mathfrak{I}(T, \delta)$  di una trasformazione  $T$ , appartenente ad un gruppo  $g_1$ , esistono sempre trasformazioni che non appartengono ad alcun gruppo ad un parametro. Noi qui non insisteremo su questo punto.

4. Vogliamo ora invece mostrare che si possono dare trasformazioni  $T$ , non appartenenti ad alcun gruppo  $g_1$ , e tali che ogni trasformazione di un

(5) Poichè solo  $x_1$  viene mutata, un punto per ritornare in sè stesso deve compiere un percorso di lunghezza  $2\pi$ . Ma ogni punto interno diverso dagli  $n$  indicati viene spostato da  $T^*$  di meno di  $\frac{2\pi}{n}$  e non può dunque restare invariante per  $T^{*n}$ .

intorno  $\mathfrak{I}(T, \delta)$  (con  $\delta$  opportunamente piccolo) non appartenga del pari ad alcun gruppo  $g_i$ .

Consideriamo la trasformazione  $T$  del segmento, considerato al n. 3, di lunghezza  $2\pi$

$$x' = x + \pi + \mu^2 \sin 2x.$$

Dico che ogni trasformazione di  $\mathfrak{I}(T, \delta)$  (con  $\delta < \mu^2$ ) non appartiene certamente ad alcun gruppo ad un parametro.

$T^2$  lascia fermi i punti  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ , trasforma un punto  $P$  appartenente all'intervallo  $0 - \frac{\pi}{2}$ , o rispettivamente all'intervallo  $\pi - \frac{3}{2}\pi$ , in un punto dello stesso intervallo situato a destra di  $P$ . Invece un punto  $P$  dell'intervallo  $\frac{\pi}{2} - \pi$ , o rispettivamente dell'intervallo  $\frac{3}{2}\pi - 2\pi$ , sarà trasformato in un punto dello stesso intervallo situato alla sinistra di  $P$ .

Sia ora  $T'$  una trasformazione di  $\mathfrak{I}(T, \delta)$ . Si vede subito che, per esempio,  $\frac{\pi}{4}$  viene trasformato da  $T'^2$  in un punto giacente a destra, mentre che  $\frac{3}{4}\pi$  viene trasformato in un punto giacente a sinistra. Fra  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{3}{4}\pi$  dovrà dunque esservi un punto invariante per  $T'^2$ . Ma allora resta stabilito che  $T'$  non può appartenere ad alcun gruppo  $g_i$ . Anche questa volta si potrebbe portare un esempio analogo per una varietà  $V$  ad  $r$  dimensioni.

**Matematica (Algebra).** — *Il gruppo di Brauer delle algebre semplici di tipo 1.* Nota (\*) di I. BARSOTTI, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

1. INTRODUZIONE. — In [2]<sup>(1)</sup> viene posto, e risolto, il problema di costruire mediante classi di algebre semplici normali di tipo 1, a base numerabile, un gruppo che sia l'analogo del gruppo di Brauer delle classi di algebre semplici normali a base finita; si dimostra che un tale gruppo può essere definito soltanto se ci si limita a considerare quelle algebre ciascuna delle quali ha la forma  $\mathfrak{D} \times \mathfrak{M}$ , ove  $\mathfrak{D}$  è prodotto diretto di un numero finito, o di una infinità numerabile, di algebre divisorie normali a base finita di gradi a 2 a 2 primi fra loro, mentre  $\mathfrak{M}$  è prodotto diretto di un numero finito, o di una infinità numerabile, di algebre regolari a base finita di gradi a 2 a 2 primi fra loro.

Dopo la dimostrazione, effettuata in [1], dell'esistenza di algebre divisorie di tipo 1 a base non numerabile, ci si può chiedere se anche per queste

(\*) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1947.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della Nota.

si possa definire un analogo del gruppo di Brauer; la risposta è, come si vedrà, affermativa, ma il gruppo ottenuto coincide con quello trovato in [2] per il caso delle algebre con base numerabile.

2. IL GRUPPO DI BRAUER. — Un'algebra  $\mathfrak{D}$ , divisoria di tipo 1 sopra il corpo  $\mathfrak{F}$ , si dirà *speciale* se per ogni numero primo razionale  $p$  esiste un intero  $r_p \geq 0$  tale che  $\mathfrak{D}$  contenga sub-algebre normali a base finita di grado  $p^{r_p}$ , ma non ne contenga di grado  $p^s$  con  $s > r_p$ ; se  $\mathfrak{F}$  è un corpo «regolare» (cfr. [1]), allora ogni algebra divisoria di tipo 1 su  $\mathfrak{F}$  è speciale; ma è facile convincersi che tutte le proprietà trovate in [1] per le algebre divisorie di tipo 1 su corpi regolari valgono anche per le algebre divisorie di tipo 1 speciali su corpi qualsiasi. Accanto a tali algebre occorre considerare anche le algebre regolari di tipo 1 speciali così definite: un'algebra  $\mathfrak{M}$  sul corpo  $\mathfrak{F}$  dicesi *regolare di tipo 1* se ogni insieme di un numero finito di suoi elementi è contenuto in una sub-algebra di  $\mathfrak{M}$  regolare ed a base finita su  $\mathfrak{F}$ ; dicesi poi *speciale* se per ogni numero primo razionale  $p$  esiste un intero  $r_p \geq 0$  tale che  $\mathfrak{M}$  contenga sub-algebre regolari a base finita di grado  $p^{r_p}$ , ma non ne contenga di grado  $p^s$  con  $s > r_p$ . Si ha ancora che ogni algebra divisoria (o regolare) di tipo 1 speciale contiene una sub-algebra caratteristica a base numerabile, od eventualmente finita, che è determinata a meno di isomorfismi, e che gode della proprietà che ogni sub-algebra a base finita dell'algebra data è isomorfa ad una sub-algebra dell'algebra caratteristica. Se infine si chiama algebra *semplice di tipo 1 speciale* un'algebra  $\mathfrak{A}$  che sia prodotto diretto di un numero finito di algebre divisorie di tipo 1 speciali  $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_i$  per una regolare di tipo 1 speciale  $\mathfrak{M}$ , si ha che anche  $\mathfrak{A}$  possiede una sub-algebra caratteristica, che è il prodotto diretto delle algebre caratteristiche di  $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_i, \mathfrak{M}$ , e che, oltre ad essere a base numerabile o finita, gode della proprietà: ogni sub-algebra a base finita di  $\mathfrak{A}$  è isomorfa ad una sub-algebra dell'algebra caratteristica di  $\mathfrak{A}$ .

Mi propongo ora di cercare una definizione della locuzione « classe di algebre semplici di tipo 1 speciali » sul corpo  $\mathfrak{F}$ , che soddisfi alle seguenti condizioni:

- 1) Ogni algebra semplice di tipo 1 speciale  $\mathfrak{A}$  appartiene ad una, ed una sola classe, che si indicherà con  $\{\mathfrak{A}\}$ .
- 2) Si può definire il prodotto fra classi, in modo che

$$\{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A}\} \{\mathfrak{B}\}.$$

- 3) Le algebre regolari di tipo 1 speciali costituiscono una classe, che si indicherà con  $\{\mathfrak{F}\}$ .

- 4) Le classi formano, rispetto al prodotto, un gruppo  $\Gamma$ .

Da 2), 3) segue intanto che  $\{\mathfrak{F}\}$  è l'unità del gruppo  $\Gamma$ , ed allora da 2) segue  $\{\mathfrak{A} \times \mathfrak{M}\} = \{\mathfrak{A}\}$  se  $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}\}$ . Se si indica con  $\mathfrak{B}^{-1}$  l'algebra reciproca di  $\mathfrak{B}$ , poichè evidentemente  $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}^{-1} \in \{\mathfrak{F}\}$ , si deduce da 2) che  $\{\mathfrak{B}^{-1}\} = \{\mathfrak{B}\}^{-1}$ ; quindi, sempre per 2), se  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}^{-1} \in \{\mathfrak{F}\}$ , allora  $\{\mathfrak{A}\} \{\mathfrak{B}\}^{-1} = 1$ ,  $\{\mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A}\}$ ; viceversa, è chiaro che da  $\{\mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A}\}$  segue  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}^{-1} \in \{\mathfrak{F}\}$ .

Si è così visto che se esiste un modo per soddisfare le 1), 2), 3), 4), esso è unico, e consiste nel porre  $\{ \mathfrak{A} \} =$  insieme delle  $\mathfrak{B}$  tali che  $\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}^{-1} \in \{ \mathfrak{F} \}$ , e nel definire il prodotto per mezzo della 2). Resta da provare che con tali definizioni le 1), 2), 3), 4) sono effettivamente verificate. A tale scopo premetto due lemmi:

(1) LEMMA. - Se  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  sono algebre semplici di tipo 1 speciali, con le algebre caratteristiche  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ , allora  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  è algebra caratteristica di  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ .

(2) LEMMA. - Nelle ipotesi di (1), condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}^{-1} \in \{ \mathfrak{F} \}$  è che esistano un'algebra divisoria di tipo 1 speciale a base numerabile (o finita)  $\mathfrak{D}$ , e due algebre regolari di tipo 1 speciali a base numerabile (o finita)  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  tali che

$$\overline{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{M}, \quad \overline{\mathfrak{B}} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{N}.$$

*Dimostrazione.* - La dimostrazione di (1) è palese. Quanto al (2), si osservi che, per (1), se  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}^{-1} \in \{ \mathfrak{F} \}$ , allora anche  $\mathfrak{A} \times \overline{\mathfrak{B}^{-1}} \in \{ \mathfrak{F} \}$ ; ma  $\mathfrak{A}$  e  $\overline{\mathfrak{B}^{-1}}$  hanno base numerabile (o finita), onde [2]

$$\overline{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{B} \cong \mathfrak{D}' \times \mathfrak{N}, \quad \text{e} \quad \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}'^{-1} \in \{ \mathfrak{F} \}, \quad \mathfrak{D} \cong \mathfrak{D}'.$$

Viceversa, se la condizione è verificata, l'algebra caratteristica di  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}^{-1}$  è  $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}'^{-1} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}^{-1} \in \{ \mathfrak{F} \}$ , onde  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}^{-1} \in \{ \mathfrak{F} \}$ , c. v. d.

Per provare la 1), suppongasi che  $\mathfrak{A} \in \{ \mathfrak{B} \}$ ; allora, se  $\mathfrak{C} \in \{ \mathfrak{A} \}$ , si ha (2):  $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{A} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{B} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{N}$  (le soprassegnature indicano costruzione dell'algebra caratteristica), e perciò (2)  $\mathfrak{C} \in \{ \mathfrak{B} \}$ , onde  $\{ \mathfrak{A} \} \subseteq \{ \mathfrak{B} \}$ ; e poichè da  $\mathfrak{A} \in \{ \mathfrak{B} \}$  segue, evidentemente, anche  $\mathfrak{B} \in \{ \mathfrak{A} \}$ , la 1) resta provata.

Per provare la 2) basta dimostrare che se  $\{ \mathfrak{A} \} = \{ \mathfrak{A}' \}$ , allora  $\{ \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \} = \{ \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B} \}$ ; e infatti (2):  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{A}' \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{M}', \quad \mathfrak{B} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{N}$ , e quindi (1):

$$\overline{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} \cong (\mathfrak{D} \times \mathfrak{C}) \times (\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}), \quad \overline{\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}} \cong (\mathfrak{D} \times \mathfrak{C}) \times (\mathfrak{M}' \times \mathfrak{N});$$

dal confronto delle ultime due espressioni e da (2) si ha appunto  $\{ \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \} = \{ \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B} \}$ .

Per provare la 3) basta osservare che se  $\mathfrak{M}$  è regolare, ma  $\mathfrak{A}$  non è regolare, allora  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{M}^{-1}$  non è regolare, come si vede per (2). La 4) è evidentemente soddisfatta.

Se allora si chiamano, come d'uso, *simili* due algebre semplici di tipo 1 speciali a base numerabile, quando esse sono equivalenti ai prodotti diretti di una stessa algebra divisoria di tipo 1 speciale per due algebre regolari di tipo 1 speciali, si ha il

(3) TEOREMA. - L'unico modo di definire le classi di algebre semplici di tipo 1 speciali in modo che esse formino un gruppo che soddisfi alle condizioni 1), 2), 3), 4), è il porre:  $\{ \mathfrak{A} \} =$  insieme delle algebre semplici di tipo 1 speciali aventi algebre caratteristiche simili all'algebra caratteristica di  $\mathfrak{A}$ .

Si osservi che, in particolare, ogni algebra appartiene alla classe determinata dalla propria algebra caratteristica: quindi il gruppo  $\Gamma$  così ottenuto coincide col gruppo analogo descritto in [2].



Si può scegliere come rappresentante di una classe l'algebra divisoria a base numerabile che è simile all'algebra caratteristica di un elemento qualsiasi della classe; però non accade, come nel gruppo delle classi di algebre a base numerabile, o finita, che ogni altro elemento di quella classe sia isomorfo al prodotto diretto di quel rappresentante per un elemento di  $\{\mathfrak{F}\}$ ; infatti [1] se il corpo  $\mathfrak{F}$  è un corpo regolare di potenza non numerabile, ogni classe che contiene un'algebra divisoria a base numerabile contiene anche almeno un'algebra divisoria a base non numerabile, ed in essa il commutatore di un'algebra caratteristica è  $\mathfrak{F}$ . Per quanto riguarda la decomposizione di un'algebra semplice di tipo 1 speciale nel prodotto diretto di una divisoria di tipo 1 speciale per una della classe  $\{\mathfrak{F}\}$ , non è detto che essa sia sempre possibile, e, quando è possibile, può non essere unica, come si vede dai seguenti risultati:

(4) TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché sia  $\{\mathfrak{A}\} = \{\mathfrak{B}\}$ , è che esistano nella classe  $\{\mathfrak{F}\}$  due algebre  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  tali che valga la relazione  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{M} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{N}$ .*

*Dimostrazione.* — Il teorema è vero se  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  hanno basi finite o numerabili; basta quindi provare che condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathfrak{B}$  sia simile all'algebra caratteristica di  $\mathfrak{A}$  è che esistano in  $\{\mathfrak{F}\}$  delle algebre  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  tali che  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{M} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{N}$ , avendo supposto che  $\mathfrak{B}$  abbia base numerabile o finita, e che  $\mathfrak{A}$  abbia base di potenza  $\aleph_0 > \aleph_0$ .

Sia allora  $\mathfrak{B} \sim \bar{\mathfrak{A}}$ , e si distinguano due casi:

*Caso 1.* — È  $\mathfrak{B} \cong \bar{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{M}'$ ; si scelga allora  $\mathfrak{M} \cong \bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{A}}^{-1} \times \mathfrak{M}'$ ,  $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}}^{-1}$ ; allora:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{M} \cong \mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{A}}^{-1} \times \mathfrak{M}' = \bar{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{M}' \times \mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}}^{-1} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{N},$$

come richiesto.

*Caso 2.* — È  $\bar{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{M}'$ ; si scelga allora  $\mathfrak{M} \cong \bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{A}}^{-1}$ ,  $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}}^{-1} \times \mathfrak{M}'$ ; allora:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{M} \cong \mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{A}}^{-1} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{M}' \times \mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}}^{-1} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{N},$$

come richiesto.

Viceversa, sia  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{M} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{N}$ ; allora (1)  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{M} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{N}$ , e perciò  $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ , c. v. d.

(5) TEOREMA. — *Sia  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{M}$ , con  $\mathfrak{D}$  divisoria di tipo 1 speciale,  $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}\}$ . Condizione necessaria affinché  $\mathfrak{A}$  sia esprimibile in più modi, distinti rispetto alla relazione di isomorfismo, come prodotto diretto di un'algebra divisoria di tipo 1 e di una regolare di tipo 1 è che  $\mathfrak{M}$  e  $\mathfrak{D}$  abbiano basi di potenze  $\geq \aleph_0$ , una almeno di esse essendo di potenza  $> \aleph_0$ . Condizione sufficiente è che  $\mathfrak{D}$  abbia una base di potenza  $> \aleph_0$ , e che sia inoltre  $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^{-1}$ .*

*Dimostrazione.* — Necessità: se  $\mathfrak{D}$  ha base finita, e se è anche  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{D}' \times \mathfrak{M}'$ , allora (4)  $\{\mathfrak{D}\} = \{\mathfrak{D}'\}$ , onde  $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}'$ ,  $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}'$ ; poichè [1] non esistono algebre divisorie di tipo 1 speciali a base non finita, con algebra caratteristica a base finita, ne segue  $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{D}'$ ; quindi  $(\mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}'^{-1}) \times \mathfrak{M}' \sim (\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^{-1}) \times \mathfrak{M}$ ; ma è noto che se il modulo di una sub algebra regolare a base finita di

un'algebra  $\mathfrak{H}$  coincide col modulo di  $\mathfrak{H}$ , allora  $\mathfrak{H}$  è prodotto diretto di quella sub-algebra per il suo commutatore; quindi  $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'^{(2)}$ .

Se  $\mathfrak{M}$  ha base finita, e se  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{D}' \times \mathfrak{M}'$ , è anche:

$$\overline{\mathfrak{A}} \cong \overline{\mathfrak{D}'} \times \overline{\mathfrak{M}'} \cong \overline{\mathfrak{D}} \times \overline{\mathfrak{M}}, \text{ da cui } \overline{\mathfrak{M}'} \cong \overline{\mathfrak{M}}, \text{ e quindi } \mathfrak{M}' \cong \mathfrak{M};$$

ed allora per lo stesso teorema sopra ricordato, è anche  $\mathfrak{D}' \cong \mathfrak{D}$ .

Se  $\mathfrak{D}$  ed  $\mathfrak{M}$  hanno basi di potenza numerabile, allora  $\mathfrak{A}$  ha base di potenza numerabile, e quindi [2] la sua fattorizzazione è unica.

Sufficienza: da  $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^{-1}$  segue  $\mathfrak{A} \cong (\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^{-1}) \times \mathfrak{D}$ ; ma  $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^{-1} \in \{\mathfrak{H}\}$ , e  $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{D}$ , c. v. d.

Resta quindi nella teoria una lacuna, consistente nella incertezza riguardo alla possibilità di fattorizzazione di ogni algebra semplice di tipo I speciale in una divisoria di tipo I ed una regolare di tipo I.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BARSOTTI, *Ricerche sopra le algebre divisorie di tipo I, e sopra le algebre divisorie non algebriche* (in corso di stampa nei « Rend. Semin. Mat. Univ. Roma »).
- [2] KÖTHE, *Schiefkörper unendlichen ranges über dem Zentrum* (« Math. Ann. », 105, p. 15, 1931).

**Matematica.** — *Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari* (\*). Nota IV (\*\*) di S. FAEDO, presentata dal Socio M. PICONE.

#### PARTE III. — L'EQUAZIONE CARATTERISTICA HA RADICI MULTIPLE

ED È  $a_n = 0$ ,  $b \neq 0$ .

##### 1. Risultati della Parte III.

Rimane ancora da considerare il caso in cui sia  $b \neq 0$  e fra le radici (multiple) della equazione caratteristica vi sia lo zero. A ciò risponde il

TEOREMA XVI. — *Se l'equazione caratteristica (I) ha le radici distinte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ , degli ordini rispettivi di molteplicità  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$ , con*

*$\sum_{s=1}^q \nu_s = n$ , e detto  $\nu$  il massimo fra gli interi  $\nu_s$  è*

$$\alpha') \int_{x_0}^{+\infty} x^{\nu-1} |\varphi_i(x)| dx < +\infty, \quad \int_{x_0}^{+\infty} x^{\nu-1} |\varphi(x)| dx < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(2) Il meccanismo completo di questa deduzione è il seguente: nell'isomorfismo  $\sigma$  fra  $(\mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}'^{-1}) \times \mathfrak{M}'$  e  $\mathfrak{H} = (\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^{-1}) \times \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}'^{-1}$  viene trasformata in una sub-algebra  $\mathfrak{N}$  di  $\mathfrak{H}$ ;  $\mathfrak{N}$  e  $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^{-1}$ , essendo certo contenute in una opportuna sub-algebra regolare a base finita di  $\mathfrak{H}$ , sono isomorfe in un autoisomorfismo interno di essa, e quindi di  $\mathfrak{H}$ ; il prodotto di tale autoisomorfismo per  $\sigma$  trasforma appunto  $\mathfrak{M}'$  in  $\mathfrak{M}$ .

(\*) Le Note I, II e III sono inserite nei fascicoli precedenti di questi « Rendiconti ».

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1947.

allora se una delle  $\tilde{\lambda}_i$  è nulla ed è  $b \neq 0$  le equazioni non omogenee (2) e (3) non possiedono integrali stabili.

La dimostrazione di questo teorema si fonda su un lemma, per ottenere il quale mi è stato di grande utilità un bel risultato della teoria delle funzioni quasi-periodiche.

Indicati ancora con  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  gli spazi lineari che rappresentano gli integrali stabili delle equazioni

$$(2) \quad E(a_i, \varphi_i; y) = y^{(n)} + \sum_{i=1}^n [a_i + \varphi_i(x)] y^{(n-i)} = b + \varphi(x),$$

$$(3) \quad E(a_i, 0; y) = b$$

e ricordando che l'equazione caratteristica è

$$(1) \quad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

si possono riassumere i Teoremi I, X e XVI nel seguente, che dà una risposta completa al problema posto nella Nota I.

TEOREMA XVII. — Se è soddisfatta la condizione  $\alpha')$ , gli spazi lineari  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  hanno sempre la stessa dimensione  $r$  ( $-1 \leq r \leq n$ , ed è  $r = -1$  quando sia simultaneamente  $a_n = 0$ ,  $b \neq 0$ , mentre in ogni altro caso  $r$  è uguale alla somma delle molteplicità delle radici della equazione caratteristica (1) a parte reale negativa più il numero di quelle distinte a parte reale nulla).

In questo enunciato  $r = -1$  ed  $r = 0$  indicano rispettivamente lo spazio vuoto e quello costituito di un solo elemento.

Nella III Nota (n. 5) ho dato la disuguaglianza (32), rinviando per la dimostrazione ad un altro mio lavoro. Ho ritenuto opportuno, in una APPENDICE alla presente Nota, di darne una dimostrazione assai semplice, bastando, ai fini della attuale ricerca, che la (32) sussista per  $x \geq X$ , con  $X$  abbastanza grande.

2. LEMMA V. — Se l'equazione caratteristica (1) ha  $\tilde{\lambda} = 0$  come radice  $m^{upla}$  e  $y(x)$  è un integrale dell'equazione omogenea

$$(4) \quad E(a_i, \varphi_i; y) = 0,$$

fissata una costante  $K \neq 0$  si può sempre costruire una successione  $\{x_p\}$ , con  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = +\infty$ , per cui è

$$(4I) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} |x_p^{-m} y(x_p) + K| > 0.$$

L'integrale  $y(x)$  è una combinazione lineare a coefficienti costanti degli integrali

$$(5') \quad y_{\tau_i+j}(x) \quad [\tau_i = 0; \tau_i = \nu_i + \dots + \nu_{i-1}; j = 1, 2, \dots, \nu_i; i = 1, 2, \dots, p],$$

le cui proprietà asintotiche sono espresse dalle (6'') [Teorema XII, Nota II].

a) Dalle (6'') segue che per  $x \rightarrow +\infty$

$$y_{\tau_i+j}(x) \begin{cases} \text{stabile} & \text{se } R\zeta_i < 0, \\ \text{infinito dell'ordine di } x^{j-1} e^{R\zeta_i x} & \text{» } R\zeta_i > 0, \\ \text{infinito d'ordine } j-1 \leq m-1 & \text{» } R\zeta_i = 0, j \leq m. \end{cases}$$

Se  $y(x)$  fosse una combinazione lineare di  $y_{\tau_i+j}(x)$  di questi soli tipi, sarebbe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x^{-m} y(x) + K| = \begin{cases} +\infty \\ |K|, \end{cases}$$

a seconda che vi siano o meno in  $y(x)$  degli  $y_{\tau_i+j}(x)$  con  $R\zeta_i > 0$ . In tal caso la (41) è dimostrata (1).

b) Indichiamo con  $Y_j(x)$  la eventuale parte di  $y(x)$  dovuta a tutti gli  $y_{\tau_i+j}(x)$  con  $R(\zeta_i) = 0$  e aventi lo stesso  $j > m$ .

Dimostriamo che si può determinare una successione  $\{x_p\}$ , con  $x_p \rightarrow +\infty$ , per cui esistono finiti e diversi da zero i limiti

$$(42) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} x_p^{-m} Y_{m+1}(x_p) + K, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} x_p^{1-j} Y_j(x_p) \quad (j \geq m+2),$$

escludendo naturalmente quei valori di  $j \geq m+1$  per cui  $Y_j(x)$  fosse identicamente nulla.

Per la (6'') è

$$y_{\tau_i+j}(x) = x^{j-1} e^{\lambda_{\tau_i+j} x} [1 + \lambda_{\tau_i+j}(x)], \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_{\tau_i+j}(x) = 0.$$

Essendo

$$Y_j(x) = \sum_s c_{s,j} y_{\tau_s+j}(x),$$

dove le  $c_{s,j}$  sono costanti ed  $s$  assume tutti i valori per cui è  $R(\zeta_s) = 0$  e  $\nu_s \geq j > m$ , si ha

$$x^{1-j} Y_j(x) = \sum_s c_{s,j} e^{i\sigma_s x} [1 + \lambda_{\tau_s+j}(x)], \quad i\sigma_s = \mathfrak{I}(\zeta_s) = \zeta_s.$$

Per dimostrare le (42) basta quindi determinare  $\{x_p\}$  in modo che esistano e siano diversi da zero i limiti

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_s c_{s,m+1} e^{i\sigma_s x_p} + K, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_s c_{s,j} e^{i\sigma_s x_p} \quad (j \geq m+2).$$

Poichè le funzioni

$$F_{m+1}(x) = \sum_s c_{s,m+1} e^{i\sigma_s x} + K, \quad F_j(x) = \sum_s c_{s,j} e^{i\sigma_s x} \quad (j \geq m+2)$$

(1) Ciò accade, ad esempio, se l'equazione caratteristica ha radici tutte distinte. In tale caso particolare la dimostrazione del Lemma V è immediata; perciò la dimostrazione del Teorema XVI, nel caso particolare delle radici tutte distinte, è forse più semplice di quella del Teorema VII (Nota II). Questa ha però il vantaggio di essere più diretta e di far vedere chiaramente il significato e il contributo di ognuna delle ipotesi fatte.



sono analitiche e non identicamente nulle si può fissare un valore  $\bar{x}$  in cui esse sono tutte non nulle.

Le  $F_j(x)$  ( $j \geq m+1$ ) sono inoltre funzioni *quasi-periodiche* di  $x$  <sup>(2)</sup>. Perciò, fissato  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, si può trovare una lunghezza  $l(\varepsilon)$  tale che ogni intervallo dell'asse  $x$  di lunghezza  $l(\varepsilon)$  contenga almeno un quasi-periodo relativo ad  $\varepsilon$  e comune a tutte le funzioni  $F_j(x)$  <sup>(3)</sup>.

Per ogni intero  $p$  consideriamo l'intervallo dell'asse  $x$  di estremi  $p$ ,  $p + l\left(\frac{1}{p}\right)$ . Se  $\mu_p$  è il minimo quasi-periodo in esso contenuto, poniamo

$$x_p = \bar{x} + \mu_p.$$

Ne segue

$$|F_j(x_p) - F_j(\bar{x})| \leq \frac{1}{p}$$

e quindi

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F_j(x_p) = F_j(\bar{x}) \neq 0, \quad j \geq m+1.$$

Sono così dimostrate le (42) <sup>(4)</sup>.

c) Supponiamo che fra le componenti di  $y(x)$  vi sia almeno un  $y_{\tau+j}(x)$  con  $R(\zeta_i) = 0$ ,  $j > m$ .

Allora se vi sono in  $y(x)$  degli  $y_{\tau+j}(x)$  con  $R(\zeta_i) > 0$  oppure degli  $Y_j(x)$  [v. b)] con  $j > m+1$ , per le (42) il limite (41) è  $+\infty$ . Tale limite è invece finito e  $> 0$  se in  $y(x)$  non vi è alcuna  $y_{\tau+j}(x)$  con  $R(\zeta_i) > 0$  mentre vi è la  $Y_{m+1}(x)$  e nessuna  $Y_j(x)$  con  $j > m+1$ .

Si noti che nel precedente ragionamento le varie parti in cui si è scomposto  $y(x_p)$ , e che tendono all' $\infty$  per  $p \rightarrow +\infty$ , hanno ordini d'infinito tutti diversi fra loro; quindi la loro somma  $y(x_p)$  è infinita dell'ordine maggiore fra questi.

Il Lemma V è così dimostrato.

(2) Una funzione  $f(x)$ , reale o complessa, della variabile reale  $x$ , definita e continua per  $-\infty < x < +\infty$ , si dice *quasi-periodica* quando ad ogni  $\varepsilon > 0$  arbitrario si può far corrispondere una lunghezza  $l(\varepsilon) > 0$ , tale che ogni intervallo dell'asse  $x$  di lunghezza  $l(\varepsilon)$  contenga almeno un punto di ascissa  $\mu$ , per cui è qualunque sia  $x$

$$|f(x + \mu) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Il numero  $\mu$  si dice un *quasi-periodo* di  $f(x)$  relativo ad  $\varepsilon$ .

La somma di un numero finito di funzioni periodiche è una funzione quasi-periodica. Cfr. J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1933, pp. 6-7.

(3) Cfr. J. FAVARD, loc. cit. in (2), pp. 4-6.

(4) La costruzione della successione  $\{x_p\}$ , invece di ricorrere alla teoria delle funzioni quasi-periodiche, si potrebbe effettuare tenendo conto della periodicità delle funzioni  $e^{i\sigma x}$  e del fatto che i  $q$  numeri reali  $\sigma_s$  si possono approssimare con infinite frazioni  $\frac{m_s}{n}$  tali che sia

$$\left| \sigma_s - \frac{m_s}{n} \right| < \frac{1}{n^{1+1/q}}$$

cfr. J. F. KOKSMA, *Diophantische Approximationen* « Ergebnisse der Math. ». Berlin, 1936, p. 7.

3. *Dimostrazione del Teorema XVI.*a) sia  $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-m+1} = 0$ ,  $a_{n-m} \neq 0$ .

Fatto il cambiamento di variabile

$$y = Y + \frac{b}{a_{n-m} \cdot m!} x^m,$$

la (2) si muta nella equazione differenziale in Y

$$(2') \quad E(a_i, \varphi_i; Y) = \Phi(x),$$

con

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \frac{b}{a_{n-m}} \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!} \varphi_{n-i-m}(x).$$

b) *Dimostriamo che l'equazione (2') possiede almeno un integrale  $Y^*(x)$  per cui è*

$$(43) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-m} Y^*(x) = 0.$$

Dalle  $\alpha'$ ) segue che è

$$(44) \quad \int_{x_0}^{\infty} x^{v-m-1} |\Phi(x)| dx < +\infty.$$

Poniamo

$$Y^*(x) = \sum_{i=1}^0 \sum_{j=1}^{v_i} c_{\tau_i+j}(x) y_{\tau_i+j}(x)$$

essendo, con le notazioni già usate nel Teorema XV (Nota III),

$$c_{\tau_i+j}(x) = \begin{cases} -\int_{x_i}^{+\infty} e^{-\zeta_i x} \Phi(x) \frac{\Delta_{\tau_i+j}}{\Delta} dx, & \text{per } R_{\zeta_i} > 0 \quad e \quad \begin{cases} R(\zeta_i) = 0 \\ j \geq m+1; \end{cases} \\ \int_{x_i}^{x_i} e^{-\zeta_i x} \Phi(x) \frac{\Delta_{\tau_i+j}}{\Delta} dx, & \text{per } R_{\zeta_i} < 0 \quad e \quad \begin{cases} R(\zeta_i) = 0 \\ j \leq m. \end{cases} \end{cases}$$

È

$$(45) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-m} c_{\tau_i+j}(x) y_{\tau_i+j}(x) = 0.$$

Infatti sia  $R_{\zeta_i} > 0$  oppure  $R(\zeta_i) = 0$  e  $j \geq m+1$ ; per  $x$  abbastanza grande è (Teoremi XIII-XV)

$$\begin{aligned} x^{-m} |c_{\tau_i+j}(x) y_{\tau_i+j}(x)| &< K x^{j-m-1} e^{R_{\zeta_i} x} \int_x^{+\infty} e^{-R_{\zeta_i} x} x^{v-1} |\Phi(x)| dx \leq \\ &\leq K \int_x^{+\infty} x^{v-m-1} |\Phi(x)| dx \end{aligned}$$

e, per la (44), segue la (45).

Se è  $R\tilde{\chi}_i < 0$  oppure  $R\tilde{\chi}_i = 0$  con  $j \leq m$ , allora fissato  $x_{\tau_i+j}$  abbastanza grande è

$$\begin{aligned} x^{-m} |\varphi_{\tau_i+j}(x) \gamma_{\tau_i+j}(x)| &\leq K x^{i-m-1} e^{R\tilde{\chi}_i x} \int_{x_{\tau_i+j}}^x e^{-R\tilde{\chi}_i x} x^{v-j} |\Phi(x)| dx \leq \\ &\leq K \frac{1}{x} \int_{x_{\tau_i+j}}^x x \cdot x^{v-m-1} |\Phi(x)| dx \end{aligned}$$

e questa espressione  $\rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow +\infty$  per la (44) e il Lemma IV, Nota III.

È così dimostrata la (45), da cui segue che  $Y^*(x)$  soddisfa alla (43).

c) Se  $\bar{y}(x)$  è un qualunque integrale della (2) si può trovare un integrale  $y(x)$  dell'equazione omogenea (4) in modo che sia

$$\bar{y}(x) = y(x) + \frac{b}{a_{n-m} \cdot m!} x^m + Y^*(x).$$

Posto  $K = \frac{b}{a_{n-m} \cdot m!} \neq 0$ , è

$$\bar{y}(x) = x^m [x^{-m} y(x) + K + x^{-m} Y^*(x)].$$

Per il Lemma V e per quanto si è dimostrato in b) è

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} |x_p^{-m} y(x_p) + K + x_p^{-m} Y^*(x_p)| > 0$$

e quindi

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} |\bar{y}(x_p)| = +\infty,$$

che prova che  $\bar{y}(x)$  non è stabile.

Il teorema XVI è così dimostrato.

#### APPENDICE. - DIMOSTRAZIONE DELLA (32), NOTA III, N. 5.

Proviamo dapprima la (32) per  $m = 1$ . Da (27) segue

$$(46) \quad |P_{1, \tau_i+j}| \leq \sum_{r=1}^n \varphi_r |\eta_{10, \tau_i+j}^{(n)}|.$$

Poniamo

$$A_{m, \tau_k+t, \tau_i+j}^{(i)} = x^{i-j} e^{-\tilde{\chi}_i x} \eta_{0, \tau_k+t, \tau_i+j}^{(i)}.$$

Se  $\tau_k + t$  appartiene alla prima classe rispetto a  $\tau_i + j$  e se per  $R\tilde{\chi}_k = R\tilde{\chi}_i$  è anche  $t \leq j - 2$ , per  $x$  abbastanza grande  $|x^{2-j} e^{-\tilde{\chi}_i x} \eta_{0, \tau_k+t}^{(i)}|$  è decrescente. Perciò per (31') e la definizione di  $C$  è:

$$(47) \quad |A_{1, \tau_k+t, \tau_i+j}^{(i)}| \leq \frac{1}{x} \int_X^x |e^{-(\tau_i+\tau_k)x} \eta_{0, \tau_k+t}^{(i)} x^{2-j} Q_{\tau_k+t}| \sum_{r=1}^n |\varphi_r| |\eta_{0, \tau_i+j}^{(n-r)}| dx \leq \\ \leq \frac{C}{x} \sum_{r=1}^n \int_X^x x^v |\varphi_r| dx = F(x) \leq N(x).$$

Se  $\tau_k + t$  appartiene alla seconda classe rispetto a  $\tau_i + j$  e se per  $R\tau_k = R\tau_i$  è  $t \geq j + 1$ , per  $x$  abbastanza grande  $|x^{1-j} e^{-\tau_i x} \eta_{0, \tau_k+t}^{(i)}|$  è crescente. Perciò, come per la (47) si ottiene da (31'')

$$(48) \quad |A_{1, \tau_k+t, \tau_i+j}^{(i)}| \leq M(x) \leq N(x).$$

Se è  $R\tau_k = R\tau_i$  e  $t = j - 1$  si possono determinare  $C_1$  e  $C_2$ , con  $C_1 \cdot C_2 \leq C$  tali che sia per  $x$  abbastanza grande

$$e^{-R\tau_k x} |\eta_{0, \tau_k+t}^{(i)}| \leq C_1 x^{t-1}, \quad e^{-R\tau_i x} |\eta_{0, \tau_i+j}^{(r)} Q_{\tau_k+t}| \leq C_2 x^{v+1-t-1}.$$

Perciò è

$$|x^{1-j} e^{-\tau_i x} \eta_{0, \tau_k+t}^{(i)}| \int_X^x e^{-R\tau_k x} |\eta_{0, \tau_i+j}^{(r)} Q_{\tau_k+t}| |\varphi_{n-r}| dx \leq \frac{C}{x} \int_X^x x^v |\varphi_{n-r}| dx,$$

da cui segue ancora la (47). Se  $R\tau_k = R\tau_i$  e  $t = j$  si ottiene ancora la (48) in modo analogo. In ogni caso è quindi  $|A_{1, \tau_k+t, \tau_i+j}^{(i)}| \leq N(x)$  e, per (28), è provata la (32) per  $m = 1$ .

Ammettiamo la (32) per  $m = m_1 - 1$  e proviamola per  $m = m_1$ .

Da (32) e (27) essendo  $N(x) \leq M(X)$  segue

$$|P_{m_1, \tau_i+j}| \leq [nM(X)]^{m_1-1} \cdot \sum_{r=1}^n |\varphi_r| \cdot x^{j-1} e^{R\tau_i x}.$$

Ragionando come si è fatto per ottenere le (47) e (48), sostituendo soltanto alla (46) l'ultima disuguaglianza scritta, si ricava  $|A_{m_1, \tau_k+t, \tau_i+j}^{(i)}| \leq N(x) [nM(X)]^{m_1-1}$  da cui, per la (28), segue la (32) per  $m = m_1$ , intendendosi sempre  $x \geq X$ , con  $X$  abbastanza grande.

*Osservazione.* - Per comodità del lettore avverto che la convergenza uniforme (per  $x \geq X$  in ogni intervallo finito) della serie  $\sum_{m=1}^{\infty} f_{m, \tau_k+t, \tau_i+j}$  (considerata nel n. 6 Nota III) segue pure immediatamente dall'ultima disuguaglianza scritta per dimostrare la (35).



**Matematica.** — *Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata.* Nota (\*) di G. TREVISAN, presentata dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI.

La teoria delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata è stata sviluppata da Brouwer (1).

In detta teoria fondamentali sono i seguenti due teoremi di Brouwer:

A) *Una traiettoria di una traslazione piana generalizzata è una linea semplice;*

B) *Una curva  $\alpha$  semplice ed aperta taglia la propria immagine in una traslazione piana generalizzata, se esiste un tale arco di traiettoria che abbia gli stessi estremi di  $\alpha$ , formi con  $\alpha$  una curva semplice chiusa, contenga nell'interno un arco di traslazione.*

Questi due teoremi si possono oggi dimostrare indipendentemente da ogni altra proprietà delle traiettorie, ricorrendo a criteri di esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio.

Ghezzi (2), usando dei due teoremi A) e B) ha ritrovato quasi tutti i risultati fondamentali di Brouwer sulle traiettorie.

In questa Nota mi propongo di apportare un ulteriore contributo facendo vedere come dai teoremi A) e B) si possa dedurre il seguente altro teorema di Brouwer:

**TEOREMA I.** — *I punti del piano, che non appartengono ad una traiettoria  $\sigma$  e che possono essere congiunti a  $\sigma$  con una curva semplice ed aperta avente su  $\sigma$  soltanto un estremo si distribuiscono in due insiemi aperti.*

Sia  $t$  una traslazione generalizzata,  $\lambda$  un arco di traslazione,  $\sigma(\lambda)$  la traiettoria generata da  $\lambda$ ,  $\sigma_i(\lambda)$  e  $\sigma_f(\lambda)$  le due semitrazie in cui  $\sigma(\lambda)$  è decomposta da un suo punto,  $P$ , origine delle semitrazie,  $I_i$  ed  $I_f$  gli insiemi (notoriamente chiusi) dei punti di accumulazione di  $\sigma_i(\lambda)$  e  $\sigma_f(\lambda)$ , non contenuti in  $\sigma(\lambda)$ ; allora, escluso che  $I_i + I_f$  sia vuoto perchè in tal caso il teorema I) è banale, si riconosce che detto teorema è equivalente al seguente:

**TEOREMA II.** — *Una curva semplice aperta  $\alpha$ , di cui un estremo  $P$  appartenga alla traiettoria  $\sigma(\lambda)$  di  $t$ , di cui l'altro estremo  $Q$  appartenga ad  $I_i + I_f$ , e che non contenga altri punti di  $I_i + I_f$ , ha almeno un punto interno in comune con  $\sigma(\lambda)$ .*

1. Premetto il lemma:

(\*) Pervenuta all'Accademia il 15 agosto 1947.

(1) L. E. J. BROUWER, *Beweis des ebenen translationssatzes*. «Math. Ann.», 1912, vol. 72, pp. 37-54.

(2) S. GHEZZO, *Sulla teoria delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata*. [In corso di stampa nei « Rendiconti del Seminario Matematico di Padova »].

*Detta  $\alpha$  una curva semplice aperta di estremi  $P$  e  $Q$  se*

$$P \subset \sigma(\lambda),$$

$$Q \subset I_f + I_i,$$

e se

$$(\alpha - P) \cdot \sigma(\lambda) = 0$$

*allora  $\alpha$  e la sua immagine  $t(\alpha)$  hanno punti comuni.*

Non sarà restrittivo supporre ulteriormente

$$(\alpha - Q)(I_i + I_f) = 0,$$

e per fissare le idee

$$Q \subset I_f.$$

Ragionando per assurdo, se fosse

$$\alpha \cdot t(\alpha) = 0,$$

si potrebbe determinare un cerchietto  $\Gamma$  di centro  $Q$ , tale da aversi

$$J \cdot t(J) = 0$$

se  $J$  è l'insieme formato con i punti di  $\alpha$  ed i punti di  $\Gamma$ ; ed allora, prolungata  $\alpha$  in  $\Gamma$ , in modo da incontrare  $\sigma_f(\lambda)$  (e ciò sarebbe possibile per l'appartenenza di  $Q$  ad  $I_f$ ), la curva prolungata  $\alpha'$  in quanto formata con punti di  $J$  non incontrerebbe la propria immagine.

Ora  $\Gamma$  si potrebbe supporre così piccolo da non contenere punti dell'arco di  $\sigma(\lambda)$  di estremi  $P$  e  $t(P)$ ; e ciò per il teorema B) porterebbe alla

$$\alpha' \cdot t(\alpha') = 0.$$

E si cadrebbe così in contraddizione.

2. Dimostro ora il teorema II.

Se il teorema non è vero, riesce

$$(1) \quad \alpha \cdot \sigma(\lambda) = P$$

e per il lemma,

$$\alpha \cdot t(\alpha) \neq 0.$$

(Nella figura  $\alpha$  è la curva contenente i punti  $P, V, R, S, P_1, Q$ ). I punti  $t(Q)$  e  $t^{-1}(Q)$  non appartengono ad  $\alpha$ . Infatti, se  $t(Q) = P$ ,  $Q$  apparterebbe a  $\sigma_f(\lambda)$ , contro l'ipotesi  $Q \subset I_f$ ; se  $t(Q) = Q$ ,  $Q$  sarebbe unito, mentre  $t$  è una traslazione piana generalizzata; se  $t(Q)$  fosse interno ad  $\alpha$ , poichè dalla  $Q \subset I_f$  segue  $t(Q) \subset I_f$ , si andrebbe contro un'ipotesi del teorema. Analogamente per  $t^{-1}(Q)$ . Ne segue <sup>(3)</sup> che esiste uno (ed uno solo) pseudoarco di

(3) La cosa è evidente e l'osservazione risale a BROUWER si veda anche G. SCORZA DRAGONI, *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane*. [«Memorie Acc. d'Italia», vol. IV (1933), pp. 159-212, n. 16]; le parti di proposizioni di questa Memoria che vengono da me sfruttate in questa Nota sono indipendenti dal concetto di campo adiacente ad una traiettoria.

traslazione  $\tau$  di origine  $Q$ , giacente su  $\alpha$ . Se  $R$  è l'estremo di  $\tau$  diverso da  $Q$ ,  $\tau$  contiene uno ed un solo arco di traslazione  $\mu^{(4)}$ , i cui estremi sono o  $R$  e  $t(R)$  o  $R$  e  $t^{-1}(R)$ . Di qui si trae in particolare che  $R$  è diverso da  $P$ , perchè altrimenti l'intersezione di  $\alpha$  e  $\sigma(\lambda)$  conterrebbe, oltre a  $P$ , anche uno almeno dei due punti  $t(P) = t(R)$  e  $t^{-1}(P) = t^{-1}(R)$ .

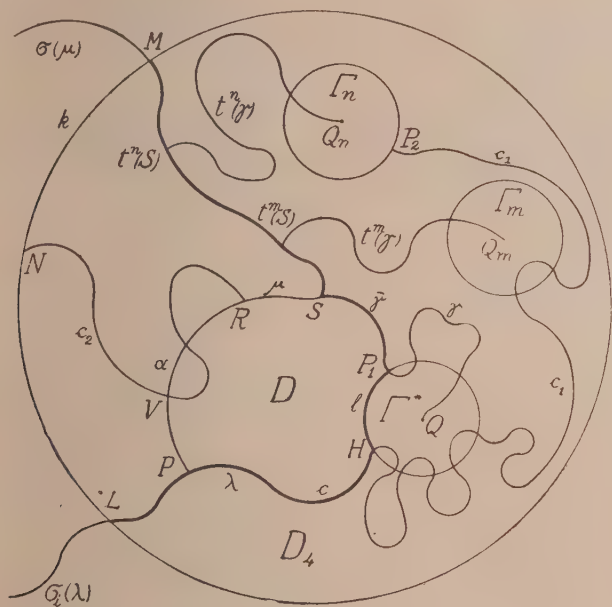


Fig. 1.

Detto  $S$  l'estremo di  $\mu$  diverso da  $R$  di guisa che risulta  $S \neq P$  ed  $S \neq Q$ , il sottoarco  $\gamma$  di  $\alpha$ , di estremi  $S$  e  $Q$  non ha punti in comune con la propria immagine, e quindi è anche, a norma di risultati noti<sup>(5)</sup>:

$$(2) \quad t^n(\gamma) \cdot t^m(\gamma) = 0, \quad \text{per } n \neq m; n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e in più può essere determinato un cerchio  $\Gamma^*$  di centro  $Q$  così piccolo da non avere punti in comune con nessuna delle curve  $t^n(\gamma)$ ,  $n \geq 0$ , cioè tale che

$$(3) \quad \Gamma^{*, \cdot} t^n(\gamma) = 0, \quad n \geq 0,$$

e tale che

$$(4) \quad (\alpha - \gamma) \cdot \Gamma^* = 0.$$

(4) Per questa e per le altre affermazioni che seguono si veda per esempio il § 5 della Memoria citata in (3).

(5) E. SPERNER, *Ueber die fixpunktfreie Abbildungen der Ebene*. [*Hamburger Mathematische Einzelschriften*], 14 Heft; od anche «*Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*», vol. 10 (1934) pp. 1-47].

• H. TERASAKA, *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen translations satzes*. [« Japanese Journal of Mathematics », Tokyo, 1930, vol. VII, n. 1, pp. 61-69].

S. GHEZZO, loc. cit. in (2), n. 6.

La traiettoria  $\sigma(\mu)$ , generata da  $\mu$ , verifica la

$$(5) \quad \sigma(\mu) \cdot \sigma(\lambda) = 0$$

perchè in caso contrario sarebbe anche

$$\mu \cdot \sigma(\lambda) \neq 0$$

e quindi  $(\alpha - P) \cdot \sigma(\lambda) \neq 0$  contro la (1).

Dimostro ora che:

a) Il punto  $Q$  non è di accumulazione per  $\sigma(\mu)$  e quindi si può supporre, il cerchio  $\Gamma^*$  così piccolo da soddisfare oltre alle (3) e (4) anche alla condizione di non avere punti comuni con  $\sigma(\mu)$ ;

$$(6) \quad \Gamma^* \cdot \sigma(\mu) = 0$$

infatti in caso contrario, poichè  $(\gamma - S) \cdot \sigma(\mu) = 0$  <sup>(6)</sup>, applicando il lemma alla curva  $\gamma$  ed alla traiettoria  $\sigma(\mu)$  otterrei  $\gamma \cdot t(\gamma) \neq 0$ , contro la (2).

Detto  $H$  il primo punto in cui  $\sigma_f(\lambda)$ , percorsa a partire da  $P$  incontra  $\Gamma^*$ , indico con  $D$  il dominio limitato il cui contorno è la curva semplice chiusa  $g = \bar{\alpha} + c + l$ , dove:

$\bar{\alpha}$  è la curva semplice aperta di  $\alpha$ , di cui  $P$  è un estremo e di cui l'altro estremo  $P_1$  è il primo punto in cui  $\alpha$  incontra  $\Gamma^*$ ;  $c$  è la curva di  $\sigma(\lambda)$  di estremi  $P$  ed  $H$ ;  $l$  rappresenta quello dei due archi di estremi  $P_1$  ed  $H$  del contorno di  $\Gamma^*$  tale che  $Q$  risulti esterno al dominio di contorno  $\bar{\alpha} + c + l$  (in definitiva  $Q$  risulta esterno al dominio  $D$ ).

Per note proprietà delle immagini iterate di un punto <sup>(7)</sup> posso determinare due interi  $n > 0$  ed  $m < 0$  tali che

b)  $Q_n = t^n(Q)$  e  $Q_m = t^m(Q)$  non appartengano a  $D$ .

Dalla  $Q \subset I_f$  segue  $Q_n \subset I_f$  e  $Q_m \subset I_f$  e quindi giusta la  $I_i \cdot I_f = 0$  <sup>(8)</sup>  $Q_n$  e  $Q_m$  non sono di accumulazioni per  $\sigma_i(\lambda)$  ed inoltre poichè  $Q$  non è di accumulazione per  $\sigma(\mu)$  non lo sono neppure  $Q_n$  e  $Q_m$ . Quindi riuscirò a determinare due cerchi  $\Gamma_n$  e  $\Gamma_m$ , rispettivamente di centri  $Q_n$  e  $Q_m$  soddisfacenti alle condizioni:

$$(7) \quad \Gamma_n \cdot \Gamma_m = 0$$

$$(8) \quad (\Gamma_n + \Gamma_m) \cdot (\sigma(\mu) + \Gamma^n + D) = 0$$

$$(9) \quad (\Gamma_n + \Gamma_m) \cdot \sigma_i(\lambda) = 0.$$

Dalla (8) segue in particolare  $c \cdot (\Gamma_n + \Gamma_m) = 0$  e quindi che

c) la semitraiettoria  $\sigma_f(\lambda)$  percorsa a partire da  $P$  incontra prima  $\Gamma^*$  e poi in un certo ordine  $\Gamma_n$  e  $\Gamma_m$ .

(6) Loc. cit. (5), n. 25).

(7) Per esempio S. GHEZZO, loc. cit. n. 5.

(8) S. GHEZZO, loc. cit., § 2.



Chiamo  $c_1$  la sottocurva di  $\sigma_f(\lambda)$  di estremo P, che contiene,  $c_1$  incontra uno dei due cerchi  $\Gamma_n$  e  $\Gamma_m$  e poi incontra l'altro per la prima volta col suo secondo estremo  $P_2$ .

Sia K un cerchio che contenga nel suo interno  $c_1$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $t^n(\gamma)$ ,  $t^m(\gamma)$ ,  $\Gamma^*$ ,  $\Gamma_n$  e  $\Gamma_m$ .

Detto  $k$  il contorno di K, sia L il primo punto in cui  $\sigma_i(\lambda)$ , percorsa a partire da P, incontra  $k^{(9)}$ ; e siano N ed M i punti in cui  $\sigma(\mu)$ , percorsa a partire da  $\mu$  rispettivamente nell'uno e nell'altro verso incontra per la prima volta  $k$ .

Chiamo  $c_2$  la curva semplice aperta di  $\sigma(\mu)$  di estremi N ed M; tale curva e  $k$  dividono K in due insiemi  $D_1$  e  $D'_1$ , semplicemente connessi, uno dei quali e sia  $D_1$  non contiene per la (5) punti di  $c_1$ ; e di conseguenza per la (6) e la (8),  $D'_1$  contiene oltre a  $c_1$ ,  $\Gamma^*$ ,  $\Gamma_n$  e  $\Gamma_m$ . Percorsa  $\alpha$  a partire da P si incontra  $c_1$  in un primo punto V e sia  $\delta$  la curva di  $\alpha$  di estremi P e V. Indico con  $\epsilon$  la curva di  $\sigma_i(\lambda)$  di estremi L e P. La curva semplice aperta  $\epsilon \dot{+} \delta$  appartiene a  $D'_1$ , anzi divide  $D'_1$  in due insiemi semplicemente connessi  $D_2$  e  $D'_2$ .

Sia  $D'_2$  quello che contiene per intero  $c_1$ , esso conterrà allora completamente, per le (4), (8) e (9),  $\Gamma^*$ ,  $\Gamma_n$  e  $\Gamma_m$ .

La curva semplice aperta  $\bar{\gamma} \dot{+} l \dot{+} c_1$  ove  $\bar{\gamma}$  è la curva di  $\gamma$  di estremi S e  $P_1$ , è contenuta in  $D'_2$ , e divide  $D'_2$  in due insiemi semplicemente connessi  $D_3$  e  $D_4$ .

Sia  $D_3$  quello dei due domini che rispetto a  $\bar{\gamma} \dot{+} l \dot{+} c_1$  giace dalla stessa banda di D. Esso allora non contiene  $\Gamma_n$  e  $\Gamma_m$ .

Infatti se  $\Gamma_n$ , ad esempio, appartenesse a  $D_3$  ( $\Gamma_n$  ed il contorno di  $D_3$  non hanno punti comuni),  $\sigma_f(\lambda)$  per raggiungere  $\Gamma_n$ , dovrebbe ad un certo punto trovarsi in D, in quanto  $c$  fa parte del contorno di D e  $\sigma_f(\lambda)$  da  $D_4$  può penetrare in  $D_3$  solo attraverso ad  $l$ , che fa pure parte del contorno di D; ma poichè  $D \cdot \Gamma_n = 0$ ,  $\sigma_f(\lambda)$  per raggiungere  $\Gamma_n$  sarebbe poi costretta ad uscire da D, il che può fare solo attraverso ad  $l$  pervenendo così in  $D_4$ .

Ma allora preso in esame il contorno di  $D_4$ , per le (2), (3), (5) si vede che  $D_4$  oltrechè contenere  $Q_n$  e  $Q_m$  contiene per intero  $t^n(\gamma)$  e  $t^m(\gamma)$  e quindi gli estremi  $t^n(S)$  e  $t^m(S)$  di dette curve, tali estremi sono dunque situati sull'arco di  $\sigma(\mu)$  di estremi M (oppure N) ed S (in figura il contorno di  $D_4$  è segnato più in grosso).

Così si è pervenuti ad un assurdo perchè percorrendo  $\sigma(\mu)$  a partire da M (od N) si incontrano  $t^n(S)$ ,  $t^m(S)$  ed S nell'ordine scritto (oppure nell'ordine  $t^m(S)$ ,  $t^n(S)$  ed S) con  $n > 0$  ed  $m < 0$ .

(9)  $\sigma_i(\lambda)$  incontra  $k$ , perchè una semitraiettoria non può essere contenuta in un dominio limitato.

**Matematica.** — *Sulle trasformazioni singolari di un gruppo continuo e finito e sulle trasformazioni, che non posseggono parametri canonici.* Nota<sup>(\*)</sup> di A. FINZI, presentata dal Socio U. AMALDI.

1. È ben noto che, in un gruppo continuo e finito  $G_r$ , ogni trasformazione sufficientemente prossima alla trasformazione identica appartiene a un sottogruppo  $g_1$ , in altri termini è possibile attribuire un sistema di parametri canonici ad ogni siffatta trasformazione.

La stessa proprietà non vale però necessariamente per ogni trasformazione finita del gruppo, come hanno mostrato per primi Engel e Study<sup>(1)</sup>, mediante l'esempio di un gruppo particolare.

Cartan<sup>(2)</sup> ha posto in luce la relazione che passa fra le trasformazioni prive di parametri canonici e le trasformazioni singolari<sup>(3)</sup> di un gruppo.

Supponiamo di aver congiunto, nella varietà rappresentativa di  $G_r$ , la trasformazione identica con una trasformazione finita  $T$  mediante una curva, e cerchiamo di determinare per continuità i parametri canonici di  $T$  movendoci lungo la curva.

Cartan dimostra che se si è giunti a determinare i parametri canonici in un punto  $P$  della curva, si possono sempre determinare i parametri nel punto infinitamente prossimo  $P + dP$ , purché  $P$  non rappresenti una trasformazione singolare.

Questo risultato non ci permette però di affermare l'esistenza di parametri canonici per la trasformazione  $T$ , quando solo si sappia che la  $T$  può essere congiunta alla trasformazione identica mediante una curva, che non tocca alcuna trasformazione singolare: dimostrerò infatti in questa Nota che le trasformazioni singolari di un gruppo  $G_r$  costituiscono al più una varietà a  $r - 2$  dimensioni (a  $r - 3$  al più se il gruppo è reale); dunque, comunque sia scelta la trasformazione  $T$  di qualsiasi gruppo continuo, essa può certamente essere congiunta alla trasformazione identica senza passare per alcuna trasformazione singolare, mentre che, come già si è detto, può ben accadere che la  $T$  non possegga parametri canonici.

Il ragionamento col quale stabilirò che le trasformazioni singolari di un gruppo  $G_r$  costituiscono al più una varietà a  $r - 2$  dimensioni porrà egualmente in luce una proprietà caratteristica delle trasformazioni singolari: sia  $T$  una tale trasformazione, esiste una varietà continua composta di tra-

(\*) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1947.

(1) «Leipziger Berichte», 1892 e 1893.

(2) *La theorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*, p. 21.

(3) Ricordiamo qui che una trasformazione  $T$  si dice singolare se la sostituzione corrispondente del gruppo aggiunto possiede una radice di Killing uguale a  $2k\pi i$  ( $k \neq 0$ ). Ricordiamo ancora che, se a una trasformazione  $T$  corrisponde una radice di Killing  $\omega$  diversa da zero, esiste nel gruppo una trasformazione infinitesima  $Xf$  che, trasformata mediante la  $T$ , si muta in  $e^\omega Xf$ .

sformazioni del gruppo, delle quali sia  $\Sigma$  una qualsiasi, che verificano la relazione

$$\Sigma^l = T \quad (l \text{ intero positivo}).$$

$T$  appartiene dunque ad una infinità continua di gruppi ad un parametro.

Dimostrerò in questa Nota che, se un gruppo  $G_r$  non contiene alcuna trasformazione singolare, è possibile attribuire ad ogni trasformazione del gruppo un sistema di parametri canonici: in verità la condizione indicata appare assai restrittiva.

Si è già detto che non è sempre possibile determinare per continuità i parametri canonici di una trasformazione di un gruppo continuo. In effetto può accadere che, al tendere ad un punto determinato  $P$  del cammino da percorrere, i parametri canonici non convergano: diventa così impossibile di proseguire nella determinazione dei parametri stessi. Nell'ultimo numero di questa Nota verificheremo la cosa direttamente per il gruppo lineare unimodulare reale in due variabili.

2. Diamo innanzi tutto una semplice dimostrazione dell'esistenza di trasformazioni prive di parametri canonici nel gruppo lineare unimodulare reale in due variabili <sup>(4)</sup>

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Consideriamo dapprima la trasformazione  $T$

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_1 x' + \mu_1 y' = -e^{+k} (\lambda_1 x + \mu_1 y) \\ \lambda_2 x' + \mu_2 y' = -e^{-k} (\lambda_2 x + \mu_2 y). \end{cases}$$

$T$  scambia fra loro le due semirette

$$\lambda_1 x + \mu_1 y = 0 \quad ; \quad \lambda_2 x + \mu_2 y > 0$$

(4) Una diversa dimostrazione dell'esistenza, nel gruppo lineare unimodulare reale, di trasformazioni prive di parametri canonici si trova a p. 236 del trattato di CARTAN *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*. Questa consiste nel cercare le trasformazioni finite che si possono ottenere a partire dalle differenti trasformazioni infinitesime di  $G_3$  e nell'osservare che non si ottengono in tal guisa tutte le trasformazioni finite del gruppo.

D'altronde, come rilevo da una cortese comunicazione dell'illustre Autore, la dimostrazione diviene più intuitiva quando si pone il gruppo unimodulare in corrispondenza di isomorfismo (localmente oloedrico) con il gruppo omografico della variabile reale  $z$ , facendo corrispondere alla trasformazione (1) la trasformazione  $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ . Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca fra i sottogruppi  $g_1$  dei due gruppi.

Tutte le trasformazioni del gruppo omografico posseggono parametri canonici e quindi ad ogni trasformazione unimodulare corrisponde una trasformazione omografica, un gruppo  $g_1$  del gruppo omografico e infine un gruppo  $g_1$  del gruppo unimodulare. Si riconosce però che non in tutti i casi la trasformazione del gruppo unimodulare appartiene al gruppo  $g_1$  che le corrisponde al modo indicato.

e

$$\lambda_2 x + \mu_1 y = 0 \quad ; \quad \lambda_2 x + \mu_2 y < 0,$$

come pure

$$\lambda_2 x + \mu_2 y = 0 \quad ; \quad \lambda_1 x + \mu_1 y > 0$$

c

$$\lambda_2 x + \mu_2 y = 0 \quad ; \quad \lambda_1 x + \mu_1 y < 0.$$

$T^2$  lascia ferme queste quattro semirette ed esse soltanto.

Se  $T$  possedesse parametri canonici, diciamo  $a_1, a_2, a_3$ , la trasformazione  $T'$ , di parametri  $a_1 t, a_2 t, a_3 t$ , essendo generata dalla stessa trasformazione infinitesima, sarebbe permutabile con  $T$ .

$T'$  trasformerebbe, per esempio, la prima delle quattro semirette considerate in una certa semiretta  $d$  uscente dall'origine e, per  $t$  generico, certamente diversa da ciascuna delle quattro.

Mediante le successive trasformazioni  $T'^{-1}, T^2, T', d$  sarebbe trasformata nella prima semiretta, rimarrebbe fissa, e tornerebbe infine ad essere trasformata in sè medesima. Ma  $T' T^2 T'^{-1} = T^2$ ;  $T^2$  lascerebbe dunque fisse infinite semirette per l'origine, il che non è.

Si potrebbe analogamente vedere che, *neppure la trasformazione*

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda x' + \mu y' = -(\lambda x + \mu y) \\ y' = t(\lambda x + \mu y) - y \end{cases}$$

*possiede parametri canonici.*

3. Mostriamo ora che, *se non vi sono in un gruppo  $G_r$  trasformazioni singolari, si possono attribuire parametri canonici ad ogni trasformazione finita.*

In base a un risultato fondamentale della teoria, già ricordato al principio del n. 1, se si scelgono le  $r$  trasformazioni infinitesime di base di  $G_r$  e si prende un numero  $\rho$  sufficientemente piccolo, vi è una corrispondenza biunivoca e continua fra i punti dello spazio dei parametri che soddisfano alla relazione

$$a_1^2 + \dots + a_r^2 < \rho^2$$

e le trasformazioni di un certo intorno omogeneo della trasformazione identica.

Ai punti dello spazio dei parametri che soddisfano alla relazione

$$a_1^2 + \dots + a_r^2 < 4\rho^2$$

corrisponde ugualmente un insieme di trasformazioni dotate di parametri canonici. Siccome tuttavia questa corrispondenza può non essere biunivoca, non si può asserire *a priori* che queste trasformazioni costituiscano un intorno omogeneo della trasformazione identica.

Per questo occorre ancora far vedere che, se  $T$  è una trasformazione dell'insieme, ogni trasformazione del gruppo, infinitamente vicina a  $T$ , possiede anch'essa parametri canonici.



Siano  $a_1, \dots, a_r$  i parametri di  $T$ , il punto di parametri  $\frac{1}{2} a_1 \dots \frac{1}{2} a_r$ , rappresentativo di  $T^{\frac{1}{2}}$ , sarà all'interno alla sfera di raggio  $\rho$  e si potrà quindi certamente attribuire un sistema di parametri canonici ad ogni trasformazione  $ST^{\frac{1}{2}}$  (con  $S$  infinitamente piccola), siano

$$\frac{1}{2}(a_1 + da_1) \dots \frac{1}{2}(a_r + da_r).$$

Sia  $T^{\frac{1}{2}} ST^{-\frac{1}{2}} = S'$ . La trasformazione  $ST^{\frac{1}{2}} ST^{\frac{1}{2}} = SS' T$  è infinitamente vicina a  $T$  e possiede i parametri canonici

$$a_1 + da_1 \dots a_r + da_r.$$

Sia  $Xf$  il simbolo di  $S$  e  $X'f$  il simbolo di  $S'$  <sup>(5)</sup>. Per potere asserire che ogni trasformazione infinitamente vicina a  $T$  possiede parametri canonici basterà sapere che vi sono  $r$  trasformazioni infinitesime indipendenti  $X_1 f \dots X_r f$ , tali che le  $r$  trasformazioni infinitesime  $X_1 f + X'_1 f \dots X_r f + X'_r f$  siano esse stesse indipendenti. Ma basta per questo che non esista alcuna trasformazione infinitesima del gruppo, che soddisfi alla relazione

$$Xf + X'f = 0,$$

che si può anche esprimere,  $S$  essendo la trasformazione infinitamente piccola che corrisponde al simbolo  $Xf$ , mediante

$$S' = S^{-1}.$$

Si può mostrare che in tal caso deve esistere una trasformazione infinitesima del gruppo appartenente, rispetto a  $T^{\frac{1}{2}}$ , a una radice di Killing eguale  $k\pi i$  ( $k$  dispari); allora la trasformazione  $T$ , cui corrisponde una radice uguale a  $2k\pi i$ , sarà singolare. Per riconoscere questa circostanza consideriamo le trasformazioni infinitesime trasformate di  $Xf$  mediante  $T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{4}}, T^{\frac{1}{8}} \dots$

Se queste trasformazioni infinitesime differiscono fra di loro per semplice fattore numerico, è chiaro che  $Xf$  apparterrà, rispetto a  $T^{\frac{1}{2}}$ , a una radice di Killing ben determinata  $\omega$  e poichè

$$-Xf = X'f = e^{\omega} Xf,$$

si vede che  $\omega$  è uguale a  $k\pi i$  ( $k$  dispari).

Se invece fra le infinite trasformazioni infinitesime considerate ve ne è un certo numero  $p$  ( $1 < p < r$ ) di indipendenti, queste saranno ancora mutate da  $T^{\frac{1}{2}}$  nelle loro inverse; sarà poi sempre possibile di scegliere una loro com-

(5) Adotto qui le denominazioni introdotte da CARTAN a p. 77 del trattato, già citato, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*.

binazione lineare, che appartenga, rispetto a  $T^2$ , a una radice di Killing determinata, necessariamente uguale a  $k\pi i$ .

Se non vi sono nel gruppo trasformazioni singolari si potranno successivamente considerare le sfere di raggio  $4\varphi, 8\varphi, \dots$  e si arriverà ad attribuire parametri canonici ad ogni trasformazione finita del gruppo.

4. Vogliamo ora mostrare che le trasformazioni singolari di un gruppo non possono costituire una varietà a  $r - 1$  dimensioni.

Supponiamo che esista nella varietà rappresentativa di  $G_r$  una ipersuperficie costituita da trasformazioni che posseggono una radice di Killing uguale a  $k\pi i$  ( $k$  dispari).

Se  $T^2$  è una trasformazione generica della ipersuperficie, vi saranno delle trasformazioni infinitamente piccole  $S_1, \dots, S_r$  ( $p < r$ ), che soddisfano alla relazione

$$T^{\frac{1}{2}} S_i T^{-\frac{1}{2}} = S_i^{-1}.$$

La trasformazione  $S_i T^{\frac{1}{2}}$  soddisfa alla relazione

$$(S_i T^{\frac{1}{2}}) S_i (S_i T^{\frac{1}{2}})^{-1} = S_i T^{\frac{1}{2}} S_i T^{-\frac{1}{2}} S_i^{-1} = S_i S_i^{-1} S_i^{-1} = S_i^{-1}.$$

e le corrisponde perciò una radice uguale a  $k\pi i$ ; essa appartiene dunque alla ipersuperficie. Ma

$$(S_i T^{\frac{1}{2}})^2 = S_i T^{\frac{1}{2}} S_i T^{\frac{1}{2}} = S_i (T^{\frac{1}{2}} S_i T^{-\frac{1}{2}}) T = T.$$

e se ne deduce che, alle trasformazioni rappresentate dai punti di una varietà a  $p$  dimensioni appartenente alla ipersuperficie, corrisponde una stessa trasformazione singolare  $T$ , con la radice di Killing  $2k\pi i$ .

Più in generale supponiamo che alla trasformazione singolare  $T$  corrisponda la radice di Killing  $2^l k\pi i$  ( $l$  intero positivo), cui appartengano  $p$  trasformazioni infinitesime indipendenti.

Si vede analogamente in questo caso che esiste una varietà continua a  $p$  dimensioni composta di trasformazioni  $\Sigma$ , alle quali corrisponde una radice uguale a  $k\pi i$  e che soddisfano alla relazione

$$\Sigma^{2^l} = T.$$

Attribuendo a  $p$  il valore minimo 1, segue di qui immediatamente il teorema: Le trasformazioni singolari di  $G_r$  costituiscono al più una varietà a  $r - 2$  dimensioni.

Il limite per la dimensione si abbassa a  $r - 3$  se il gruppo è reale.

5. Cerchiamo, ancora sull'esempio del gruppo  $G_3$  delle trasformazioni lineari unimodulari reali in due variabili, di vedere perchè non sia in certi casi possibile di assegnare parametri canonici a tutte le trasformazioni di un gruppo.

I gruppi ad un parametro  $g_1$  contenuti in  $G_3$ , si ottengono, come insegna la teoria generale, integrando il sistema

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_3 x - a_1 y,$$

$a_1, a_2, a_3$  sono i parametri canonici della trasformazione di  $g_1$  corrispondente a  $t = 1$ .

Se  $a_1^2 + a_2 a_3 \neq 0$ , posto  $k = \sqrt{a_1^2 + a_2 a_3}$ , le equazioni di  $g_1$  si possono scrivere

$$(4) \quad \begin{cases} (a_1 + k)x' + a_2 y' = e^{tk} \{ (a_1 + k)x + a_2 y \} \\ (a_1 - k)x' + a_2 y' = e^{-tk} \{ (a_1 - k)x + a_2 y \}. \end{cases}$$

Se  $a_1^2 + a_2 a_3 = 0$ , le equazioni di  $g_1$  si scrivono invece

$$(5) \quad \begin{cases} a_3 x' - a_1 y' = a_3 x - a_1 y \\ y' = t(a_3 x - a_1 y) + y. \end{cases}$$

Le (5) inducono sulle rette uscenti dall'origine una trasformazione parabolica, che lascia fissa la retta  $a_3 x - a_1 y = 0$ . Le (4) inducono sulle rette uscenti dall'origine, se  $k$  è reale, una trasformazione iperbolica che lascia fisse le rette

$$(a_1 + k)x + a_2 y = 0, \quad (a_1 - k)x + a_2 y = 0;$$

se invece  $k$  è immaginario puro inducono una trasformazione ellittica.

Nei primi due casi il gruppo  $g_1$  è aperto; invece nell'ultimo caso ( $k$  immaginario) esso dà l'identità in corrispondenza al valore  $\frac{2\pi i}{k}$  del parametro  $t$ .

Uguualmente in questo caso per  $i = \frac{\pi i}{k}$  si ottiene la trasformazione T

$$x' = -x, \quad y' = -y,$$

ed è questa l'unica trasformazione singolare contenuta in  $G_3$ .

Rileviamo ancora che nella varietà del gruppo non si può passare con continuità da una trasformazione del tipo ellittico a una del tipo iperbolico senza toccare una trasformazione del tipo parabolico o la trasformazione identica.

Consideriamo ora le serie  $\infty^1$  di trasformazioni che si ottengono moltiplicando la trasformazione singolare T per un gruppo  $g_1$  contenuto in  $G_3$ .

Se  $g_1$  è del tipo ellittico, la serie  $\infty^1$  così ottenuta coincide, come si vede subito, con  $g_1$  stesso.

Se invece  $g_1$  è del tipo iperbolico o parabolico si ottengono rispettivamente le serie  $\infty^1$  di trasformazioni

$$(2') \quad \begin{cases} (a_1 + k)x' + a_2 y' = -e^{+tk} \{ (a_1 + k)x + a_2 y \} \\ (a_1 - k)x' + a_2 y' = -e^{-tk} \{ (a_1 - k)x + a_2 y \}. \end{cases}$$

$$(3') \quad \begin{cases} a_3 x' - a_1 y' & = - (a_3 x - a_1 y) \\ y' & = - t (a_3 x - a_1 y) - y; \end{cases}$$

già si è visto al n. 2 che tali trasformazioni non posseggono parametri canonici.

Si può rilevare che non si può passare con continuità da una trasformazione (2') ad una del tipo ellittico senza toccare una trasformazione (3') o la T.

Se, a partire dall'identità, muovendoci nella varietà del gruppo, si vuole raggiungere una trasformazione (2') senza toccare la T, si dovrà attraversare la regione delle trasformazioni di tipo ellittico, raggiungere una trasformazione (3') e entrare poi nella regione delle trasformazioni (2').

Basterà dunque vedere perchè una trasformazione S, di equazione (3'), non può avere parametri canonici.

Noi dobbiamo far variare i parametri di una trasformazione U del tipo ellittico, di equazione (4), in modo da ottenere, al limite, la trasformazione S.

Notiamo che ST avendo un'equazione del tipo (5) possiede parametri canonici, diciamo  $a_1, a_2, a_3$  ( $a_1^2 + a_2 a_3 = 0$ ); siano poi  $a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3$  [ $k^2 = (a_1 + da_1)^2 + (a_2 + da_2)(a_3 + da_3) < 0$ ] i parametri di UT.

Al tendere di UT a ST,  $k$  tende a zero e U tende a S. I parametri di U si ottengono da quelli di UT moltiplicandoli per  $1 - \frac{\pi i}{k}$  <sup>(6)</sup> e quindi, al tendere di  $k$  a zero, crescono oltre ogni limite.

**Matematica.** — *Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires* <sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di TADEUSZ WAŻEWSKI, presentata dal Socio M. PICONE.

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$(I) \quad \frac{dx_i}{dt} = g_i(t, x_1, \dots, x_n).$$

Relativement au système (I) nous admettons la suivante

HYPOTHÈSE H. — Nous supposons que les fonctions  $g_i$  soient définies et continues en chaque point d'un ensemble ouvert  $\Omega$  appartenant à l'espace à  $n + 1$  dimensions. Nous supposons ensuite que par chaque point de  $\Omega$  il passe une intégrale unique de ce système.

(6) Per quanto si è detto in questo stesso numero, il gruppo  $g_1$ , al quale appartengono le trasformazioni ellittiche UT e U, dà la trasformazione T in corrispondenza ai valori dei parametri  $(a_1 + da_1) \frac{\pi i}{k}, (a_2 + da_2) \frac{\pi i}{k}, (a_3 + da_3) \frac{\pi i}{k}$ ; i parametri di U si otterranno poi sottraendo dai parametri di UT quelli di T.

(\*) J'ai communiqué (oralement) les résultats un peu moins généraux le 18-III-1947, le 28-III-1947 et le 29-V-1947 respectivement au cours d'une séance de la Soc. Pol. de Math. (Cracovie), de la Soc. Scient. (Varsovie) et du Congrès des Math. Polon. (Cracovie).

(\*\*) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1947.



*Définition.* — Soit  $\omega$  un ensemble ouvert contenu dans  $\Omega$ . Nous désignons par

$$\text{front}(\omega)$$

la frontière de  $\omega$  relative à  $\Omega$ , c.-à-d. la classe de ces points frontiers de  $\omega$  qui appartiennent à l'ensemble ouvert  $\Omega$ . Soit  $P$  un point de  $\omega$  et soit  $I$  l'intégrale du système (1) issue de  $P$ . En partant de  $P$  déplaçons-nous sur  $I$  vers la droite (c.-à-d. dans le sens des  $t$  croissants). Il pourra arriver que nous rencontrerons en route la *front* ( $\omega$ ). Il existera alors un point  $Q$  dans lequel cette rencontre aura lieu pour la première fois. Ce point

$$Q = \text{conséq}(P; \omega).$$

sera appelé, selon Poincaré, conséquent de  $P$  relativement à  $\omega$ .

En partant de  $P$  et en se déplaçant sur  $I$  vers la gauche on définit, d'une façon pareille, l'antécédent  $R$  de  $P$  relativement à  $\omega$

$$R = \text{antéc}(P; \omega).$$

Soit  $M$  un point de *front* ( $\omega$ ). On dira que  $M$  est respectivement un *point de sortie* ou un *point d'entrée* (relativement à  $\omega$ ) lorsque  $M$  constitue le conséquent ou l'antécédent d'un point appartenant à  $\omega$ .

La classe de tous les points de sortie ou de tous les points d'entrée sera désignée respectivement par

$$S(\omega) \quad \text{et} \quad E(\omega).$$

Posons

$$\bar{\omega} = \omega + \text{front}(\omega).$$

Un point de la *front* ( $\omega$ ) sera dit *point de sortie stricte* lorsqu'il appartient à la fois à  $S(\omega)$  et à  $E(\Omega - \bar{\omega})$ . On définit pareillement les points d'entrée stricte (relativement à  $\omega$ ).

La classe de tous les points de sortie stricte ou de tous les points d'entrée stricte sera désignée par

$$\text{strict } S(\omega) \quad \text{et} \quad \text{strict } E(\omega).$$

Soit  $S_1$  une partie de  $S(\omega)$ . La classe des points  $P$  de  $\omega$ , tels que *conséq* ( $P, \omega$ ) appartient à  $S_1$  sera dit ombre gauche de  $S_1$  (par rapport à  $\omega$ ) et sera désignée par

$$\text{ombre gauche}(S_1).$$

Pour  $E_1$  faisant partie de  $E(\omega)$  on définit pareillement

$$\text{ombre droite}(E_1).$$

Voici maintenant un lemme facile à établir.

LEMME 1. - Si  $Q_0 \in \text{strict } S(\omega)$  et  $Q_0 = \text{conséq}(P_0; \omega)$  alors la transformation  $Q = \text{conséq}(P; \omega)$ , { définie évidemment exclusivement pour les points  $P$  appartenant à l'ombre gauche  $S(\omega)$  }, est continue au point  $P_0$ .

Nous allons maintenant rappeler la notion du rétracte qui nous servira dans la suite.

*Rétractes.* - Considérons, dans un espace quelconque, deux ensembles  $A$  et  $B$ , tels que  $A \subset B$ . Nous dirons que la transformation  $Q = \varphi(P)$  effectue une rétraction de  $B$  en  $A$  lorsqu'elle jouit des propriétés suivantes: 1° Elle est définie et continue dans  $B$ ; 2°  $\varphi(P) \in A$  lorsque  $P \in B$  et 3°  $\varphi(P) = P$  lorsque  $P \in A$ .

S'il existe une au moins transformation de telle sorte, on dit, selon M. Borsuk, que  $A$  est un rétracte de  $B$ .

EXEMPLE 1. - Considérons dans l'espace des points  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)$  la sphère  $B$  définie par l'inégalité  $\sum_{i=1}^p \tilde{x}_i^2 \leq r^2$ , ( $r > 0$ ) et sa frontière  $A$  composée des points pour lesquels  $\sum_{i=1}^p \tilde{x}_i^2 = r^2$ . Cela posé  $A$  n'est pas un rétracte de  $B$ . En effet, dans le cas contraire il existerait une transformation  $Q = \varphi(P)$  jouissant des propriétés 1°, 2° et 3° énoncées tout à l'heure. Soit  $R = U(Q)$  la transformation faisant correspondre à chaque point  $Q = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)$  de  $A$  son point antipode  $R = (-\tilde{x}_1, \dots, -\tilde{x}_p)$ . La transformation  $R = \psi(P) = U(\varphi(P))$  est continue dans  $B$ , elle transforme la sphère  $B$  en sa partie  $A$  et l'équation  $P = \psi(P)$  ne possède aucune solution (on l'établit d'abord pour les  $P$  situés à l'intérieur de  $B$  et ensuite pour les  $P$  appartenant à la frontière  $A$  de  $B$ ). Or ceci est impossible, car en vertu d'un théorème de M. Brouwer la transformation  $R = \psi(P)$  admet au moins un point fixe  $P_0$  tel que

$$P_0 = \psi(P_0) \quad \text{et} \quad P_0 \in B.$$

EXEMPLE 2. - Considérons dans l'espace à  $(p + q + 1)$  dimensions composé des points  $(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  l'ensemble  $B$  défini par les relations

$$\sum x_i^2 = r^2, \quad -\infty < y_\alpha < +\infty \quad (\alpha = 1, \dots, q), \quad -\infty < t < +\infty,$$

et l'ensemble  $A$  défini par les relations

$$\sum x_i^2 = r^2, \quad y_\alpha = b_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, q), \quad t = t_0$$

où  $t_0$  et les  $b_\alpha$  sont constants.

Or  $A$  est un rétracte de  $B$  car la transformation  $Q = \Phi(P)$  définie par les équations

$$T = \gamma(t, x_1, \dots, x_p) \quad ; \quad X_i = \delta_i(t, x_1, \dots, x_p) \quad , \quad Y_\alpha = \varepsilon_\alpha(t, x_1, \dots, x_p)$$

où

$$\gamma(t, \dots, x_p) \equiv t_0 \quad , \quad \delta_i(t, \dots, x_p) \equiv x_i \quad , \quad \varepsilon_\alpha(t, \dots, x_p) \equiv b_\alpha$$

effectue une rétraction de  $B$  en  $A$ .

Si  $A \subset B_1 \subset B$ , la même transformation effectue une rétraction de  $B_1$  en  $A$  donc  $A$  est aussi un rétracte de  $B_1$ .

Dans la suite, interviendrons les hypothèses suivantes

HYPOTHÈSE K. — L'ensemble  $S_1$  est composé de certains points de sortie [c.-à-d.  $S_1 \subset S(\omega)$ ] et la transformation  $Q = \text{conség}(P; \omega)$  est continue dans l'ombre gauche ( $S_1$ ).

HYPOTHÈSE L. — L'ensemble  $S_1$  est composé de certains points de sortie stricte [c.-à-d.  $S_1 \subset \text{strict } S(\omega)$ ].

Remarque 1. En vertu du Lemme 1 l'Hypothèse L entraîne la vérité de l'Hypothèse K, lorsque l'on suppose l'unicité relativement aux intégrales du système (1).

THÉORÈME 1. — Admettons l'Hypothèse H relativement au système (1). Soit  $\omega$  un ensemble ouvert contenu dans  $\Omega$  et soit  $S_1$  un ensemble composé de points de sortie (relativement à  $\omega$ ). Admettons une quelconque des Hypothèses K ou L.

Supposons enfin que, pour un ensemble  $Z$ , on ait les propriétés suivantes:

$$Z \subset \omega + S_1$$

$ZS_1$  n'est pas un rétracte de  $Z^{(1)}$ ,  $ZS_1$  est un rétracte de  $S_1$ .

Ceci étant admis il existe un point  $P$  appartenant à la fois à  $Z$  et, à  $\omega$ , tel que, ou bien  $\text{conség}(P; \omega)$  n'existe pas,  $\text{conség}(P; \omega)$  appartient à l'ensemble  $S(\omega) - S_1$ .

Démonstration. — Supposons que notre théorème soit faux. Le  $\text{conség}(P; \omega)$  existe donc pour tout point de  $Z\omega$  et il n'appartient pas à  $S(\omega) - S_1$ . On a donc  $\text{conség}(P; \omega) \in S_1$  lorsque  $P \in Z\omega$ . Considérons la transformation  $Q = W(P)$  telle que

$$W(P) = \text{conség}(P; \omega) \quad \text{lorsque } P \in Z\omega$$

$$W(P) = P \quad \text{lorsque } P \in ZS_1.$$

On démontre facilement que la transformation  $W(P)$  est continue sur  $Z$  et qu'elle transforme  $Z$  en  $S_1$ .

Soit  $R = \Phi(Q)$  une transformation effectuant la rétraction de  $S_1$  en  $ZS_1$ . Il est évident que la transformation  $R = \Phi(W(P))$  effectue la rétraction de  $Z$  en  $ZS_1$ , donc  $ZS_1$  est un rétracte de  $Z$  contrairement à l'hypothèse.

Remarque 2. — Un théorème analogue subsiste relativement à l'antéc ( $P; \omega$ ).

Corollaire. — Si en gardant les hypothèses du théorème précédent on pose en particulier  $S_1 = S(\omega)$  alors il existe au moins un point  $P_0$  de  $Z\omega$  pour lequel  $\text{conség}(P_0; \omega)$  n'existe pas. L'intégrale  $I$  issue de  $P_0$  et envisagée à droite de  $P_0$  ne peut donc pas sortir de  $\omega$ .

Si, en plus, pour tous les  $a$  et  $b$  la partie de  $\omega$  contenue entre les plans  $t = a$  et  $t = b$  est bornée et ses points limites sont contenus dans  $\Omega$ , l'intégrale  $I$  se laisse prolonger jusqu'à  $t = +\infty$  sans quitter  $\omega$ .

(1)  $ZS_1$  désigne la partie commune des ensembles  $Z$  et  $S_1$ .

*Remarque 3.* - Le théorème précédent prendra une forme purement topologique lorsque l'on remplacera les intégrales du système (1) par une famille quelconque des courbes jouissant des propriétés topologiques convenables.

*Remarque 4.* - Le Théorème 1 fournit une méthode générale pour obtenir des théorèmes relatifs à l'existence des intégrales bornées, à l'examen du phénomène asymptotique et à l'examen de la façon dont se comportent les intégrales au voisinage d'un point singulier. En profitant, dans chaque cas particulier, de la forme spéciale du système (1) en question, il suffira de construire, chaque fois, un ensemble  $\omega$  et d'indiquer éventuellement l'ensemble  $S_i$  de façon que les hypothèses du Théorème 1 soient vérifiées. Les théorèmes spéciaux obtenus dans cette voie ne constituent pas toujours une conséquence banale du Théorème 1. Ceci tient à ce que la construction de l'ensemble  $\omega$ , d'une façon appropriée à la nature du problème, n'est pas toujours ni immédiate ni facile.

Je montrerai, dans un article ultérieur, comment certains théorèmes connus sur le phénomène asymptotique ou sur le comportement des intégrales au voisinage d'un point singulier (entre autres ceux de M. Perron et de M. Peyovitch) se laissent démontrer plus rapidement ou bien se laissent généraliser ou compléter par des résultats nouveaux.

*Exemple d'un théorème particulier déduit du Théorème 1.* - Supposons que les fonctions  $r(t) > 0$  et  $R(t) > 0$  soient dérivables dans l'intervalle

$$-\infty \leq c < t < d \leq +\infty.$$

Désignons par  $\Omega$  l'ensemble des points  $(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  pour lesquels on a <sup>(2)</sup>

$$c < t < d, \quad \Sigma (x_i)^2 < [\varepsilon + r(t)]^2, \quad \Sigma (y_\alpha)^2 < [\varepsilon + R(t)]^2$$

où  $\varepsilon > 0$ . Soit

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = h_i(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) & , \quad (i = 1, \dots, p) \\ \frac{dy_\alpha}{dt} = l_\alpha(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) & , \quad (\alpha = 1, \dots, q) \end{cases}$$

un système aux deuxièmes membres continus dans  $\Omega$  et jouissant de l'unicité dans  $\Omega$ .

Supposons que

$$\Sigma x_i h_i(t, \dots, y_q) - r'(t) > 0$$

lorsque

$$(3) \quad c < t < d, \quad \Sigma x_i^2 = [r(t)]^2, \quad \Sigma y_\alpha^2 \leq [R(t)]^2$$

et

$$\Sigma y_\alpha l_\alpha(t, \dots, y_q) - R'(t) < 0$$

(2) Tous les détails qui suivent possèdent une simple interprétation géométrique lorsque  $p = q = 1$ . Dans le cas  $R(t) = r(t) \equiv 1$  le dessein est particulièrement simple.



lorsque

$$(4) \quad c < t < d, \quad \Sigma x_i^2 \leq [r(t)]^2, \quad \Sigma y_a^2 = [R(t)]^2.$$

Désignons par  $\omega$  l'ensemble

$$c < t < d, \quad \Sigma x_i^2 < [r(t)]^2, \quad \Sigma y_a^2 < [R(t)]^2$$

et par  $Z(b_1, \dots, b_q)$  l'ensemble

$$t = t_0, \quad (c < t_0 < d), \quad y_a = b_a, \quad \Sigma x_i^2 \leq [r(t_0)]^2$$

ou  $\Sigma b_a^2 < [R(t_0)]^2$ .

Nous affirmons que dans l'ensemble  $\omega Z(b_1, \dots, b_q)$  il existe au moins un point  $P_0$ , tel que l'intégrale  $x_i = \varphi_i(t)$ ,  $y_a = \psi_a(t)$  existe dans l'intervalle  $t_0 \leq t < d$  et ne peut pas quitter  $\omega$  lorsque  $t$  varie dans cet intervalle.

Il existe même, pour les  $(b_1, \dots, b_q)$  variant, une famille des intégrales de cette sorte dépendant de  $q$  paramètres  $b_1, \dots, b_q$ .

En effet, l'ensemble  $S(\omega)$  fait partie de l'ensemble (3) et tous les points de sortie sont stricts. En s'inspirant des Exemples 1 et 2 on prouve que les prémisses du Théorème 1 sont vérifiées.

Si  $d = +\infty$  l'intégrale  $x_i = \varphi_i(t)$ ,  $y_a = \psi_a(t)$  existe dans l'intervalle  $t_0 \leq t < +\infty$  et elle ne peut pas quitter  $\omega$ .

Si pour  $t \rightarrow d$  on a  $r(t) \rightarrow 0$  alors  $\varphi_i(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow d$ .

UN AUTRE EXEMPLE. — Considérons le système de deux équations

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, t)$$

et désignons par  $\bar{\omega}$  le parallélépipède  $0 \leq t < 1$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$  en admettant l'unicité dans  $\Omega$  ( $\bar{\omega} \subset \Omega$ ). Supposons que

$$xf(x, y, t) > 0 \quad \text{pour} \quad |x| = 1, \quad |y| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$xg(x, y, t) < 0 \quad \text{pour} \quad |x| \leq 1, \quad |y| = 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ces inégalités expriment que les intégrales sortent de  $\omega$  par les faces supérieure, inférieure et droite de  $\omega$  et qu'elle entrent par toutes les autres faces.

Désignons par  $\omega$  l'intérieur de  $\bar{\omega}$ , par  $Z$  le segment aux extrémités  $(-1, b, t_0)$ ,  $(+1, b, t_0)$  (avec  $|b| < 1$  et  $0 < t_0 < 1$ ), et enfin par  $T$  le segment aux extrémités  $(e, -1, 1)$  et  $(e, 1, 1)$  (avec  $|e| < 1$ ).

Ceci étant posé il existe une intégrale contenue dans  $\omega$  et coupant les segment  $Z$  et  $T$ .

Pour le prouver il suffit de poser (dans le théorème 1)  $S_1 = S(\omega) - T$ .

Les théorèmes analogues peuvent être formulés dans le cas de l'espace à  $p + q + 1$  dimensions.

**Matematica** (Teoria degli aggregati). — *Remarque sur l'axiome du choix pour l'espace de fonctions continues*. Nota<sup>(\*)</sup> di W. SIERPIŃSKI, presentata dal Socio M. PICONE.

Dans sa Note *Il principio di Zermelo per lo spazio delle funzioni continue* (« Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa », Serie II, vol. X (1941), p. 209), M. Sandro Faedo se propose de démontrer qu'on peut fixer une loi d'après laquelle on peut choisir un élément dans tout ensemble formé de fonctions continues.

La démonstration de M. Faedo ne m'étant pas tout à fait claire, il est possible qu'il y a ici un malentendu. Or, le problème intéressant traité par M. Faedo donne lieu à des observations suivantes.

1. Dans l'état actuel de la science il n'est pas possible de fixer une loi d'après laquelle on pourrait choisir un élément dans tout ensemble fermé non vide de fonctions continues bornées d'une variable réelle (c. à. d. définies pour  $-\infty < x < +\infty$ , où la distance  $\rho(f, g)$  de deux fonctions est le nombre

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - g(x)|.$$

Je démontrerai de plus que si l'on savait fixer une telle loi, on saurait bien ordonner l'ensemble de tous les nombres réels.

En effet,  $t$  étant un nombre de l'intervalle  $I = [0 < x \leq 1]$  et

$$t = (0, a_1 a_2 \dots)_2,$$

son développement en fraction dyadique contenant une infinité de chiffres non nuls, désignons, par  $f_i(x)$  la fonction, telle que

$$f_i(x) = 0 \text{ pour } x \leq 0, \quad f_i(n) = a_n \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

et linéaire dans chaque intervalle  $(n-1, n)$ , où  $n = 1, 2, \dots$

Les fonctions  $f_i(x)$ , où  $0 < t \leq 1$ , constituent évidemment un sous-ensemble  $C_t$  de l'espace  $C$  de toutes les fonctions continues bornées d'une variable réelle.

Il est évident que si  $t \in I$ ,  $u \in I$  et  $t \neq u$ , on a

$$\rho(f_t, f_u) = 1:$$

il en résulte sans peine que tout sous-ensemble de  $C_t$  est fermé dans  $C$ .

Admettons que  $\varphi$  est une loi faisant correspondre à tout sous-ensemble fermé non vide,  $E$  de l'espace  $C$  un élément  $\varphi(E)$  de  $E$ . Soit  $F$  un sous-ensemble non vide quelconque de  $I$ ,  $C_F$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f_i(x)$ , où  $t \in F$ . L'ensemble  $C_F$  est donc fermé dans  $C$ :  $g_F = \varphi(C_F)$  est donc un élément de  $C_F$  (bien déterminé par  $F$ ), donc une fonction de  $C_t$ . Posons

$$\psi(F) = (0, b_1 b_2 \dots)_2,$$

où

$$b_n = g_F(n) \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

(\*) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1947.

nous aurons  $f_{\psi(F)} = g_F = \varphi(C_F) \in C_F$ , donc  $f_{\psi(F)} \in C_F$ , d'où il résulte (vu la définition de  $C_F$ ) que  $\psi(F) \in F$ .

La fonction  $\psi$  fait donc correspondre à tout sous-ensemble non vide  $F$  de  $I$  un élément  $\psi(F)$  de  $F$ . Une telle fonction  $\psi$  permet, d'après Zermelo, bien ordonner l'ensemble  $I$ , donc aussi l'ensemble de tous les nombres réels.

2. Soit  $C_0$  l'espace de toutes les fonctions continues définies dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 1$ . L'espace  $C_0$  est, comme on sait, séparable et complet; de plus, nous savons définir une suite infinie formée d'éléments de  $C_0$  dont l'ensemble est dense dans  $C_0$  (par exemple une suite de tous les polynômes en  $x$  aux coefficients rationnels). Or, on a ce

THÉORÈME. — Si l'on a défini une suite infinie

$$(1) \quad p_1, p_2, p_3, \dots$$

d'éléments d'un espace métrique complet  $M$  dont l'ensemble est dense dans  $M$ , on sait fixer une loi d'après laquelle à tout sous-ensemble non vide fermé  $F$  de  $M$  correspond un élément de  $F$ .

Démonstration. — Soit  $F$  un ensemble fermé non vide contenu dans  $M$ . L'ensemble d'éléments de la suite (1) étant dense dans  $M$ , il existe un terme  $p_{n_1}$  de (1) qui est le premier, tel que

$$\rho(p_{n_1}, F) < 1$$

(où  $\rho(p, F)$  désigne la distance de  $p$  à l'ensemble  $F$ , c. à d. la borne inférieure de nombres  $\rho(p, q)$ , pour  $q \in F$ ). Il existe donc d'éléments  $q$  de  $F$ , tels que  $\rho(p_{n_1}, q) < 1$  et on en déduit sans peine qu'il existe un terme  $p_{n_2}$  de (1) qui est le premier, tel que

$$\rho(p_{n_1}, p_{n_2}) < 1 \quad \text{et} \quad \rho(p_{n_2}, F) < 1/2.$$

Pareillement on trouve le premier terme  $p_{n_3}$  de (1), tel que

$$\rho(p_{n_2}, p_{n_3}) < 1/2 \quad \text{et} \quad \rho(p_{n_3}, F) < 1/2^2.$$

On détermine ainsi une suite infinie  $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, \dots$  d'éléments de (1), telle que

$$(2) \quad \rho(p_{n_{k-1}}, p_{n_k}) < 1/2^{k-1} \quad \text{et} \quad \rho(p_{n_k}, F) < 1/2^k$$

pour  $k = 2, 3, \dots$

La suite infinie  $p_{n_1}, p_{n_2}, \dots$  d'éléments de  $M$  satisfait, comme on voit sans peine, à la condition de Cauchy et, l'espace  $M$  étant complet, il existe un élément  $p_F$  de cet espace, tel que

$$(3) \quad p_F = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k}.$$

Or l'ensemble  $F$  étant fermé, on conclut sans peine de (2) et (3) que  $p_F \in F$ .

En faisant correspondre à tout ensemble fermé non vide  $F \subset M$  l'élément  $p_F$  de  $F$ , on a donc la loi désirée et notre théorème est démontré.

**Matematica.** — *L'approximation des racines complexes d'une équation transcendante à une inconnue.* Nota (\*) di E. BODEWIG, presentata dal Socio M. PICONE.

L'approximation des racines complexes d'une équation transcendante à une inconnue est un des problèmes ennuyeux du calcul numérique. Si l'on a une fois une approximation « satisfaisante », l'approximation ultérieure se fait par un des procédés connus. Mais c'est justement cette approximation première qui présente les difficultés.

Un procédé qui résout ce problème d'une manière satisfaisante doit avoir la propriété de fournir des approximations sûres et successives, quoique moins convergentes que les procédés usuels (Newton etc.). Un de ces derniers peut alors être appliqué à une approximation ainsi obtenue pour accélérer la convergence. Mais puisque les procédés divers exigent des approximations premières de la racine en question différentes, mais inconnues, la première approximation ne doit pas être trop rude, autrement le procédé choisi ne convergera pas.

De l'autre côté, s'il est trop pénible de calculer une bonne approximation première par notre procédé nouveau, il faut avoir un autre procédé dont le rayon de convergence est assez grand pour qu'il converge également si l'on commence par une approximation première « mauvaise ».

Ainsi *notre but* sera: de décrire *A)* un procédé sûr et convergent pour trouver les racines complexes à une approximation arbitraire près *B)* un autre procédé rapidement convergent si l'on a une approximation satisfaisante première.

*A).* — Pour atteindre le premier but il y a deux possibilités.

I. On peut essayer de traiter tout dans *le domaine réel*. Pour cela on sépare l'équation  $f(\zeta) = 0$  où  $\zeta = x + iy$ , en deux équations réelles:  $F(x, y) = 0$ ,  $G(x, y) = 0$  et on trouve une approximation des racines en traçant les deux courbes rudement et déterminant les domaines où il pourrait y avoir des intersections des courbes, et en refaisant le diagramme sur une échelle plus grande pour ces domaines seulement.

Mais en pratique cette méthode faillit presque toujours, puisque les fonctions  $F$  et  $G$  sont trop compliquées, même quand  $f(x)$  est simple.

II. Mais on peut rester aussi *le domaine complexe*. Et c'est ici que le dr. Hazebroek, professeur van der Waerden et moi avons développé le procédé suivant.

D'une manière semblable à celle du domaine réel on calcule la fonction analytique  $w = f(\zeta)$  pour des valeurs diverses de  $\zeta$  et on joint les points résultants par une courbe. Naturellement cette opération se fait dans deux plans: un pour l'argument  $\zeta$  et l'autre pour la valeur  $w$ . On donne donc quel-

(\*) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1947.



ques valeurs successives à  $\zeta$ :  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$  et on porte les valeurs correspondantes  $f(\zeta)$ :  $w_1, w_2, w_3, \dots$  dans l'autre plan. Notre but sera naturellement de choisir  $\zeta$  de telle sorte que le point  $w$  tombe dans l'origine  $w = 0$ . Puisque ce ne serait que par accident, il faut appliquer quelques théorèmes élémentaires de la théorie des fonctions afin de parvenir au moins dans les environs de l'origine.

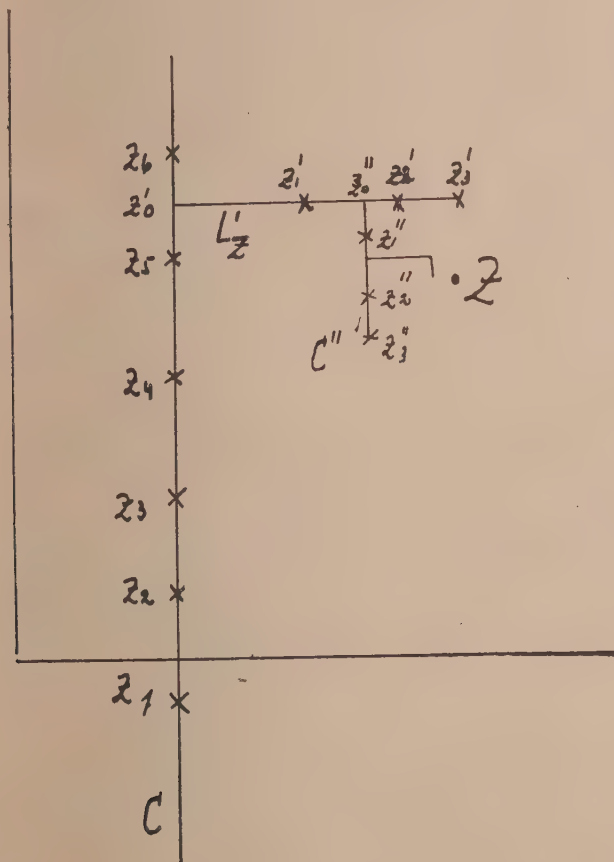


Fig. 1.

Mais quand  $\zeta$  décrit une courbe  $C$ ,  $w$  décrit une autre courbe  $C_w$ , et quand  $\zeta$  décrit une deuxième courbe qui coupe la première, les deux courbes correspondantes  $C_w, C'_w$  dans le plan  $w$  sont coupantes aussi, et, la représentation étant conforme, on a  $\angle CC' = \angle C_w C'_w$  et  $dL_w = dL_\zeta \cdot |f'(\zeta)|$ , où  $dL_w$  et  $dL_\zeta$  sont des longueurs infinitésimales correspondantes.

On procède donc comme suit. D'abord par des raisons pratiques on prend presque toujours pour les courbes  $C$  une des trois suivantes: Une *parallèle* à l'une des axes, un *cercle* autour de l'origine ou une *droite* par l'origine.

Alors on essaie plusieurs de ces courbes  $C$  jusqu'à ce qu'une des courbes  $C_w$  correspondantes parvienne au voisinage de l'origine  $w = 0$ . Puis on fait usage de la représentation conforme des deux plans:

De l'origine  $w = 0$  on abaisse la perpendiculaire  $L'_w$  sur  $C_w$  qui rencontre la courbe au point  $w'_0$ . Alors on cherche le point  $\zeta'_0$  sur  $C$  qui semble correspondre à  $w'_0$  ce qui est facilité par le fait que la relation de deux petites longueurs du plan  $\zeta$  est approximativement la même que celle des longueurs correspondantes du plan  $w$ .

Maintenant à la perpendiculaire  $L'_w$  abaissée en  $w'_0$  correspond une courbe du plan  $\zeta$  laquelle est perpendiculaire sur  $C$  en  $\zeta'_w$ . Mais on ne peut ni tracer cette courbe ni calculer aucun de ses points parce qu'il faudrait résoudre l'équation  $w = f(\zeta)$  par  $\zeta$ :  $\zeta = F(w)$  ce que nous supposons impossible puisque dans ce cas notre problème n'existerait pas.

C'est pourquoi on procède inversement: En  $\zeta'_0$  on élève la perpendiculaire  $L'_\zeta$  sur  $C$  et on cherche sa représentation dans le plan  $w$ . Elle sera une courbe  $C'_w$  qui en  $w'_0$  est perpendiculaire sur  $C_w$ . A une distance courte elle est voisine immédiatement de  $L'_w$  quoique n'étant pas identique à  $L'_w$ . C'est pourquoi elle ne passe pas exactement par  $w = 0$ , comme le faisait  $L'_w$ , mais, ayant la même direction initiale que  $L'_w$  et n'étant pas longue, elle passera dans le voisinage de  $w = 0$ .

Du point  $\zeta'_0$  on passe donc sur  $L'_\zeta$  dans une certaine direction - qui est déterminée par une épreuve - et calcule pour quelques-uns de ces points de  $L'_\zeta$  les points correspondants dans le plan  $w$ .

Afin de ne pas calculer plus de valeurs  $w'$  pour différents  $\zeta'$  qu'il ne faudra, et afin de parvenir aussi vite que possible au voisinage du point  $Z$  pour lequel  $f(Z) = 0$ , on fait usage du rapport des longueurs correspondantes aux points  $\zeta'_0$  et  $w'_0$ . C'est-à-dire: ou bien on calcule  $|f'(\zeta'_0)|$  ou, si c'est trop compliqué, on l'estime par le rapport de deux voies correspondantes sur les courbes  $C$  et  $C_w$  dans le voisinage de  $\zeta'_0$  et  $w'_0$ , et l'on choisit les points  $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots$  au voisinage du point estimé.

Alors on calcule les valeurs  $w'_1 = f(\zeta'_1)$ ,  $w'_2 = f(\zeta'_2)$ ,  $\dots$  et on les joint par une courbe  $C'_w$  laquelle est perpendiculaire sur  $C_w$  en  $w'_0$ .  $C'_w$  passera dans un voisinage plus proche de  $w = 0$  que ne le faisait  $C_w$ . C'est pourquoi on fait bien de dessiner le plan  $w$  déjà maintenant sur une échelle plus grande pour mieux effectuer, l'opération suivante.

En effet on répète le procédé, c'est-à-dire, de  $w = 0$  on abaisse la perpendiculaire sur  $C'_w$  qui coupe la courbe en  $w''_0$ . On estime le point correspondant  $\zeta''_0$ , trace la courbe  $C''$  passant par  $\zeta''_0$ , trace la courbe  $C''_w$  qui correspond à  $C''$ , abaisse la perpendiculaire sur  $C''_w$  de  $w = 0$  et ainsi de suite.

De cette manière on obtient un trait en zigzag dans le plan  $\zeta$ , composé de membres perpendiculaires  $C, L'_\zeta, C'', L''_\zeta, C''', L'''_\zeta, \dots$ , ayant des longueurs décroissantes et convergeant assez rapidement vers la racine  $Z$  de  $f(\zeta) = 0$ . Et dans le plan  $w$  on obtient une série d'arcs perpendiculaires  $C_w, C'_w, C''_w, C'''_w, \dots$  convergeant vers  $w = 0$ .

La paire de figures représente le cas où les courbes  $C$  sont des parallèles aux axes de sorte que les perpendiculaires  $L'_1, L'_2, \dots$  sont elles-mêmes des courbes  $C$ .

Le procédé peut être généralisé en ne prenant pas  $\zeta$  lui-même comme variable indépendante, mais une fonction analytique  $\zeta$  de  $\zeta$ , par exemple

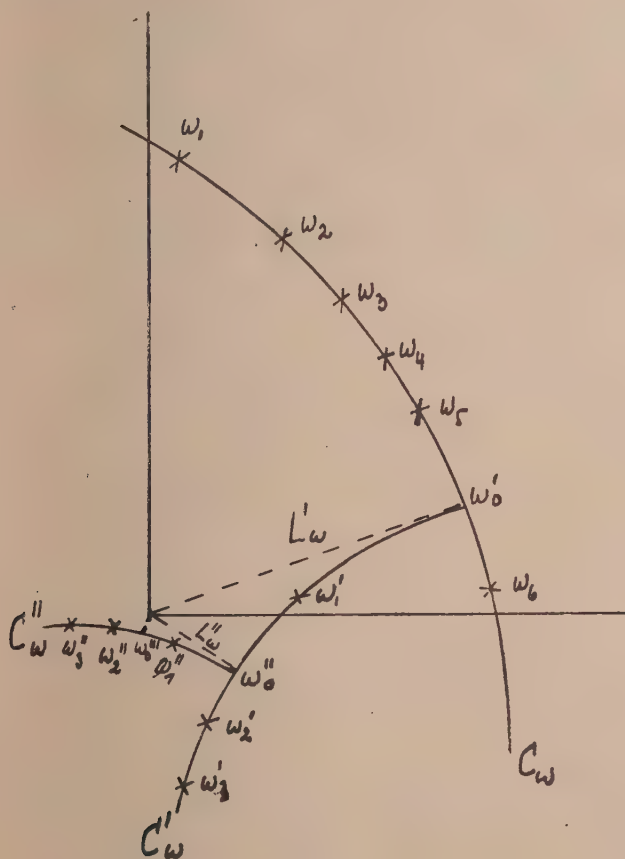


Fig. 2.

$\zeta = \log \zeta$ . Alors la représentation du plan  $\zeta$  sur le plan  $w$  sera conforme également.

B). — Après avoir obtenu ainsi une approximation suffisante  $a$  de la racine, il faut prendre  $a$  comme point de départ d'un procédé plus convergent.

Or la méthode de Newton converge quadratiquement, c'est à-dire, entre les erreurs  $d_n = Z - \zeta_n$  et  $d_{n+1} = Z - \zeta_{n+1}$ , des approximations successives  $\zeta_n$  et  $\zeta_{n+1}$  il y a la relation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n^2} = c \neq 0.$$

Elle converge donc rapidement et n'exige que le calcul de  $f(\zeta)$  et  $f'(\zeta)$ . Mais son rayon de convergence n'est pas grand, de sorte que l'approximation première  $a$  doit être voisine de la racine cherchée pour que la méthode converge. Il faudrait donc répéter notre procédé  $A)$  II plusieurs fois pour être sûr que la valeur  $a$  soit assez rapprochée. Aux cas où la fonction  $f(\zeta)$  est plus simple que  $f'(\zeta)$  on appliquera donc notre procédé autant de fois qu'on le croit avantageux. C'est-à-dire, ou bien on se borne à notre méthode ou, après quelques pas, on applique la méthode de Newton.

D'autre part, si  $f(\zeta)$  est une fonction compliquée, mais ses dérivées  $f'(\zeta)$ ,  $f''(\zeta)$  etc. sont simples, on se contente d'une approximation rude  $a$  et on procède ensuite comme suit.

Soit  $\zeta = F(w)$  l'inverse de la fonction  $w = f(\zeta)$ . Alors la racine  $Z$  de  $f(\zeta) = 0$  serait fournie par  $Z = F(0)$ . Mais on ne connaît pas  $F(w)$  et  $F(0)$ , mais seulement les dérivées de  $F(w)$ . Posant  $f(a) = b$ , donc  $a = F(b)$ , on développe la série

$$Z = F(0) = F(b - b) = a - bF'(b) + \frac{1}{2} b^2 F''(b) - \frac{1}{6} b^3 F'''(b) + \dots,$$

où

$$F'(b) = 1/f_1(a), \quad F''(b) = -f_2(a)/f_1^3(a), \quad F'''(b) = (3f_2^2 - f_1 f_3)/f_1^5,$$

$$F^{IV}(b) = -(15f_2^3 - 11f_1 f_2 f_3 + f_1^2 f_4)/f_1^7, \dots,$$

où, pour abrégier, on a posé:  $f^{(k)}(a) \equiv f_k$ . Généralement on a

$$F^{(n)}(w) \equiv d^n \zeta / dw^n = (-1)^{n-1} G_n / f_1^{2n-1},$$

où  $G_n$  satisfait à la relation récurrente:

$$G_{n+1} = (2n-1)f_2 G_n - f_1 \cdot dG_n / d\zeta \quad \text{avec} \quad G_1 = 1.$$

Cette méthode a été donnée par Euler dans ses *Institutiones Calculi Differentialis*, II, Cap. IX (« Opera Omnia », ser. I, vol. X, pp. 422-55) quoique sans la formule récurrente. C'est pourquoi nous l'avons appelée la *méthode d'Euler*.

La convergence de la série infinie est un problème spécial qui n'a pas encore été traité avec succès. Pour nous il s'agit du reste d'un autre problème, à savoir: Si l'on interrompt la série après le  $m$ -ième terme  $\pm \frac{1}{m!} b^m F^{(m)}(b)$ , obtenant ainsi la valeur  $Z_1$ , et si l'on répète le procédé en remplaçant  $a$  par  $Z_1$ , obtenant ainsi  $Z_2$ , et ainsi de suite, la séquence  $a, Z_2, Z_2, \dots$  convergera-t-elle vers  $Z$ ? Et dans quelles conditions? Mais ce problème n'est pas résolu non plus, ce qui n'est pas étonnant si l'on considère que même pour le cas le plus simple  $n=1$ , donc pour le procédé de Newton, les conditions sont assez compliquées. Mais en tout cas on peut conclure que le rayon de convergence croît avec le nombre  $m$  de termes de la série employés. Et aussi



que, si le procédé converge, la convergence sera du degré  $m$ , c'est-à-dire entre les erreurs  $d_n = Z - \zeta_n$  et  $d_{n+1} = Z - \zeta_{n+1}$  des approximations successives  $\zeta_n$  et  $\zeta_{n+1}$  il y a la relation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n^m} = c \neq 0.$$

Le nombre  $m$  de termes qu'on veut employer dépend de la fonction  $f(\zeta)$ . Si les dérivées supérieures sont plus simples que les dérivées inférieures on choisira  $m$  plus grand que dans le cas contraire. Et plus  $m$  est grand, plus l'approximation initiale  $a$  peut être mauvaise.

**Matematica.** — *Sulla irregolarità delle superficie multiple cicliche e lo scioglimento della torsione delle superficie algebriche.* Nota I (\*) di A. LO VOI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. *Per superficie multipla ciclica* s'intende la superficie ottenuta aggiungendo al campo di razionalità di una superficie algebrica

$$(1) \quad f(x, y, \zeta) = 0$$

una radicale non diramato (che non si riduca a funzione razionale)

$$(2) \quad u = \sqrt[t]{\varphi(x, y, \zeta)},$$

essendo  $\varphi(x, y, \zeta)$  un polinomio in  $x, y, \zeta$ . Un radicale cioè che, considerato come funzione del punto  $(x, y, \zeta)$  della superficie (1), ripiglia il primitivo valore quando si percorre un ciclo lineare nullo sulla superficie stessa.

Il radicale (2) si ridurrebbe ad una funzione razionale di  $x, y, \zeta$  se lo stesso avvenisse per un qualsiasi ciclo non nullo della superficie (1). Noi supponiamo dunque che esista almeno un ciclo (non nullo) della superficie (1) lungo cui il radicale  $u$  viene modificato. E poichè esso è determinato a meno di un fattore che sia una radice  $t$ -esima della unità, la detta modifica non può

consistere che nell'acquisto del moltiplicatore  $e^{\frac{2\pi ik}{t}}$ , dove  $k$  è un intero non multiplo di  $t$ .

Nel 1925 il De Franchis <sup>(1)</sup> ha mostrato che in corrispondenza ad un ciclo lineare di torsione avente il coefficiente di torsione  $t > 1$ , della superficie (1) si può costruire un radicale (2) il quale acquista il moltiplicatore  $e^{\frac{2\pi i}{t}}$  quando si percorre questo ciclo di torsione, mentre rimane inalterato quando si percorre un altro qualsiasi dei cicli di un assegnato sistema fon-

(\*) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1947.

(1) M. DE FRANCHIS, *Complementi alla Nota « Intorno alle varietà multiple cicliche senza diramazione »*. [« Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo », t. XLVIII (1925)]. I risultati di DE FRANCHIS sono stati riconfermati dalle ricerche di COMESSATI.

damentale (includente il ciclo di torsione considerato) per i cicli lineari della superficie (1).

Le superficie cicliche che a noi interessano, in vista della risoluzione del problema dello scioglimento della torsione algebrica, sono appunto le superficie che si hanno aggiungendo ad una superficie algebrica

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

dotata di un ciclo lineare di torsione di coefficiente  $t > 1$ , un radicale non diramato (2) che piglia il moltiplicatore  $e^{\frac{2\pi i}{t}}$  quando si percorre tal ciclo, ma resta immutato quando si percorre ogni altro ciclo che insieme ad esso forma un assegnato sistema fondamentale. Troveremo che se la (1) ha l'irregolarità  $q (\geq 0)$  la superficie ciclica ha l'irregolarità  $t \cdot q$ .

2. La nostra ricerca è basata sull'esistenza di due certi sistemi fondamentali per i cicli lineari della curva sezione della superficie  $f(x, y, z) = 0$  col piano  $y = \text{cost.}$ , curva che denoteremo con  $f_y$ . Precisamente (2), supposta la  $f(x, y, z) = 0$  a singolarità ordinarie e di irregolarità  $q (\geq 0)$ , uno dei sistemi fondamentali

$$(3) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2q}, \quad \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2p-2q},$$

è costituito di due parti, la prima delle quali,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2q}$ , è formata da  $2q$  cicli formanti sistema fondamentale per i cicli invarianti di  $f_y$ ; per i cicli cioè che ritornano in sé quando la  $f_y$  ritorna in sé dopo che  $y$  avrà descritto un qualsiasi cammino chiuso sul piano di Gauss su cui si immagina rappresentata la variabile complessa  $y$ . Si suppone che tale cammino eviti di passare per i punti  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , che possiamo supporre al finito (3), in cui la curva (irriducibile)  $f_y$  acquista un nuovo punto doppio, abbassando il proprio genere da  $p$  a  $p - 1$ .

L'altro sistema di cicli di  $f_y$

$$(4) \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2q}, \quad \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-2q},$$

è pur esso costituito di due parti, di cui la prima  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2q}$  forma una base intermedia per i cicli di Picard della superficie  $f(x, y, z) = 0$ , mentre  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-2q}$  forma su  $f_y$  una base per i cicli lineari di torsione. Dicesi ciclo di torsione ogni ciclo della curva  $f_y$  il quale, od è nullo sulla superficie, oppure ammette un multiplo nullo; ed appunto ogni tal ciclo si può espri-

(2) A. LO' VOI, *Sui sistemi associati di cicli lineari e di molteplicità a tre dimensioni su una superficie algebrica*. «Giornale di Matematiche di Battaglini», vol. LXXI (1933) n. 5. Avvertiamo che le notazioni ivi usate, vengono ora modificate leggermente, per ragioni di semplicità. Avvertiamo inoltre che ora per sistema fondamentale intendiamo un sistema di cicli *indipendenti* e tali che le loro combinazioni lineari forniscano tutti i cicli della categoria che si considera.

(3) Il fascio  $\{f_y\}$  delle curve  $y = \text{cost.}$  da noi considerato è quello usato da S. LEFSCHETZ, in *L'analysis situs et la géométrie algébrique*. [Gauthier-Villars, Paris (1914)], cap. II. I cicli  $\delta$  del LEFSCHETZ (nulli sulla superficie) noi li denoteremo con  $\delta^0$ .

mere come combinazione lineare dei cicli  $\delta$  che entrano nel sistema (4). La matrice delle mutue intersezioni dei cicli (3) e (4) è espressa dalla tabella (5)

(5)

	$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2q}$	$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{2p-2q}$
$\beta_1$	1 0...0	0 0...0
$\beta_2$	0 1...0	0 0...0
$\vdots$	.....	.....
$\beta_{2q}$	0 0...1	0 0...0
$\rho_1$	0 0...0	1 0...0
$\rho_2$	0 0...0	0 1...0
$\vdots$	.....	.....
$\rho_{2p-2q}$	0 0...0	0 0...1

3. Noi possiamo fare una arbitraria sostituzione unimodulare a coefficienti interi sui cicli  $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{2p-2q}$  ma fare la sostituzione trasposta dell'inversa sui cicli  $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{2p-2q}$ , affinchè la tabella (5) rimanga la stessa. Ed è noto (5) che, salvo a fare una opportuna sostituzione unimodulare intera sui cicli  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2p-2q$ ), si può supporre che i coefficienti di torsione  $t_i$ , e cioè i minimi interi  $t_i$  per cui si abbiano l'omologie

$$t_i \delta_i \sim 0,$$

soddisfino alla condizione che i rapporti  $\frac{t_{i-1}}{t_i}$  siano interi, e che sia

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_\sigma > 1 \quad ; \quad t_{\sigma+1} = \dots = t_{2p-2q} = 1^0.$$

Il numero  $\sigma$  (di Severi) soddisfa per ipotesi alla disuguaglianza  $1 \leq \sigma \leq 2p-2q$ .

4. Cominciamo col semplificare le nostre ipotesi supponendo

$$t_1 = 2 \quad , \quad t_2 = t_3 = \dots = t_{2p-2q} = 1;$$

ci mettiamo quindi nel caso più semplice, nel caso cioè che la superficie  $f(x, y, z) = 0$  possieda un solo effettivo ciclo di torsione  $\delta_1$  e che questo abbia il coefficiente di torsione 2; cioè sia  $2\delta_1 \sim 0, \delta_1 \not\sim 0$ .

Esisterà (n. 1) un radicale (2)

$$u = \sqrt{\varphi(x, y, z)}$$

che cambierà di segno quando il punto  $(x, y, z)$  percorre il ciclo  $\delta_1$  mentre ritorna in sé quando il punto  $(x, y, z)$  percorre un qualsiasi dei rimanenti cicli  $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2q} \delta_2 \dots \delta_{2p-2q}$  del sistema fondamentale (4) di cui  $\delta_1$  fa parte.

(4) Loc. cit. (2) n. 5.

(5) Cfr. per esempio, S. LEFSCHETZ, *Topology*, cap. I, n. 22.

Con la stessa lettera  $f_y$  denotiamo la superficie di Riemann relativa alla curva  $f_y$  sezione della superficie (1) (che denoteremo con  $f$ ) col piano  $y = \text{cost.}$  In modo analogo denoteremo con  $F$  la superficie (e anche la relativa varietà riemanniana a 4 dimensioni) che si ottiene aggiungendo il radicale  $u$  al campo di razionalità della  $f$ ; e scriveremo

$$F \equiv \{f(x, y, z) = 0 \quad ; \quad u = \sqrt{\varphi(x, y, z)}\}.$$

Diremo  $F_y$ , sia la curva sezione  $y = \text{cost.}$  della  $F$ , sia la superficie di Riemann di questa curva.

Orbene, per costruire quest'ultima superficie di Riemann  $F_y$ , noi penseremo di sovrapporre alla superficie di Riemann  $f_y$  una superficie uguale, e di connettere queste due superficie lungo il ciclo  $\rho_1$  che, giusto la tabella (5), incontra in un punto il ciclo di torsione  $\delta_1$ , mentre non incontra nessuno dei rimanenti cicli (4).

Queste due superficie sovrapposte e così connesse, li diremo i due fogli della superficie di Riemann  $F_y$ , e li denoteremo con  $f'_y, f''_y$ . Scriveremo  $F_y \equiv \{f'_y + f''_y\}$ . Ogni ciclo  $\tau$  di  $f_y$  pensato su  $f'_y$  si denoterà con  $\tau'$ , e pensato su  $f''_y$  si denoterà con  $\tau''$ .

Se  $\tau$  è un ciclo chiuso,  $\tau'$  e  $\tau''$  saranno aperti solo se  $\tau$  incontra  $\rho_1$  un numero dispari di volte.

È evidente che ad un punto  $(x, y, z)$  di  $f_y$  corrispondano due punti di  $F_y$  posti uno sul primo foglio  $f'_y$  ed uno sul secondo foglio  $f''_y$ . Questi due punti sono immagini dei punti  $(x, y, z; u)$ ,  $(x, y, z; -u)$  della curva algebrica  $F_y$ . Per ottenere la varietà di Riemann di  $F$  penseremo poi di far variare  $y$  per tutto il piano di Gauss su cui questa variabile si rappresenta.

5. Il ciclo  $\delta_1$  di  $f_y$  incontra il ciclo  $\rho_1$  in un punto, quindi ad esso corrispondono due cicli aperti  $\delta'_1, \delta''_1$ ; ma al ciclo  $2\delta_1$  corrisponde su  $F_y$  un ciclo chiuso che denoteremo con  $[\delta'_1 + \delta''_1]$  e cioè

$$(6) \quad [\delta'_1 + \delta''_1] \doteq \delta'_1 + \delta''_1.$$

Ai rimanenti cicli  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2q}, \delta_2, \dots, \delta_{2p-2q}$ , che non incontrano  $\rho_1$ , corrispondono ordinatamente sul primo foglio  $f'_y$  i cicli (chiusi)

$$(7) \quad \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{2q}, \quad \delta'_2, \dots, \delta'_{2p-2q},$$

e sul secondo foglio i cicli

$$(8) \quad \gamma''_1, \gamma''_2, \dots, \gamma''_{2q}, \quad \delta''_2, \dots, \delta''_{2p-2q}.$$

Nel n. seguente dimostreremo che i cicli (6), (7) (8) costituiscono una base per i cicli lineari della superficie di Riemann  $F_y$ ; e cioè, ogni ciclo di  $F_y$  è omologo ad una combinazione lineare dei cicli (6), (7), (8).

Qui, osserviamo che il ciclo  $\rho_1$  su  $F_y$  è da pensarsi due volte: una volta come linea di passaggio da uno dei bordi del primo foglio  $f'_y$  al bordo opposto di  $f'_y$ ; e una volta come linea di passaggio fra i rimanenti due bordi. Però, questi due cicli sono omologhi su  $F_y$ ; poichè essi costituiscono insieme (e per-



corsi in senso inverso) la frontiera del primo foglio  $f'_1$ ; ed  $f'_y$  è niente altro che la superficie  $f_y$  tagliata lungo il ciclo  $\rho_1$ . Del resto, è ben noto che se su una superficie di Riemann  $f_y$  si fa un taglio che non spezzi la superficie in due parti, è possibile deformare con continuità un ciclo che scorre lungo tutto uno degli orli del taglio in modo da ridurlo al ciclo che scorre parallelamente lungo l'altro bordo. Possiamo esprimere ciò scrivendo l'omologia

$$(9) \quad \rho'_1 \sim \rho''_1.$$

6. L'omologia (9) ci autorizza ad usare un'unica lettera, ed adopereremo la stessa lettera  $\rho_1$ , per denotare i due cicli lungo cui avviene la connessione fra i due fogli  $f'_y$  ed  $f''_y$  della  $F_y$ .

Denoteremo con  $(\tau, \sigma)$  il numero algebrico delle intersezioni di due qualsiasi cicli  $\tau$  e  $\sigma$ ; essendo  $(\rho_1, \delta_1) = 1$ , per la (5), risulta

$$(\rho_1, [\delta'_1 + \delta''_1]) = +1,$$

ove, il segno dell'intersezione è + perchè nel passaggio da  $f_y$  ad  $f'_y$  (e ad  $f''_y$ ) si rispettano i sensi positivi di percorrenza. Dato allora un qualsiasi ciclo  $\tau$  di  $F_y$  esisterà un intero  $\lambda$  (positivo, negativo o nullo) tale che il ciclo differenza

$$(10) \quad \tau - \lambda[\delta'_1 + \delta''_1],$$

opportunamente deformato, non incontri affatto il ciclo  $\rho_1$ , e quindi esso si compone di due cicli giacenti, uno interamente sul primo foglio  $f'_y$  e l'altro sul secondo foglio  $f''_y$ . È facile vedere che il ciclo che sta sul primo foglio, si esprime mediante i cicli (7), e l'altro mediante i cicli (8). E invero, se proiettiamo, per esempio quello del primo foglio, su  $f_y$  abbiamo un ciclo che si esprime come combinazione dei cicli (4), ma in tale combinazione non può entrare  $\delta_1$  perchè, per la (5), si avrebbe un ciclo che incontra  $\rho_1$ . Dunque il ciclo proiezione su  $f_y$  è deformabile, e si può naturalmente deformare senza incontrare mai  $\rho_1$ , in una combinazione dei cicli  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2q}, \delta_2, \dots, \delta_{2p-2q}$ . In corrispondenza, su  $f'_y$  il ciclo che si era proiettato è deformabile (rimanendo sempre sul primo foglio) ad una combinazione dei cicli (7). Analogamente la parte del ciclo (10) posta sul secondo foglio  $f''_y$  sarà deformabile in una combinazione dei cicli (8), senza mai uscire dal secondo foglio. In definitiva il ciclo  $\tau$  sarà una combinazione lineare dei cicli (6), (7), (8) così come era stato enunciato nel n. 5.

I cicli (6), (7), (8) sono in tutto  $1 + 2(2p-1) = 4p-1$ ; cioè in numero dispari; quindi essi non possono essere indipendenti sulla curva algebrica  $F_y$  ed effettivamente l'omologia (9) porta ad un'omologia del tipo

$$\begin{aligned} & v_1(\gamma'_1 - \gamma''_1) + \dots + v_{2q}(\gamma'_{2q} - \gamma''_{2q}) + \\ & + v_{2q+1}(\delta'_2 - \delta''_2) + \dots + v_{2p-1}(\delta'_{2p-2q} - \delta''_{2p-2q}) \sim 0. \end{aligned}$$

7. Passiamo ora a considerare i cicli di  $F_y$  che sono *invarianti* al variare di  $y$  nel piano di Gauss. Notiamo anzitutto che se un ciclo di  $f_y$  è invariante, il suo corrispondente su  $F_y$ , se è chiuso, è pur esso invariante; ritorna cioè

in sè, od in un suo omologo, *quando y ritorna in sè*. Se  $\beta$  è il ciclo invariante di  $f_y$  e  $\beta', \beta''$  i corrispondenti cicli chiusi di  $F_y$ , siccome  $\beta$  ritorna in sè, basta far vedere che  $\beta'$  e  $\beta''$  non si scambiano quando la  $y$ , partendo da una posizione generica, percorre un qualsiasi cammino chiuso nel proprio piano. Salvo a fare una sostituzione omografica, si può supporre che  $u$  sia diverso da zero in un punto  $P$  che sia base, per il fascio di curve  $\{f_y\}$ , supponendo  $\beta$  passante per  $P$  i due cicli  $\beta'$  e  $\beta''$  sono caratterizzati dalle due determinazioni di  $u$  in  $P$  e al ritorno di  $\beta$  in sè anche  $\beta'$  e  $\beta''$  ritornano in sè. Si conclude che i cicli invarianti della superficie multipla ciclica considerata sono

$$\beta'_1, \dots, \beta'_{2f}, \beta''_1, \dots, \beta''_{2g}.$$

Che questi  $4g$  cicli siano indipendenti sulla curva  $F_y$  segue subito dal fatto che per esempio  $\beta'_1$  e  $\beta''_1$  sono i soli di essi che incontrano i cicli  $\gamma'_1$  e  $\gamma''_1$  e in un solo punto; e se  $\beta'_1$  incontra, per esempio  $\gamma'_1$  (in un sol punto posto sul foglio  $f'_y$  a cui appartiene  $\gamma'_1$ ) allora  $\beta''_1$  incontrerà  $\gamma''_1$  nel punto corrispondente posto nell'altro foglio  $f''_y$ .

*Ne segue che l'irregolarità della superficie  $F$  è  $2g$ , cioè doppia dell'irregolarità di  $f$ .*

9. I risultati ottenuti si estendono subito al caso generale in cui il coefficiente di torsione relativo al ciclo considerato sia qualunque ( $t_i \geq 2$ ) e gli altri coefficienti di torsione siano pure qualunque; ed in particolare si ha che *la superficie multipla ciclica definita al n. 1 ha l'irregolarità  $tq$  se  $q$  è l'irregolarità della superficie  $f(x, y, z) = 0$ .*

**Matematica.** — *Sulle irregolarità delle superficie multiple cicliche e lo scioglimento della torsione delle superficie algebriche.* Nota II (\*) di A. Lo Voi, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

10. In questa seconda parte dimostreremo che *ogni superficie dotata di torsione è l'immagine di una involuzione sostenuta da una superficie priva di torsione.*

11. In tutto ciò che segue si tenga presente che (n. 2) il fascio di curve  $y = \text{cost.}$  sulla superficie  $f$  è del tutto generico rispetto alla curva di contatto ( $t$ -plo) della superficie  $f$  con la superficie  $\varphi(x, y, z) = 0$ ; e che sul piano  $y$ , sono pure scelti genericamente un punto  $a$  ed i cammini  $aa_i$  che lo congiungono con i punti  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , purchè questi cammini non si attraversino. Una volta fissati tali cammini restano determinati sulla curva  $f_a \equiv f(x, a, z) = 0$  due punti di diramazione (della  $z$  come funzione di  $x$ ) che denoteremo con  $\alpha_i, \alpha'_i$ , i quali vanno variando se in luogo di  $f_a$  si considera la  $f_y$  con  $y$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1947.

parametro variabile su  $aa_i$ , ed  $\alpha_i, \alpha'_i$  coincidono sulla curva  $y = a_i$  <sup>(1)</sup>. Denotiamo con  $\delta_i^0$  il ciclo che avvolge sulla  $f_y$  i due detti punti di diramazione, e teniamo presente che i cicli  $\delta_1^0, \delta_2^0, \dots, \delta_n^0$  non solo sono nulli sulla superficie  $f$  ma essi formano una base per tutti i cicli della curva  $f_y$  che sono nulli sulla  $f$ .

In particolare, essendo  $t_1 \delta_1$  un ciclo nullo sulla superficie (n. 3) si avrà sulla curva  $f_y$  l'omologia

$$(11) \quad t_1 \delta_1 \sim \lambda_1 \delta_1^0 + \lambda_2 \delta_2^0 + \dots + \lambda_n \delta_n^0.$$

Consideriamo la superficie  $F$  dei numeri precedenti. Siccome il radicale  $u = \sqrt[t_1]{\varphi_1(x, y, z)}$  non è diramato sulla  $f$ , e siccome è  $\delta_i^0 \sim 0$  su  $f_y$ , si ha che se  $(x, y, z)$  percorre il ciclo  $\delta_i^0$  la  $u$  ritorna in sé e quindi al ciclo  $\delta_i^0$  di  $f_y$  corrispondono su  $F_y$  due cicli chiusi che si annullano per  $y = a_i$ .

Uno di tali cicli chiusi di  $F_y$ , che denoteremo con  $[\delta_i^0]$ , quando  $y$  percorre il cammino  $aa_i$  descrive una superficie (reale)  $[\Delta_i]$  che ha per frontiera esclusivamente la posizione di  $[\delta_i^0]$  su  $F_a$ . Dunque  $[\delta_i^0]$  è un ciclo nullo di  $F$ .

D'altro canto l'omologia (11) sulla  $F_a$  diviene del tipo (per  $t_1 = 2$ )

$$[\delta'_1 + \delta''_1] \sim \lambda_1 [\delta_1^0] + \lambda_2 [\delta_2^0] + \dots + \lambda_n [\delta_n^0]$$

e quindi anche il ciclo  $[\delta'_1 + \delta''_1]$  che sta al primo membro è un ciclo nullo su  $F$ .

12. Possiamo intanto dedurre che *ogni superficie i cui cicli di torsione costituiscono un gruppo ciclico, può ottenersi da una superficie priva di torsione dello spazio a quattro dimensioni  $(x, y, z, u)$ , la quale sia mutata in sé da una omologia ciclica di questo spazio, avente un asse a tre dimensioni. Precisamente, basterà fare l'immagine dell'involuzione subordinata sulla superficie dalla omologia stessa.*

Infatti, essendo ciclico il gruppo di torsione sarà  $t_1 \geq 2, t_2 = \dots = 1$  e riferendoci per semplicità al caso  $t_1 = 2$ , abbiamo precisamente dimostrato: che i cicli (6), (7), (8) costituiscono una base per i cicli di  $F_y$ , che il ciclo (6) è nullo; che i cicli  $\gamma', \gamma''$  sono indipendenti su  $F$  perchè (n. 9) l'irregolarità di  $F$  è  $t_1 q = 2q$ ; ed i rimanenti cicli (7), (8) son situati ciascuno completamente in un foglio, e quindi, poichè essi son nulli sulla superficie  $f$ , lo sono anche sulla superficie  $F$ .

La  $F$  è dunque priva di torsione.

13. Passiamo ora al caso generale  $\sigma \geq 1$  del n. 3, e denotiamo con  $u_1, u_2, \dots, u_\sigma$  i radicali (di De Franchis) che rispettivamente pigliano il moltiplicatore  $e^{2\pi i/t_1}$  lungo  $\delta_1$ ,  $e^{2\pi i/t_2}$  lungo  $\delta_2, \dots, e^{2\pi i/t_\sigma}$  lungo  $\delta_\sigma$ , mentre restano immutati lungo ogni altro ciclo del sistema (4). Per esempio  $u_1$  resta immutato dopo di aver percorso uno dei cicli  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2q}, \delta_2, \dots, \delta_{2p-2q}$ ; quindi, aggiungendo  $u_1$  al campo di razionalità della superficie di partenza

(1) Cfr. loc. cit. (3) nella Nota I, dal medesimo titolo, pubblicata in questi « Rendiconti », vol. III, fasc. 3-4, p. 223, 1947. Si veda anche A. LO VOI, *Chiarimenti ad un teorema di Lefschetz*. [« Annuario del Liceo Scientifico di Siracusa », 1927].

$f(x, y, z) = 0$ , si ha una superficie  $F_1$  che è come quella denotata con  $F$  nei numeri precedenti, salvo che si è ora sciolta la torsione proveniente dal solo ciclo  $\delta_1$  e non dagli altri  $\delta_2, \dots, \delta_\sigma$ . Anzi, a prima vista può sembrare che il problema del totale scioglimento della torsione si sia venuto a complicare, perchè, per esempio,  $\delta_2$ , sulla  $F_1$ , ha dato luogo a  $t_1$  cicli di torsione

$$(12) \quad \delta_2', \delta_2'', \dots, \delta_2^{(t_1)}$$

situati rispettivamente sui  $t_1$  fogli  $f_y', f_y'', \dots, f_y^{(t_1)}$  di  $F_1$ . Orbene, non si deve tentare di sciogliere singolarmente questi ultimi cicli, ma si devono trattare in blocco i cicli (12) aggiungendo al campo di razionalità di  $F_1$  il radicale  $u_2$ .

E infatti,  $u_2 = \sqrt[t_2]{\varphi_2(x, y, z)}$  si può considerare funzione del punto  $(x, y, z, u_1)$  della  $F_1$ , e dire che esso acquista il moltiplicatore  $e^{2\pi i/t_2}$  quando si percorre uno qualsiasi dei cicli (12), proveniente dal ciclo  $\delta_2$ , mentre resta immutato quando si percorre un ciclo di  $F_1$  proveniente da un qualsiasi altro ciclo del sistema (4). Se è  $\sigma > 2$  si continuerà il ragionamento fino al totale scioglimento della torsione.

Si ha quindi che la superficie data  $f(x, y, z) = 0$  è immagine di una involuzione (prodotto dell'involuzione  $u_h' = e^{2\pi i/t_h} \cdot u_h$ , per  $h = 1, 2, \dots, \sigma$  sostenuta dalla superficie (dello spazio a  $3 + \sigma$  dimensioni)

$$F = \{f(x, y, z) = 0, \quad u_1 = \sqrt[t_1]{\varphi_1(x, y, z)}, \dots, u_\sigma = \sqrt[t_\sigma]{\varphi_\sigma(x, y, z)}\}$$

che si ottiene aggiungendo i radicali  $u_1, u_2, \dots, u_\sigma$  al campo di razionalità della superficie data.

**Matematica.** — *Sulle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes.*

Nota di B. PETTINEO, presentata (\*) dal Corrisp. M. CIPOLLA.

In questa Nota ci proponiamo di stabilire alcune proprietà fondamentali delle funzioni integrabili secondo la definizione generale data dal prof. Picone<sup>(1)</sup>.

Esponiamo brevemente questa definizione.

Siano dati un insieme  $\Delta$  dello spazio  $S$  ad una dimensione ed una funzione reale  $f(P)$  del punto  $P$  variabile in  $\Delta$ . Sia assegnata inoltre negli intervalli  $T$  dello spazio  $S$  una funzione determinante  $\alpha(T)$ , cioè una funzione d'intervallo, additiva ed a variazione finita. Denotiamo con  $[C]_{f, \Delta}$  la classe degli insiemi  $C$  limitati e chiusi, contenuti in  $\Delta$  e nei quali la funzione  $f(P)$  è continua e indichiamo con  $x$  l'integrale di Riemann-Stieltjes

$$\int_C f(P) d\alpha.$$

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Per i richiami alla teoria dell'integrazione, come pure per la terminologia e le notazioni qui usate, cfr. M. PICONE, *Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni*, Pisa, Libreria Goliardica, a. 1945.



Ordiniamo la variabile  $x$  nel seguente modo: diciamo che  $x'$  segue  $x$  quando l'insieme  $C'$  contiene  $C$ , essendo  $C'$  e  $C$  gli insiemi della classe  $[C]_{f,\Delta}$  pei quali si ha

$$x' = \int_{C'} f(P) d\alpha, \quad x = \int_C f(P) d\alpha.$$

In tal modo la variabile  $x$  possiede un minimo ed un massimo limite, che si chiamano *minimo* e *massimo integrali (assoluti)* della funzione  $f(P)$  nell'insieme  $\Delta$ , rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T)$ . Se essi coincidono e sono finiti, la funzione  $f(P)$  si dice (*assolutamente*) *integrabile* ed il loro valore comune, che si denota col simbolo

$$(1) \quad \int_{\Delta} f(P) d\alpha,$$

dicesi l'*integrale (assoluto)* della funzione  $f(P)$  (nel dato insieme  $\Delta$  e rispetto alla data funzione determinante  $\alpha(T)$ ).

1. Denotiamo con  $[L]_{f,\Delta}$  la classe degli insiemi  $L$  *lebesguiani*<sup>(2)</sup> contenuti in  $\Delta$  e nei quali  $f(P)$  è quasi continua e integrabile. Orbene:

Se la funzione  $f(P)$  è integrabile in  $\Delta$ , in corrispondenza ad ogni numero  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme  $C_\varepsilon$  della classe  $[C]_{f,\Delta}$ , tale che abbiano luogo le relazioni

$$(2) \quad \left| \int_{\Delta} f(P) d\alpha - \int_L f(P) d\alpha \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_{\Delta} f(P) d\alpha - \int_{C_\varepsilon} f(P) d\alpha \right| < \varepsilon,$$

qualunque sia l'insieme  $L$  contenente  $C_\varepsilon$  ed appartenente alla classe  $[L]_{f,\Delta}$ .

Consideriamo una decomposizione  $D_{\Delta,f}$ <sup>(4)</sup>, cioè una successione di insiemi

$$(3) \quad \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$$

che godano delle seguenti proprietà:

α) si abbia  $\Delta = \Delta_1 \overset{\circ}{+} \Delta_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} \Delta_n \overset{\circ}{+} \dots$ <sup>(5)</sup>;

β) se  $L$  appartiene alla classe  $[L]_{f,\Delta}$ , ogni insieme  $L \Delta_n$  appartenga pure alla stessa classe;

γ) se  $C$  appartiene alla classe  $[C]_{f,\Delta}$ , esista un indice  $n$ , tale che si abbia

$$C = C \Delta_1 \overset{\circ}{+} C \Delta_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} C \Delta_n;$$

δ) ogni insieme  $\Delta_n$  sia limitato ed in esso la funzione  $f(P)$  sia pure limitata.

Valgono le seguenti proposizioni<sup>(3)</sup>:

(2) Un insieme  $L$  si dice *lebesguiano* se, comunque si assegni un numero  $\varepsilon > 0$ , è possibile costruire un insieme chiuso  $C_\varepsilon$  contenuto in  $L$  ed un insieme aperto  $A_\varepsilon$  contenente  $L$ , in maniera da risultare  $\text{mis}_\alpha(A_\varepsilon - C_\varepsilon) < \varepsilon$ . (Cfr. M. PICONE, loc. cit.).

(3) Cfr. B. PETTINEO, *Sulla convergenza puntuale delle successioni di insiemi di funzioni quasi continue*, « Rend. Seminario Mat. Università di Roma », a. 1947, fasc. II.

A) Cambiando l'ordine dei termini di una  $D_{\Delta, f}$ , si ottiene ancora una  $D_{\Delta, f}$ .

B) Se è  $\Delta = \Delta' \overset{\circ}{+} \Delta''$ , le due successioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta' \Delta_1, \Delta' \Delta_2, \dots, \Delta' \Delta_n, \dots \\ \Delta'' \Delta_1, \Delta'' \Delta_2, \dots, \Delta'' \Delta_n, \dots \end{array} \right.$$

risultano rispettivamente decomposizioni  $D_{\Delta', f}$  e  $D_{\Delta'', f}$ .

C) Se è  $\Delta = \Delta' \overset{\circ}{+} \Delta''$  e per ogni insieme  $L$  della classe  $[L]_{f, \Delta}$  gli insiemi  $L\Delta'$  e  $L\Delta''$  appartengono pure a questa classe, ogni successione costituita da tutti i termini delle due successioni (4) è una  $D_{\Delta, f}$ .

Ha luogo pure il seguente teorema (4):

D) Se la funzione  $f(P)$  è integrabile nell'insieme  $\Delta$ , la serie

$$\int_{\Delta_1} f(P) d\alpha + \int_{\Delta_2} f(P) d\alpha + \dots + \int_{\Delta_n} f(P) d\alpha + \dots,$$

relativa ad una qualsivoglia decomposizione  $D_{\Delta, f}$ , è assolutamente convergente e la sua somma fornisce l'integrale (1).

Ciò premesso, supponiamo che la funzione  $f(P)$  sia integrabile nell'insieme  $\Delta$ , sicchè, dato ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$ , esiste un insieme  $C_\varepsilon$  della classe  $[C]_{f, \Delta}$ , tale che abbia luogo la seconda delle (2), qualunque sia l'insieme  $L$  contenente  $C_\varepsilon$  ed appartenente alla classe  $[L]_{f, \Delta}$ . Sia la (3) una decomposizione  $D_{\Delta, f}$ ; in base alla proprietà  $\gamma$ , fissiamo un indice  $n$  in modo che si abbia  $C_\varepsilon = C_\varepsilon \Delta_1 \overset{\circ}{+} C_\varepsilon \Delta_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} C_\varepsilon \Delta_n$ ; poniamo quindi  $J_n = \Delta_1 \overset{\circ}{+} \Delta_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} \Delta_n$ ,  $X_n = \Delta - J_n = \Delta_{n+1} \overset{\circ}{+} \Delta_{n+2} \overset{\circ}{+} \dots$ . Se  $E$  è un qualsivoglia insieme della classe  $[L]_{f, X_n}$ , possiamo porre, nella seconda delle (2),  $L = C_\varepsilon \overset{\circ}{+} E$ ; si ottiene

$$(5) \quad \left| \int_E f(P) d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Supponiamo viceversa che ad ogni numero  $\varepsilon > 0$  si possa far corrispondere un indice  $n$ , in modo che abbia luogo la (5), qualunque sia l'insieme  $E$  della classe  $[L]_{f, X_n}$ . Poichè la funzione  $f(P)$  è integrabile nell'insieme  $J_n$  (perchè è ivi limitata e l'insieme stesso è limitato), esiste un insieme  $C_\varepsilon$  della classe  $[C]_{f, J_n}$  tale che si abbia

$$(6) \quad \left| \int_{L_n} f(P) d\alpha - \int_{C_\varepsilon} f(P) d\alpha \right| < \varepsilon,$$

qualunque sia l'insieme  $L_n$  contenente  $C_\varepsilon$  ed appartenente alla classe  $[L]_{f, J_n}$ . Sia  $L$  un qualsivoglia insieme della classe  $[L]_{f, \Delta}$  e contenente pure  $C_\varepsilon$ . Poniamo

(4) Col simbolo  $\Delta_1 \overset{\circ}{+} \Delta_2 \overset{\circ}{+} \Delta_3 \overset{\circ}{+} \dots$  denotiamo la somma degli insiemi  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ , mettendo in evidenza il fatto che essi sono, a due a due, senza punti in comune.

$L_n = L_{J_n}$ ,  $E = L - L_n$  ed osserviamo che l'insieme  $L_n$  così ottenuto contiene  $C_\varepsilon$  ed appartiene alla classe  $[L]_{f, \Delta_n}$ ; ha luogo quindi la (6) ed inoltre si ha

$$\int_L f(P) d\alpha = \int_{L_n} f(P) d\alpha + \int_E f(P) d\alpha.$$

Si deduce, tenendo pure conto della (5),

$$\left| \int_L f(P) d\alpha - \int_{C_\varepsilon} f(P) d\alpha \right| < 2\varepsilon,$$

cosicchè la funzione  $f(P)$  risulta integrabile nell'insieme  $\Delta$ .

Concludendo:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione  $f(P)$  sia integrabile nell'insieme  $\Delta$  è che, comunque si scelga la  $D_{\Delta, f}$ , in corrispondenza ad ogni numero  $\varepsilon > 0$  esista un indice  $n$ , tale che abbia luogo la (5) per ogni insieme  $E$  della classe  $[L]_{f, \Delta_n}$ .*

2. Riesce ora facile dimostrare il seguente teorema:

II. *Ogni funzione  $f(P)$  integrabile in un insieme  $\Delta$  è altresì integrabile in ogni insieme  $\Delta'$  contenuto in  $\Delta$ .*

Sia la (3) una decomposizione  $D_{\Delta, f}$ ; poniamo successivamente

$$\begin{aligned} \Delta'' &= \Delta - \Delta', \\ \Delta'_n &= \Delta' \Delta_n, \quad \Delta''_n = \Delta'' \Delta_n, \\ X'_n &= \Delta'_{n+1} \overset{\circ}{+} \Delta'_{n+2} \overset{\circ}{+} \dots, \quad X''_n = \Delta''_{n+1} \overset{\circ}{+} \Delta''_{n+2} \overset{\circ}{+} \dots; \quad \left\{ \begin{array}{l} (n = 1, 2, 3, \dots) \end{array} \right. \\ X_n &= X'_n \overset{\circ}{+} X''_n \end{aligned}$$

In virtù del teorema I, dato ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$ , esiste un indice  $n$  tale che abbia luogo la (5) per ogni insieme  $E$  della classe  $[L]_{f, \Delta_n}$ .

Poichè tale classe contiene  $[L]_{f, \Delta'_n}$  e  $[L]_{f, \Delta''_n}$ , qualunque siano gli insiemi  $E'$  e  $E''$  appartenenti rispettivamente a queste ultime, si ha

$$\left| \int_{E'} f(P) d\alpha \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_{E''} f(P) d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Da ciò, tenuto conto della prop. B, segue subito, in virtù del teorema I, che  $f(P)$  è integrabile nei due insiemi  $\Delta'$  e  $\Delta''$ .

In base al teorema D, possiamo allora scrivere

$$(7) \quad \int_{\Delta'} f(P) d\alpha = \int_{\Delta'_1} f(P) d\alpha + \int_{\Delta'_2} f(P) d\alpha + \dots, \quad \int_{\Delta''} f(P) d\alpha = \int_{\Delta''_1} f(P) d\alpha + \int_{\Delta''_2} f(P) d\alpha + \dots$$

e se per ogni insieme  $L$  della classe  $[L]_{f, \Delta}$  i due insiemi  $L\Delta'$  e  $L\Delta''$  appartengono pure alla stessa classe, in virtù della prop. C, abbiamo

$$\int_{\Delta} f(P) d\alpha = \int_{\Delta'_1} f(P) d\alpha + \int_{\Delta''_1} f(P) d\alpha + \int_{\Delta'_2} f(P) d\alpha + \int_{\Delta''_2} f(P) d\alpha + \dots$$

Si deduce, tenuto conto delle (7),

$$(8) \quad \int_{\Delta} f(P) d\alpha = \int_{\Delta'} f(P) d\alpha + \int_{\Delta''} f(P) d\alpha.$$

Dunque:

III. Nelle ipotesi della prop. C e qualora  $f(P)$  sia integrabile in  $\Delta$ , ha luogo la (8). In particolare: Se  $f(P)$  è integrabile nell'insieme  $\Delta$  e se questo si scompone nella somma di due insiemi  $\Delta'$  e  $\Delta''$ , senza punti in comune uno dei quali sia lebesguiano, allora ha luogo la (8).

3. Dimostriamo ora la seguente proposizione:

IV. Se  $f(P)$  è integrabile in  $\Delta$ , comunque si assegni un numero  $\varepsilon > 0$ , è sempre possibile costruire un intervallo  $T_\varepsilon$  e fissare un altro numero  $\sigma_\varepsilon > 0$ , in maniera che, comunque si prenda l'insieme  $E$  in  $\Delta$ , dalla relazione  $\text{mis}_\alpha(ET_\varepsilon) < \sigma_\varepsilon$  segua la (5).

Fissata la (3) come decomposizione  $D_{\Delta,1}$ , in virtù del teorema I, esiste un indice  $n$ , tale che si abbia

$$(9) \quad \left| \int_U f(P) d\alpha \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

qualunque sia l'insieme  $U$ , lebesguiano o no, contenuto nell'insieme  $X_n = \Delta_{n+1} \cup \Delta_{n+2} \cup \dots$ . Sia  $T_\varepsilon$  un intervallo contenente l'insieme limitato  $J_n = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_n$  e sia  $E$  un qualsivoglia insieme contenuto in  $\Delta$ . Dalla relazione  $E = ET_\varepsilon \cup (E - T_\varepsilon)$ , in virtù del teorema III, si ha

$$\int_E f(P) d\alpha = \int_{ET_\varepsilon} f(P) d\alpha + \int_{E-T_\varepsilon} f(P) d\alpha$$

e poichè  $E - T_\varepsilon$  è contenuto in  $X_n$ , in virtù della (9), segue

$$(10) \quad \left| \int_E f(P) d\alpha - \int_{ET_\varepsilon} f(P) d\alpha \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, la funzione  $|f(P)|$  è limitata nell'insieme  $J_n$ , sicchè, se  $M$  è il suo estremo superiore (in tale insieme), si ha

$$\left| \int_{ET_\varepsilon} f(P) d\alpha \right| \leq M \text{mis}_\alpha(ET_\varepsilon).$$

Basta porre allora  $\sigma_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2M}$ , perchè dalla (10) segua la (5).

Per conseguenza:

V. Se  $f(P)$  è integrabile in  $\Delta$  e se, al variare dell'insieme  $E$  in  $\Delta$ , si ha  $\lim \text{mis}_\alpha E = 0$ , si ha pure

$$\lim \int_E f(P) d\alpha = 0.$$



## 4. Vogliamo stabilire infine questo teorema:

VI. Se è  $\Delta = \Delta^{(1)} \overset{\circ}{+} \Delta^{(2)} \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} \Delta^{(n)} \overset{\circ}{+} \dots$  e per ogni insieme  $L$  della classe  $[L]_{f,\Delta}$  gli insiemi  $L\Delta^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) appartengono pure alla stessa classe, qualora la funzione  $f(P)$  sia integrabile in  $\Delta$ , si ha

$$(II) \quad \int_{\Delta} f(P) d\alpha = \int_{\Delta^{(1)}} f(P) d\alpha + \int_{\Delta^{(2)}} f(P) d\alpha + \dots + \int_{\Delta^{(n)}} f(P) d\alpha + \dots$$

Che la serie precedente abbia significato, si deduce immediatamente dal teorema II. Ciò premesso, fissiamo ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$  e consideriamo un insieme  $C_\varepsilon$  della classe  $[C]_{f,\Delta}$ , tale che abbia luogo la prima delle (2) per ogni insieme  $L$  contenente  $C_\varepsilon$  ed appartenente alla classe  $[L]_{f,\Delta}$ . Posto  $C^{(n)} = C_\varepsilon \Delta^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), si ha

$$\int_{C_\varepsilon} f(P) d\alpha = \int_{C^{(1)}} f(P) d\alpha + \int_{C^{(2)}} f(P) d\alpha + \dots + \int_{C^{(n)}} f(P) d\alpha + \dots$$

od anche, denotando con  $R_n$  il resto dopo l' $n$ -imo termine di questa serie,

$$\int_{C_\varepsilon} f(P) d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{C^{(i)}} f(P) d\alpha + R_n.$$

Occorre ricordare che

$$(I2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Fissato ora  $n$ , consideriamo un insieme  $C_i$  della classe  $[C]_{f,\Delta^{(i)}}$ , tale che si abbia

$$(I3) \quad \left| \int_{\Delta^{(i)}} f(P) d\alpha - \int_{L_i} f(P) d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

qualunque sia l'insieme  $L_i$  contenente  $C_i$  ed appartenente alla classe  $[L]_{f,\Delta^{(i)}}$ . Scegliendo  $L_i = C_i + C^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e quindi

$$(I4) \quad L = L_1 \overset{\circ}{+} L_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} L_n \overset{\circ}{+} C^{(n+1)} \overset{\circ}{+} C^{(n+2)} \overset{\circ}{+} \dots,$$

risulta  $L = C_\varepsilon + (C_1 \overset{\circ}{+} C_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} C_n)$ ; dunque  $L$  appartiene alla classe  $[C]_{f,\Delta}$  (epperò a  $[L]_{f,\Delta}$ ). Dalla (I4) si trae allora

$$\int_L f(P) d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} f(P) d\alpha + R_n,$$

da cui segue, in virtù della prima delle (2) e delle (I3),

$$\left| \int_{\Delta} f(P) d\alpha - \sum_{i=1}^n \int_{\Delta^{(i)}} f(P) d\alpha - R_n \right| < 2\varepsilon.$$

Da questa, infine, tenuto conto della (I2) e del fatto che  $\varepsilon$  è arbitrario, si trae la (II).

**Matematica.** — *Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes.* Nota I di B. PETTINEO, presentata (\*) dal Corrisp. M. CIPOLLA.

Il prof. Picone ha dato una definizione generale dell'integrale di Stieltjes <sup>(1)</sup>, che brevemente esponiamo. Nello spazio  $S$ , ad una dimensione, siano  $\Delta$  un insieme completamente arbitrario ed  $f(P)$  una funzione reale pur'essa arbitraria. Negli intervalli  $T$  di  $S$  sia assegnata inoltre una *funzione determinante*  $\alpha(T)$ , cioè una funzione *additiva* ed a *variazione finita*, e siano  $V_\alpha(T)$ ,  $p_\alpha(T)$  e  $q_\alpha(T)$  rispettivamente la *variazione totale*, quella *positiva* e quella *negativa* di  $\alpha(T)$  nel generico intervallo  $T$ . Denotando con  $[C]_{f,\Delta}$  la classe degli insiemi  $C$  *limitati e chiusi*, contenuti in  $\Delta$  e nei quali  $f(P)$  è continua, l'integrale di Riemann-Stieltjes

$$\int_C f(P) d\alpha$$

risulta una funzione dell'insieme  $C$  al variare di questo in  $[C]_{f,\Delta}$  e posto

$$x = \int_C f(P) d\alpha,$$

si possono ordinare le operazioni di calcolo della variabile  $x$  nel seguente modo: per ogni operazione  $O$  relativa all'insieme  $C$  di  $[C]_{f,\Delta}$  si dicono ad essa *seguenti* tutte quelle operazioni che si riferiscono ad insiemi  $C'$  di  $[C]_{f,\Delta}$ , pei quali è  $C \rightarrow C'$ . In tal modo resta ordinata la variabile  $x$ , la quale avrà quindi un massimo ed un minimo limite, che si dicono ottenuti per  $C \rightarrow \Delta$  in  $[C]_{f,\Delta}$ . Essi si denotano rispettivamente con

$$\int_{\Delta}'' f(P) d\alpha \quad \text{e} \quad \int_{\Delta} f(P) d\alpha$$

e diconsi *massimo e minimo integrali (assoluti) di  $f(P)$  in  $\Delta$  (rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T)$ )*. Se essi coincidono si dice che la funzione  $f(P)$  è a *integrale (assoluto) determinato* e se tale integrale, che denotasi col simbolo

$$\int_{\Delta} f(P) d\alpha,$$

è finito, la funzione si dice (*assolutamente*) *integrabile*.

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Cfr. M. PICONE, *Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni*, Pisa, Libreria Goliardica, a. 1945.

Si dice poi che la funzione  $f(P)$  è *sommabile* (nell'insieme  $\Delta$  e rispetto alla  $\alpha(T)$ ), se ha valore finito l'integrale

$$\int_{\Delta} |f(P)| dV_{\alpha}.$$

Si dimostra il teorema: *Ogni funzione  $f(P)$  sommabile in un insieme  $\Delta$  è ivi (assolutamente) integrabile.* Hanno luogo allora le relazioni

$$\int_{\Delta} f(P) d\alpha = \int_{\Delta} f(P) dp_{\alpha} - \int_{\Delta} f(P) dq_{\alpha}, \quad \int_{\Delta} f(P) dV_{\alpha} = \int_{\Delta} f(P) dp_{\alpha} + \int_{\Delta} f(P) dq_{\alpha}.$$

Il prof. Picone pone quindi l'interessante problema di sapere se le funzioni integrabili sono sommabili ed egli stesso presenta il seguente teorema: *Se la funzione  $f(P)$  è integrabile in  $\Delta$ , rispetto ad una funzione determinante NON NEGATIVA, essa è pure sommabile* <sup>(2)</sup>.

In questa ed in altre Note successive, risolveremo il problema proposto nel caso generale.

**SULLE FUNZIONI DETERMINANTI. — I.** Assegnata la funzione determinante  $\alpha(T)$ , consideriamo un punto  $P$  qualunque di  $S$  ed un intervallo  $T$  che abbia il punto  $P$  come estremo destro o come estremo sinistro. Esiste sempre il limite

$$\lim_{T \rightarrow P} \alpha(T),$$

che denotiamo con  $\alpha'(P)$  se  $P$  è estremo destro di  $T$  e con  $\alpha''(P)$  se  $P$  è estremo sinistro di  $T$ . Definiamo in modo analogo i limiti

$$V_{\alpha}(P), V''_{\alpha}(P) \quad ; \quad p_{\alpha}(P), p''_{\alpha}(P) \quad ; \quad q_{\alpha}(P), q''_{\alpha}(P).$$

Risulta

$$\alpha'(P) = p'_{\alpha}(P) - q'_{\alpha}(P), \quad V'_{\alpha}(P) = p'_{\alpha}(P) + q'_{\alpha}(P);$$

$$\alpha''(P) = p''_{\alpha}(P) - q''_{\alpha}(P), \quad V''_{\alpha}(P) = p''_{\alpha}(P) + q''_{\alpha}(P)$$

e ponendo  $\alpha(P) = \alpha'(P) + \alpha''(P)$ ,  $V_{\alpha}(P) = V'_{\alpha}(P) + V''_{\alpha}(P)$ , ecc., risulta pure

$$\alpha(P) = p_{\alpha}(P) - q_{\alpha}(P), \quad V_{\alpha}(P) = p_{\alpha}(P) + q_{\alpha}(P).$$

Inoltre, se  $A$  e  $B$  sono rispettivamente l'estremo sinistro e l'estremo destro dell'intervallo  $T$ , si ha

$$(I) \quad \int_T d\alpha = \text{mis}_{\alpha} T = \alpha(T) + \alpha'(A) + \alpha''(B),$$

$$\int_T dV_{\alpha} = \text{mis}_{\alpha} T = V_{\alpha}(T) + V'_{\alpha}(A) + V''_{\alpha}(B), \text{ ecc.}$$

(2) Cfr. M. PICONE, loc. cit., p. 147.

Ha luogo il seguente teorema:

I. *Uno dei due limiti  $p'_\alpha(P)$ ,  $q'_\alpha(P)$  (come pure di  $p''_\alpha(P)$ ,  $q''_\alpha(P)$ ) è nullo, qualunque sia il punto  $P$  dello spazio  $S$ .*

Definiamo infatti le due funzioni di intervallo  $p^*_\alpha(T)$  e  $q^*_\alpha(T)$  ponendo

$$p^*_\alpha(T) = p_\alpha(T) \quad , \quad q^*_\alpha(T) = q_\alpha(T)$$

se l'intervallo  $T$  non contiene il punto  $P$  prefissato; ponendo

$$p^*_\alpha(T) = p_\alpha(T) - p'_\alpha(P) \quad , \quad q^*_\alpha(T) = q_\alpha(T) - q'_\alpha(P)$$

se  $P$  è estremo destro di  $T$ ; ponendo

$$p^*_\alpha(T) = p_\alpha(T) - p''_\alpha(P) \quad , \quad q^*_\alpha(T) = q_\alpha(T) - q''_\alpha(P)$$

se  $P$  è estremo sinistro di  $T$ ; ponendo

$$p^*_\alpha(T) = p^*_\alpha(T_1) + p^*_\alpha(T_2) \quad , \quad q^*_\alpha(T) = q^*_\alpha(T_1) + q^*_\alpha(T_2)$$

se  $T$  è somma di due intervalli consecutivi  $T_1$  e  $T_2$  aventi in comune il punto  $P$ . Le funzioni  $p^*_\alpha(T)$  e  $q^*_\alpha(T)$  così definite risultano pure funzioni determinanti e si ha

$$(2) \quad \lim_{T \rightarrow P} p^*_\alpha(T) = \lim_{T \rightarrow P} q^*_\alpha(T) = 0.$$

Supponiamo ora che sia, per esempio,  $p'_\alpha(P) \neq q'_\alpha(P)$  e poniamo  $\delta = p'_\alpha(P) - q'_\alpha(P)$ . Risulta

$$(3) \quad \alpha(T) = \begin{cases} p^*_\alpha(T) - q^*_\alpha(T) & \text{se l'intervallo } T \text{ non contiene } P \\ p^*_\alpha(T) - q^*_\alpha(T) + \delta & \text{se } P \text{ è estremo destro di } T. \end{cases}$$

Fissiamo un intervallo  $T$  che abbia il punto  $P$  come estremo destro e dividiamo  $T$  in  $n$  intervalli consecutivi della stessa ampiezza  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . (L'estremo destro di  $T_n$  è  $P$ ). Si ha, com'è noto (3),

$$V_\alpha(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha(T_i)$$

e per le (3),

$$\begin{aligned} V_\alpha(T) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} [p^*_\alpha(T_i) + q^*_\alpha(T_i)] + [p^*_\alpha(T_n) + q^*_\alpha(T_n) + \delta] \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} [p_\alpha(T_i) + q_\alpha(T_i)] + [p_\alpha(T_n) + q_\alpha(T_n) + \delta] \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} V_\alpha(T_i) + [p_\alpha(T_n) + q_\alpha(T_n) + \delta] \right\}, \end{aligned}$$

od anche, denotando con  $I_n$  l'intervallo  $T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1}$ ,

$$V_\alpha(T) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{ V_\alpha(I_n) + p_\alpha(T_n) + q_\alpha(T_n) + \delta \}.$$

(3) Cfr. M. PICONE, loc. cit., p. 15.



Ne segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\alpha}(T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [V_{\alpha}(T) - V_{\alpha}(I_n)] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [p_{\alpha}^*(T_n) + q_{\alpha}^*(T_n) + \delta]$$

e per le (2),

$$p'_{\alpha}(P) + q'_{\alpha}(P) = V'_{\alpha}(P) \leq \delta.$$

Pertanto, avendo posto  $p'_{\alpha}(P) - q'_{\alpha}(P) = \delta$ , segue subito

$$p'_{\alpha}(P) = \delta, \quad q'_{\alpha}(P) = 0$$

e quindi

$$V'_{\alpha}(P) = p'_{\alpha}(P) = \alpha'(P).$$

II. In generale risulta

$$(4) \quad V'_{\alpha}(P) = |\alpha'(P)|, \quad V''_{\alpha}(P) = |\alpha''(P)|, \quad V_{\alpha}(P) = |\alpha'(P)| + |\alpha''(P)|.$$

Si deduce immediatamente che: *Le funzioni determinanti  $\alpha(T)$  e  $V_{\alpha}(T)$  hanno gli stessi punti di discontinuità<sup>(4)</sup>.*

2. Sia  $J$  un insieme di punti di  $S$  sprovvisto di punti di accumulazione e non limitato superiormente nè inferiormente. Sia  $P$  un punto dell'insieme  $J$  e  $Q$  il primo punto di  $J$  che si incontra a destra di  $P$ . Denotiamo con  $T(P, Q)$  l'intervallo di punti estremi  $P$  e  $Q$  e con  $[T]_J$  la totalità di questi intervalli. Diciamo di avere così effettuato la *decomposizione coordinata*  $\mathfrak{D}_J$  di  $S$  mediante l'insieme  $J$ <sup>(5)</sup>. Ad una decomposizione coordinata  $\mathfrak{D}_J$  ne diciamo *seguito* un'altra  $\mathfrak{D}_{J'}$ , e scriviamo  $\mathfrak{D}_J \rightarrow \mathfrak{D}_{J'}$  quando l'insieme  $J$  è contenuto in  $J'$ . Consideriamo ora un insieme  $[O]$  di operazioni di calcolo a ciascuna delle quali competa una preliminare decomposizione coordinata  $\mathfrak{D}_J$  di  $S$ . Ad una operazione  $O$  alla quale competa una decomposizione  $\mathfrak{D}$ , diremo *seguito* ogni altra alla quale competa una decomposizione *seguito* alla  $\mathfrak{D}$ . Il risultato  $x$  della generica operazione  $O$  dell'insieme  $[O]$  è quindi una variabile ordinata per la quale si avranno allora un minimo ed un massimo limite, che designamo rispettivamente con

$$\lim'_{\mathfrak{D} \rightarrow S} x, \quad \lim''_{\mathfrak{D} \rightarrow S} x$$

e che si dicono ottenuti *mentre la decomposizione  $\mathfrak{D}$  invade lo spazio  $S$* <sup>(6)</sup>.

Dimostriamo il seguente teorema:

III. Se  $C$  è un insieme limitato e chiuso, si ha

$$(5) \quad \text{mis}_{\alpha} C = \int_C dV_{\alpha} = \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \sum_{i=1}^n |\alpha(T_i)|,$$

dove  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sono gli intervalli relativi alla decomposizione coordinata  $\mathfrak{D}$  (che invade lo spazio  $S$ ), i quali contengono punti di  $C$ .

(4) Ricordiamo che tali punti di discontinuità costituiscono un insieme numerabile.

(5) Cfr. M. PICONE, loc. cit., p. 13.

(6) Cfr. M. PICONE, loc. cit., pp. 19-20.

Sia  $T$  un intervallo i cui estremi siano *punti di continuità* per la funzione  $\alpha(T)^{(7)}$  e che contenga *internamente* l'insieme  $C$ . Per la seconda delle (1), si ha

$$\int_1 dV_\alpha = V_\alpha(T)$$

e quindi, se  $\mathfrak{D}_1$  è una decomposizione coordinata *associata* all'intervallo  $T$  (cioè tale che fra i punti dell'insieme  $J$  vi siano gli estremi di  $T$ ),

$$(6) \quad \int_T dV_\alpha = \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \sum_{i=1}^m |\alpha(T'_i)|,$$

dove  $T'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) sono gli intervalli in cui viene decomposto  $T$  per opera di  $\mathfrak{D}$ . Fra tali intervalli  $T'_i$ , siano  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) quelli che contengono punti di  $C$  e  $T''_i$  ( $i = 1, 2, \dots, v$ ) gli altri. Sia  $P$  un estremo, per esempio l'estremo sinistro, del generico intervallo  $T''_i$ . Se  $P$  non è estremo (destro) di nessun altro intervallo  $T''_i$ , si può supporre che sia *punto di continuità* per la funzione  $\alpha(T)^{(7)}$ . Ciò è chiaro se  $P$  è l'estremo sinistro dell'intervallo  $T$ ; in ogni altro caso, poichè  $P$  non appartiene a  $C$ , esso è punto *interno* all'insieme  $T - C$  e possiamo scegliere un punto  $P'$ , di continuità per la funzione  $\alpha(T)^{(7)}$ , a sinistra di  $P$  ed in modo che l'intervallo  $P'P$  non contenga punti di  $C$  e sia contenuto in quell'intervallo  $T_j^{(8)}$  che ha per estremo destro il punto  $P$ . Questo intervallo viene diviso dal punto  $P'$  in due intervalli  $T_{j_1}$  e  $T_{j_2} = P'P$  ed è lecito sostituire alla decomposizione  $\mathfrak{D}_1$  la decomposizione  $\mathfrak{D}_j$ , ad essa seguente, ottenuta aggiungendo all'insieme  $J$  il punto  $P'$ . Così facendo, l'intervallo  $T_j$  diviene  $T_{j_1}$ ; rimane l'intervallo  $T''_i$ , ma se ne crea un altro dello stesso tipo, cioè  $T_{j_2}$ , in modo che  $P$  diventi estremo comune dei due intervalli  $T''_i$  e  $T_{j_2}$ . Il punto  $P'$ , estremo sinistro di un intervallo  $T''_i$  (cioè  $T_{j_2}$ ), ma non estremo di nessun altro intervallo dello stesso tipo, è adesso un punto di continuità per la funzione  $\alpha(T)^{(7)}$ .

Ciò premesso, dalla (6) si trae

$$(7) \quad \int_T dV_\alpha = \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha(T_i)| + \sum_{i=1}^v |\alpha(T''_i)| \right\} \leq \\ \leq \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha(T_i)| + \sum_{i=1}^v V_\alpha(T''_i) \right\}.$$

Intanto, per l'additività della funzione  $V_\alpha(T)$ , possiamo supporre che due qualsiasi intervalli  $T''_i$  non abbiano punti (estremi) in comune, dopodichè, essendo gli estremi punti di continuità per la funzione  $\alpha(T)^{(7)}$  (secondo quanto abbiamo precedentemente osservato), risulta

$$V_\alpha(T''_i) = \int_{T''_i} dV_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, v).$$

(7) E quindi anche per la funzione  $V_\alpha(T)$ .

(8) Uno fra quegli intervalli  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) che contengono punti di  $C$ .

D'altra parte, poichè due qualunque intervalli  $T_i''$  non hanno punti in comune, posto  $A = \sum_{i=1}^v T_i''$ , risulta

$$\int_A dV_\alpha = \sum_{i=1}^v \int_{T_i''} dV_\alpha = \sum_{i=1}^v V_\alpha(T_i''),$$

sicchè la (7) diviene

$$\int_T dV_\alpha \leq \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha(T_i)| + \int_A dV_\alpha \right\}$$

ed a fortiori, essendo  $A \rightarrow T - C$ ,

$$\int_T dV_\alpha \leq \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \sum_{i=1}^n |\alpha(T_i)| + \int_{T-C} dV_\alpha.$$

Pertanto

$$\int_C dV_\alpha \leq \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \sum_{i=1}^n |\alpha(T_i)|;$$

da questa e dalla nota relazione

$$\int_C dV_\alpha = \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \sum_{i=1}^n V_\alpha(T_i),$$

considerato che  $|\alpha(T_i)| \leq V_\alpha(T_i)$ , segue subito la (5).

Consideriamo la generica somma

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n |\alpha(T_i)|$$

che interviene nella (5) e prendiamo tutti i suoi termini relativi ad intervalli  $T_i$  pei quali risulta  $\alpha(T_i) \geq 0$ ; raggruppiamo tali termini nella somma

$$\Sigma_{(+)} \alpha(T_i)$$

e raggruppiamo i termini della stessa (8), relativi ad intervalli  $T_i$  nei quali risulta  $\alpha(T_i) < 0$ , nell'altra somma

$$\Sigma_{(-)} \alpha(T_i).$$

IV. *Si ha*

$$(9) \quad \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \Sigma_{(+)} \alpha(T_i) = \int_C d\beta_\alpha, \quad \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \Sigma_{(-)} \alpha(T_i) = - \int_C dq_\alpha.$$

Basta scrivere infatti la (5) nel seguente modo

$$\int_C dV_\alpha = \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \Sigma_{(+)} \alpha(T_i) - \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \Sigma_{(-)} \alpha(T_i)$$

e tener conto di quest'altra

$$\int_C d\alpha = \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \Sigma_{(+)} \alpha(T_i) + \lim_{\mathfrak{D} \rightarrow S} \Sigma_{(-)} \alpha(T_i).$$

**Matematica.** — *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni ai problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie.* Nota di G. ZWIRNER, presentata (\*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

In una Nota recente<sup>(1)</sup> ho fatto vedere come, da noti criteri d'esistenza e di unicità sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali, si possano facilmente dedurre dei teoremi di esistenza e di unicità relativi a problemi di valori al contorno per equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico e d'ordine qualsiasi.

In questa Nota faccio vedere come tali criteri permettano non solo di estendere e completare risultati ottenuti dal De La Vallée Poussin<sup>(2)</sup> (n. 2) ma anche di formulare un nuovo teorema di esistenza e di unicità relativo a un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie (n. 1).

**I. TEOREMA.** — Sia,  $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  una funzione continua rispetto a  $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  e misurabile rispetto a  $x$  nella striscia

$$a \leq x \leq b, \quad |y_p| < +\infty, \quad (p=0, 1, \dots, n-1)$$

e  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$   $n$  punti qualsiasi dell'intervallo  $a \leq x \leq b$ . Esista una costante positiva  $N$  e due funzioni  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  non negative e sommabili in  $a \leq x \leq b$ , con

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \int_a^b \psi(x) dx < 1,$$

tali che nel campo

$$S: \quad a \leq x \leq b, \quad \sum_{p=0}^{n-1} |y_p| \leq N \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}$$

risulti

$$|f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})| \leq \varphi(x)$$

e, posto

$$(I) \quad K = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \int_a^b \psi(x) dx,$$

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) G. ZWIRNER, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni al problema di Niccoletti per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico.* [V. pagine precedenti di questo volume].

(2) J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'un intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre  $n$ .* [« Journ. de Math. pur. et appl. », (9), 8 (1929), pp. 125-144].



sia:

$$(2) \quad \int_a^b |f(x, 0, 0, \dots, 0)| dx \leq (1 - K) N.$$

Supponiamo inoltre che per ogni coppia di punti  $(x, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)})$ ,  $(x, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{n-1}^{(2)})$  del campo  $S$  la  $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  soddisfaccia alla condizione di Lipschitz:

$$(3) \quad |f(x, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)}) - f(x, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{n-1}^{(2)})| \leq \psi(x) \sum_{p=0}^{n-1} |y_p^{(1)} - y_p^{(2)}|.$$

In tali ipotesi il problema

$$(4) \quad \begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \\ y(x_1) = 0, y(x_2) = 0, \dots, y(x_n) = 0 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione,  $y(x)$ , assolutamente continua assieme alle sue prime  $n-1$  derivate in  $a \leq x \leq b$  e ivi verificante le

$$(5) \quad \sum_{p=0}^{n-1} |y^{(p)}(x)| \leq N \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \quad (y^{(0)}(x) = y(x)).$$

Osserviamo innanzi tutto che, indicata con  $y(x)$  una funzione continua assieme alle sue prime  $n-1$  derivate in  $a \leq x \leq b$ , basterà provare, per dimostrare il teorema enunciato, che la trasformazione funzionale:

$$(6) \quad \begin{aligned} \zeta(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(u, y(u), y'(u), \dots, y^{(n-1)}(u)) du - \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_1-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} \cdot \\ &\cdot \int_a^{x_i} dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(u, y(u), y'(u), \dots, y^{(n-1)}(u)) du \end{aligned}$$

ammette un solo elemento unito che soddisfaccia alla condizione (5).

A tale scopo ricordiamo intanto che la funzione  $\zeta(x)$  data dalla trasformazione funzionale (6) soddisfa, in  $a \leq x \leq b$ , alle limitazioni (3):

$$(7) \quad |\zeta^{(p)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \int_a^b |f(u, y(u), y'(u), \dots, y^{(n-1)}(u))| du$$

$$(p = 0, 1, \dots, n-1; \quad \zeta^{(0)}(x) = \zeta(x)).$$

(3) G. ZWIRNER, *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie di ordine  $n$* . [« Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. XII (1941), pp. 114-122], pp. 115-117.

Premesso ciò, indichiamo: con  $\Sigma$  lo spazio descritto dalle funzioni  $y(x)$ , quando come distanza  $|y_1(x) - y_2(x)|$  di due elementi,  $y_1(x), y_2(x)$ , di  $\Sigma$  si assuma il numero

$$\sum_{p=0}^{n-1} \max_{a \leq x \leq b} |y_1^{(p)}(x) - y_2^{(p)}(x)| \quad (y_1^{(0)}(x) = y_1(x), y_2^{(0)}(x) = y_2(x)),$$

e con  $H$  l'intorno dell'elemento zero di  $\Sigma$  costituito da tutte le funzioni  $y(x)$  soddisfacenti alla limitazione

$$\|y(x)\| \leq N \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}.$$

Siano ora  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  due elementi qualsiasi appartenenti all'intorno  $H$  e  $\zeta_1(x), \zeta_2(x)$  i loro trasformati mediante la (6).

Per la (3) e (7), si ha:

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |\zeta_1^{(p)}(x) - \zeta_2^{(p)}(x)| &\leq \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \int_a^b \psi(x) dx \sum_{p=0}^{n-1} \max_{a \leq x \leq b} |y_1^{(p)}(x) - y_2^{(p)}(x)| \\ &= \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \int_a^b \psi(x) dx \|y_1(x) - y_2(x)\|, \\ &\quad (p = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

ossia:

$$\|\zeta_1(x) - \zeta_2(x)\| \leq K \|y_1(x) - y_2(x)\|,$$

ove  $K, (K < 1)$ , indica il numero dato dalla (1).

Inoltre, detto  $\zeta_0(x)$  il trasformato, mediante la (6), dello zero di  $\Sigma$ , per le (2) e (7) si ha:

$$\|\zeta_0(x)\| \leq (1-K) N \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}.$$

Il nostro teorema segue allora dal secondo criterio enunciato nella prefazione della mia Nota citata in <sup>(1)</sup>.

2. Enuncieremo ora un altro criterio di esistenza e di unicità relativo al problema (4), criterio che, come vedremo, estende e completa quello dato da De La Vallée Poussin.

TEOREMA. - Sia  $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  una funzione continua rispetto a  $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  e misurabile rispetto a  $x$  nella striscia

$$a \leq x \leq b, \quad |y_p| < +\infty \quad (p = 0, 1, \dots, n-1).$$

Supponiamo inoltre che esista una costante positiva  $M$  e una funzione  $\mu(x)$  non negativa e sommabile in  $a \leq x \leq b$  tali che nel campo

$$D: \quad a \leq x \leq b, \quad |y_p| \leq \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} M \quad (p = 0, 1, \dots, n-1)$$

risulti:

$$|f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})| \leq \mu(x)$$

$$\int_a^b \mu(x) dx < 1.$$

La  $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  soddisfaccia poi, per ogni coppia di punti  $(x, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)})$ ,  $(x, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{n-1}^{(2)})$  del campo  $D$  alla condizione di Lipschitz:

$$|f(x, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)}) - f(x, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{n-1}^{(2)})| \leq \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p(x) |y_p^{(1)} - y_p^{(2)}|,$$

con  $\alpha_p(x)$  (non negative e) sommabili in  $a \leq x \leq b$  e verificanti la

$$(8) \quad K = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \int_a^b \alpha_p(x) dx < 1.$$

In tali ipotesi il problema (4) ammette una ed una sola soluzione,  $y(x)$ , assolutamente continua assieme alle sue prime  $n-1$  derivate in  $a \leq x \leq b$ , ivi verificante le:

$$|y^{(p)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} M \quad (p=0, 1, \dots, n-1; y^{(0)}(x)=y(x))^{(4)}.$$

Per dimostrare questo teorema indichiamo con  $\Sigma_r$  lo spazio descritto dalle funzioni  $y(x)$ , continue assieme alle loro prime  $n-1$  derivate in  $a \leq x \leq b$  e ivi soddisfacenti alle limitazioni:

$$|y^{(p)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} M \quad (p=0, 1, \dots, n-1; y^{(0)}(x)=y(x)).$$

Assumeremo come distanza  $\|y_1(x) - y_2(x)\|$  di due elementi,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , di  $\Sigma_r$ , il numero

$$\sum_{p=0}^{n-1} \max_{a \leq x \leq b} |y_1^{(p)}(x) - y_2^{(p)}(x)| \cdot \int_a^b \alpha_p(x) dx, \quad (y_1^{(0)}(x)=y_1(x); y_2^{(0)}(x)=y_2(x))^{(5)}.$$

(4) Questo teorema è contenuto in altri miei lavori precedenti e lo espongo per ragioni sistematiche. Cfr. G. ZWIRNER, *Un criterio d'esistenza relativo a un problema al contorno per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine  $n$* . [« R. Acc. d'Italia. Rend. di Scienze fisiche, matematiche e naturali », fasc. 6, serie VII, vol. III (1942), pp. 217-222]; *Criteri d'unicità per un problema di valori al contorno per equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie d'ordine qualunque*. [« Rend. Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. XIII (1942), pp. 9-25].

(5) Escludiamo il caso di  $\int_a^b \alpha_p(x) dx = 0$ , ( $p=0, 1, \dots, n-1$ ), perchè allora si sa

già che il problema (4) ammette una ed una sola soluzione. Cfr. O. NICCOLETTI, *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie* [« Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. 33 (1897-98), pp. 746-759], p. 748; G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. [Zanichelli, Bologna, Parte prima (1941)], p. 176, nota (2).

Premesso ciò, si vede ora facilmente, e la cosa peraltro è nota<sup>(6)</sup> che il trasformato, mediante la (6), di un qualsiasi elemento di  $\Sigma_1$  è ancora un elemento di  $\Sigma_1$ . Inoltre, detti  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , due elementi qualsiasi di  $\Sigma_1$  e  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  i loro trasformati mediante la (6), con un ragionamento analogo a quello fatto nel numero precedente si deduce:

$$\|\psi_1 - \psi_2\| \leq K \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

ove  $K$  indica il numero dato dalla (8).

Il teorema enunciato segue allora dal primo criterio ricordato nella prefazione della mia Nota citata in<sup>(1)</sup>.

OSSERVAZIONE I. - Sia  $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  continua rispetto a tutti i suoi argomenti in

$$a \leq x \leq b, \quad |y_p| < +\infty \quad (p=0, 1, \dots, n-1).$$

Supponiamo inoltre che esista una costante positiva  $M$  tale che nel campo

$$D_1: \quad a \leq x \leq b, \quad |y_p| \leq \frac{(b-a)^{n-p}}{(n-p)!} M \quad (p=0, 1, \dots, n-1)$$

risulti:

$$|f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})| \leq M$$

e che per ogni coppia di punti  $(x, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)})$ ,  $(x, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{n-1}^{(2)})$  di  $D_1$  sia:

$$|f(x, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)}) - f(x, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{n-1}^{(2)})| \leq \sum_{p=0}^{n-1} L_p |y_p^{(1)} - y_p^{(2)}|,$$

ove  $L_p$  sono costanti (non negative) verificanti la condizione:

$$\sum_{p=0}^{n-1} L_p \frac{(b-a)^{n-p}}{(n-p)!} < 1.$$

In tali ipotesi il problema (4) ammette una ed una sola soluzione,  $y(x)$ , continua in  $a \leq x \leq b$  e ivi verificante le

$$|y^{(p)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-p}}{(n-p)!} M, \quad (p=0, 1, \dots, n-1; y^{(0)}(x) = y(x)).$$

Infatti nello spazio  $\Sigma_2$  delle funzioni  $y(x)$  continue assieme alle loro prime  $n-1$  derivate in  $a \leq x \leq b$  e ivi soddisfacenti alle

$$|y^{(p)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-p}}{(n-p)!} M \quad (p=0, 1, \dots, n-1; y^{(0)}(x) = y(x))$$

si assuma come distanza di due suoi elementi,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , il numero

$$\sum_{p=0}^{n-1} L_p \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)| \quad (7)$$

(6) Cfr. loc. cit. per primo in (4), p. 221.

(7) Escludiamo il caso  $L_0 = L_1 = \dots = L_{n-1} = 0$ . Cfr. loc. cit. in (5).



e poi si proceda come nel teorema precedente, tenendo presente una nota formula di interpolazione<sup>(8)</sup>.

Si ottiene così il criterio di unicità di De La Vallée Poussin<sup>(9)</sup>, completato dal relativo criterio di esistenza,

OSSERVAZIONE II. — Solamente per semplicità abbiamo considerato, nel problema (4), condizioni al contorno omogenee. Il caso più generale, che si ha quando si impone all'integrale una qualunque condizione valida a determinare un polinomio di grado  $n - 1$ , si può facilmente, come è noto<sup>(10)</sup>, ricondurre al caso da noi considerato.

**Matematica.** — *Sulla semicontinuità degli integrali doppi, in forma ordinaria, nel calcolo delle variazioni.* Nota di G. STAMPACCHIA, presentata<sup>(\*)</sup> dal Corrisp. R. CACCIOPOLI.

In uno studio sull'estremo assoluto di integrali doppi dipendenti dalle derivate del secondo ordine<sup>(1)</sup> mi sono imbattuto in una questione di semicontinuità di particolari integrali. Giacchè la formulazione a cui pervengo supera quella che lì mi necessita, pubblico in questa Nota il risultato.

Riprendo una dimostrazione di Tonelli per gli integrali semplici sotto forma ordinaria<sup>(2)</sup> e mostro che la base di questa dimostrazione ci porta ad una formulazione generale delle questioni di semicontinuità degli integrali doppi, in forma ordinaria.

1. Sia  $f(x, y, u, w)$  una funzione finita e continua con la derivata  $f_w$  per  $(x, y)$  che varia in un dominio aperto e limitato  $D$  e per ogni valore finito di  $u$  e di  $w$ .

Indichiamo con  $\mathfrak{M}$  la classe delle funzioni  $u(x, y)$  definite e continue in  $D$  e che soddisfano alle seguenti proprietà:  $\alpha$ ) per ogni funzione di  $\mathfrak{M}$  può definirsi una certa operazione che dà luogo ad una funzione di punto  $\mathfrak{D}u(x, y)$  definita quasi dappertutto in  $D$  ed ivi quasi continua;  $\beta$ ) esiste l'integrale (secondo Lebesgue)  $\iint_D \mathfrak{D}u(x, y) dx dy$ ;  $\gamma$ ) si può definire per

(8) Cfr. SEVERI e SCORZA DRAGONI, *Lezioni di Analisi* [Zanichelli, Bologna] II, n. 57.

(9) Cfr. loc. cit. in (2).

(10) Cfr. loc. cit. per primo in (4).

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Di prossima pubblicazione (nel primo volume della nuova serie del « Giornale di Matematiche di Battaglini »).

(2) L. TONELLI, *Su gli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria*, « Ann. Scuola Norm. sup. di Pisa », ser., II, vol. III (1934), pp. 405-410.

ogni  $\rho > 0$  un intorno  $i_\rho[u_0]$  della funzione  $u_0(x, y)$  in modo che il funzionale

$$\iint_Q \mathfrak{D}u(x, y) dx dy,$$

essendo  $Q$  un qualsiasi rettangolo interno a  $D$ , risulta continuo nella classe  $\mathfrak{M}$  nel senso che preso ad arbitrio  $\varepsilon > 0$  è possibile determinare  $\rho > 0$  in modo che se  $u(x, y)$  appartiene all'intorno  $i_\rho[u_0]$  si deduca

$$\left| \iint_Q \mathfrak{D}u_0(x, y) dx dy - \iint_Q \mathfrak{D}u(x, y) dx dy \right| < \varepsilon$$

8) se  $u(x, y)$  appartiene all'intorno  $i_\rho[u_0]$  si deduce anche che in  $D$ :  $|u(x, y) - u_0(x, y)| < \rho$ .

Indichiamo poi con  $\overline{\mathfrak{M}}$  la classe delle funzioni di  $\mathfrak{M}$  per cui risulta integrabile in  $D$  la funzione  $f(x, y, u(x, y), \mathfrak{D}u(x, y))$  e poniamo:

$$I[u] = \iint_D f(x, y, u(x, y), \mathfrak{D}u(x, y)) dx dy.$$

Diremo che  $I[u]$  è un integrale *quasi regolare positivo* se, in ogni punto  $(x, y, u)$  in cui la  $f(x, y, u, w)$  è definita, la  $f_w(x, y, u, w)$ , come funzione della sola  $w$ , è sempre non decrescente; e se, inoltre, in nessun punto  $(x, y, u)$  la  $f_w$  è costante per tutti i valori di  $w$ , diremo che  $I[u]$  è *quasi regolare positivo seminormale*; infine, se per ogni  $(x, y, u)$  la  $f_w$  è funzione sempre crescente di  $w$  diremo che è *quasi regolare normale*.

a) LEMMA: Se  $I[u]$  è un integrale *quasi regolare positivo seminormale*, preso ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$ , per ogni punto  $(x_0, y_0)$  di  $D$  e per ogni valore  $u_0$  e  $w_0$ , si può determinare (almeno) una terna di numeri  $p, q, \rho$  con  $\rho > 0$  in modo che, in tutti i punti  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti gli  $u$  tali che

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (u - u_0)^2 < \rho^2$$

sia

$$f(x, y, u, w) > p + qw$$

per tutti i  $w$ , e

$$f(x, y, u, w) < p + qw + \varepsilon$$

per i  $w$  tali che  $|w - w_0| < \rho$ .

La dimostrazione è completamente analoga a quella contenuta nella memoria di Tonelli citata (3).

2. DEFINIZIONE: Diremo che  $I[u]$  è *semicontinuo inferiormente*, secondo la definizione di intorno adottata, quando data una qualunque funzione

(3) Cfr. loc. cit. in (2), p. 405.

$u_0(x, y)$  della classe  $\overline{\mathfrak{M}}$ , in corrispondenza ad ogni numero  $\varepsilon > 0$ , esiste un numero  $\rho > 0$  in modo che sia verificata la disuguaglianza:

$$I[u] > I[u_0] - \varepsilon$$

per tutte le funzioni  $u(x, y)$  della classe  $\overline{\mathfrak{M}}$  che appartengono all'intorno  $i_\rho[u_0]$  della  $u_0(x, y)$ .

TEOREMA I. - *Supposto che per ogni  $(x, y)$  di  $D$  e per ogni valore finito di  $u, w$*

$$(1) \quad f(x, y, u, w) \geq N$$

con  $N$  numero fisso, se  $I[u]$  è un integrale quasi regolare positivo seminormale, esso è semicontinuo inferiormente (beninteso secondo la definizione di intorno adottata).

Tenendo presente l'ipotesi (1) con un ragionamento già usato da Tonelli<sup>(4)</sup> possiamo supporre che il dominio  $D$  sia un rettangolo del piano  $(x, y)$ . Incominciamo col supporre  $N = 0$ . Sia allora  $u_0(x, y)$  una funzione di  $\overline{\mathfrak{M}}$  ed  $u(x, y)$  un'altra funzione della stessa classe appartenente all'intorno  $i_\rho[u_0]$  ove  $\rho$  è un numero positivo che determineremo in seguito. (Possiamo allora per  $\delta$ ) dire che  $|u(x, y) - u_0(x, y)| < \rho$ . Indichiamo, per ogni  $r$ , con  $E_r$  un insieme chiuso contenuto in  $D$  tale che in ogni suo punto esista finito  $\mathfrak{D}u_0(x, y)$  e sia continuo in  $E_r$  e di più tale che:

$$(2) \quad \text{mis}(D - E_r) < \frac{1}{r}.$$

Ad ogni punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  di  $E_r$  associamo (cfr. lemma *a*)) un quadrato  $\bar{H}$  contenuto in  $D$  col centro in  $(\bar{x}, \bar{y})$  a lati paralleli agli assi, di lunghezza inferiore a  $2\bar{\sigma}$  in modo che, per tutti i punti  $(x, y, u)$  distanti per meno di  $\rho$  da quella parte della superficie  $u = u_0(x, y)$  che ha per proiezione ortogonale sul piano  $(x, y)$  il quadrato  $\bar{H}$ , sia<sup>(5)</sup>

$$(3) \quad f(x, y, u, w) > \bar{p} + \bar{q}w$$

e per ogni punto  $(x, y)$  di  $E_r$  appartenente al quadrato  $\bar{H}$  sia

$$(4) \quad f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y)) < \bar{p} + \bar{q}\mathfrak{D}u_0(x, y) + \varepsilon.$$

Siccome  $E_r$  è un insieme chiuso, per un noto teorema potremo ricoprirlo con un numero finito di quadrati analoghi ad  $\bar{H}$ : siano  $H_1, H_2, \dots, H_N$ . Indichiamo con  $\bar{p}_t, \bar{q}_t, \bar{\rho}_t$  ( $t = 1, 2, \dots, N_r$ ) le terne  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{\rho}$  corrispondenti ai quadrati così scelti, ed indichiamo con  $L_r$  un numero superiore al massimo dei moduli  $|\bar{p}_t|, |\bar{q}_t|$  per  $t = 1, 2, \dots, N_r$ . Per un noto lemma geometrico di Vitali è possibile determinare un numero finito di quadrati, non sovrappontesi, scelti fra gli  $\bar{H}$ , che potremo prendere in modo che risultino interni

(4) L. TONELLI, *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du Calcul des Variations*. « Acta Mathematica », t. 53 (1929), pp. 325-345 (n. 6, p. 332).

(5) Si veda ad esempio S. CINQUINI, *Condizioni sufficienti per la semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni*. « Ann. Sc. Norm. sup. di Pisa », vol. II (1933) pp. 41-58, p. 48.

ad almeno uno dei quadrati  $H_l$  ( $l = 1, 2, \dots, N_r$ ): siano essi  $K_1, K_2, \dots, K_M$ , per cui

$$(5) \quad \text{mis}(\Sigma K_s - E_r \cdot \Sigma K_s) < \frac{\varepsilon}{L_r} \quad \text{e} \quad \iint_{\Sigma K_s - E_r \cdot \Sigma K_s} \mathfrak{D}u_0(x, y) dx dy < \frac{\varepsilon}{L_r}$$

e tenuto conto della (2) in modo che

$$(2') \quad \iint_{E_r - E_r \cdot \Sigma K_s} f(x, y; u_0(x, y)) \mathfrak{D}u_0(x, y) dx dy < \varepsilon.$$

Indichiamo con  $p_s, q_s$  i numeri corrispondenti ai quadrati  $K_s$ , i quali, presi fra i  $\bar{p}_l, \bar{q}_l$  ( $l = 1, 2, \dots, N_r$ ), sono modulo anche essi minori di  $L_r$ . Avremo allora se  $\rho$  è sufficientemente piccolo

$$(6) \quad I[u] > \sum_{s=1}^{M_r} I_{K_s}[u] > \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u(x, y)) dx dy.$$

D'altra parte

$$I[u_0] = \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{E_r \cdot K_s} f(x, y; u_0(x, y)) \mathfrak{D}u_0(x, y) dx dy + \iint_{D - E_r \cdot \Sigma K_s} f(x, y; u_0(x, y)) \mathfrak{D}u_0(x, y) dx dy$$

e per la (4) e la (5)

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{E_r \cdot K_s} f(x, y; u_0(x, y)) \mathfrak{D}u_0(x, y) dx dy &< \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{E_r \cdot K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy + \varepsilon \text{mis } I \\ &< \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy - L_r \left\{ \text{mis}(\Sigma K_s - E_r \cdot \Sigma K_s) + \iint_{\Sigma K_s - E_r \cdot \Sigma K_s} \mathfrak{D}u_0(x, y) dx dy \right\} + \varepsilon \text{mis } I \\ &< \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy + \varepsilon (2 + \text{mis } D) \end{aligned}$$

e per la (2)

$$I[u_0] < \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy + \varepsilon (3 + \text{mis } D).$$

Allora per la (6) e la (7)

$$(7) \quad I[u] - I[u_0] > \sum_{s=1}^{M_r} \left\{ \iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u(x, y)) dx dy - \iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy \right\} - \varepsilon (3 + \text{mis } I)$$

e se  $\rho$  è sufficientemente piccolo, per la supposta continuità dell'integrale

$$\iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u(x, y)) dx dy$$

$$I[u] - I[u_0] > -\varepsilon (4 + \text{mis } D)$$



e siccome  $\varepsilon > 0$  è arbitrario, la semicontinuità inferiore dell'integrale  $I[u]$  è così dimostrata. Per eliminare l'ipotesi che  $f \geq 0$  basta considerare la funzione  $\bar{f} = f - |N|$ : dalla semicontinuità dell'integrale  $\iint_D \bar{f} dx dy$  segue quella dell'integrale  $I[u]$ .

### 3. Dimostriamo il seguente:

TEOREMA II. — *Supposte verificate le ipotesi del teorema precedente, se la  $f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y))$  non è integrabile in  $D$ , preso ad arbitrio un numero  $H > 0$ , si può determinare un altro  $\rho > 0$  in modo che, ogni funzione della classe  $\overline{\mathfrak{M}}$  che appartiene all'intorno  $i_\rho[u_0]$  di  $u_0(x, y)$  soddisfa alla disuguaglianza:*

$$I[u] > H.$$

Supponiamo dapprima che sia  $f \geq 0$  e che esista in  $D$  un quadrato  $\Delta$  su cui la funzione  $f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y))$  non sia integrabile.

Se  $L$  è sufficientemente grande, detto  $E_r^*$  l'insieme dei punti di  $\Delta$  in cui esiste finito  $\mathfrak{D}u_0(x, y)$  e tale che in esso sia  $|\mathfrak{D}u_0(x, y)| < L$ , si avrà

$$\iint_{E_r^*} f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy > H.$$

Si dica poi  $E_r$  un insieme chiuso di  $E_r^*$  sul quale  $\mathfrak{D}u_0(x, y)$  sia continuo e tale che si abbia

$$(8) \quad \iint_{E_r} f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy > H.$$

Conservando ai simboli il significato che hanno nella dimostrazione precedente, si ha <sup>(6)</sup>:

$$\begin{aligned} I_\Delta[u] - \iint_{E_g} f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy &> \sum_{i=1}^{M_1} \iint_{K_i} (p_i + q_i \mathfrak{D}u(x, y)) dx dy - \\ &- \iint_{E_r} f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

ed essendo

$$\iint_{E_r} f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy < \sum_{i=1}^{M_1} \iint_{K_i} (p_i + q_i \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy + \varepsilon(2 + \text{mis } D)$$

(6) Poniamo  $I_\Delta[u] = \iint_\Delta f(x, y, u(x, y), \mathfrak{D}u(x, y)) dx dy$ .

si ha:

$$I_{\Delta}[u] - \iint_{E_r} f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy > \\ > \sum_{s=1}^{M_r} \left\{ \iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u(x, y)) dx dy - \iint_{K_s} (p_s + q_s \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy \right\} - \epsilon(2 + \text{mis } D).$$

Per  $\rho$  sufficientemente piccolo la somma relativa all'indice  $s$ , sempre per la supposta continuità dell'integrale che vi compare, risulta, in modulo, minore di  $\epsilon$  e pertanto si ha per la (8):  $I_{\Delta}[u] > H - \epsilon(3 + \text{mis } D)$ ; per essere  $\epsilon$  arbitrario, il teorema è provato. L'ipotesi che  $f \geq 0$  si toglie in modo ovvio. Supponiamo ora che la  $f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y))$  risulti integrabile in ogni quadrato a lati paralleli agli assi  $x$  e  $y$  contenuto in  $D$ . L'integrale

$$\iint_{D_n} f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}u_0(x, y)) dx dy$$

ove  $\bar{D}_n$  è un dominio invadente  $D$  (vedi ad esempio: Tonelli<sup>(7)</sup>) esiste finito per ogni valore di  $n$  e dovrà tendere a  $+\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$  (per la (1)). Prendiamo allora  $n_0$  tale che sia

$$I_{\bar{D}_{n_0}}[u_0] > K + 1 + |N|D$$

e quindi in virtù della semicontinuità dell'integrale  $I_{\bar{D}_{n_0}}[u_0]$  si può determinare un  $\rho > 0$  in modo che per tutte le funzioni appartenenti all'intorno  $i_\rho[u_0]$  di  $u_0(x, y)$  sia

$$I_{\bar{D}_{n_0}}[u] > I_{\bar{D}_{n_0}}[u_0] - 1.$$

Per queste  $u(x, y)$  sarà allora

$$I_{\bar{D}_{n_0}}[u] > K + |N|D$$

e perciò

$$I_D[u] > I_{\bar{D}_{n_0}}[u] - |N|D > K$$

il che prova il teorema anche in questo caso.

4. Riprendiamo i ragionamenti precedenti per accennare ad una formulazione del tutto generale della questione.

Sia  $f(x, y, u; w_1, \dots, w_n)$  una funzione finita e continua con le derivate  $f_{w_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) per  $(x, y)$  che varia in un dominio aperto e limitato  $D$  e per ogni valore finito di  $u$  e di  $w_i$ .

Indichiamo con  $\mathfrak{M}$  la classe delle funzioni  $u(x, y)$  definite e continue in  $D$  e per cui è possibile definire  $n$  operazioni che danno luogo ad  $n$  funzioni di punto  $\mathfrak{D}_i u(x, y)$  soddisfacenti alle stesse proprietà enunciate in 1.

(7) Nota cit. in (4), p. 332.

Indichiamo poi con  $\overline{\mathfrak{N}}$  la classe delle funzioni di  $\mathfrak{N}$  per cui risulta integrabile in  $D$  la funzione  $f(x, y, u(x, y), \mathfrak{D}_1 u(x, y), \dots, \mathfrak{D}_n u(x, y))$  e poniamo

$$I[u] = \iint_D f(x, y, u(x, y), \mathfrak{D}_1 u(x, y), \dots, \mathfrak{D}_n u(x, y)) dx dy.$$

Diremo che  $I[u]$  è un integrale *quasi regolare positivo normale* se, posto

$$E(x_0, y_0, u_0; \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n; w_1, \dots, w_n) = f(x_0, y_0, u_0, w_1, \dots, w_n) - \\ - f(x_0, y_0, \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n) - \sum_{i=1}^n (w_i - \overline{w}_i) f_{w_i}(x_0, y_0, u_0, \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n)$$

risulta qualunque siano  $\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n$

$$E(x, y, u; \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n; w_1, \dots, w_n) > 0$$

per ogni  $n$ -pla  $w_1 \dots w_n$  distinta dalla  $n$ -pla  $\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n$  ed in ogni punto  $(x, y, u)$  tale che  $(x, y)$  appartenga a  $D$ .

Il lemma  $\alpha$ ) si estende facilmente nel caso che  $I[u]$  sia quasi regolare positivo normale. Risultano allora, se  $I[u]$  è supposto quasi regolare positivo normale, estesi i teoremi I e II. Basta infatti prendere nelle dimostrazioni precedenti per  $E_r$  un insieme chiuso tale che in ogni suo punto esistano finite tutte le  $D_i u_0(x, y)$  e siano continue in  $E_r$ . Poi la dimostrazione procede analogamente.

I teoremi I e II valgono poi anche nell'ipotesi che  $I[u]$  sia quasi regolare positivo seminormale previa dimostrazione del lemma  $\alpha$ ) per tali integrali. Tale dimostrazione è stata fatta per  $n = 2$  da L. Giuliano <sup>(8)</sup>.

*Osservazione.* — In generale una operazione di derivazione è una operazione  $\mathfrak{D}_n(x, y)$  rispetto ad una opportuna classe  $\mathfrak{N}$ ; per esempio la classe delle funzioni assolutamente continue secondo Tonelli è una classe  $\mathfrak{N}$  rispetto alle operazioni  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  quando per intorno si prende quello lagrangiano del primo ordine <sup>(9)</sup>, come risulta da un lemma di Tonelli <sup>(10)</sup>.

Per altre applicazioni dei risultati contenuti in questa Nota si veda, il mio lavoro: *Alcuni teoremi sull'estremo assoluto degli integrali doppi del calcolo delle variazioni dipendenti dalle derivate del secondo ordine* <sup>(11)</sup>.

(8) L. GIULIANO, *Sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni*. «Ann. Sc. Norm. sup. di Pisa», vol. X (1941).

(9) Per questa definizione si veda ad esempio M. PICONE, *Analisi Superiore* (litografie) (1940-41) Roma.

(10) L. TONELLI, loc. cit. in (4), n. 10, p. 338.

(11) Vedi nota (1).

**Matematica.** — *Tavola della funzione euleriana  $\Gamma(z)$  per valori complessi dell'argomento* (\*). Nota (\*\*) di A. GHIZZETTI, presentata dal Socio M. PICONE.

In questa Nota riferisco su un lavoro da me organizzato e diretto presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Tale lavoro fu originato da una segnalazione fatta nel 1943 dal prof. Giancarlo Wick dell'Università di Roma, circa l'opportunità di calcolare una tavola di valori naturali della funzione euleriana  $\Gamma(z)$  per valori complessi dell'argomento  $z = x + iy = re^{i\theta}$ , destinata a rendere grandi servigi nel campo delle applicazioni, in particolare in quello della fisica atomica. In tale epoca le tavole esistenti erano due: quella di H. T. Davis<sup>(1)</sup> a 12 decimali, per la funzione  $1/\Gamma(z)$  in funzione di  $r, \theta$  ( $-1 \leq r \leq 1, 0^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ ) e quella di W. Meissner<sup>(2)</sup>, a 7 decimali, per la funzione  $\ln \Gamma(z)$  nei vertici di una rete di triangoli equilateri situati nel rettangolo  $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, 0 \leq y \leq \frac{5\sqrt{3}}{8}$ . Oltre a ciò esistevano altri lavori con isolate ricerche numeriche, fra i quali va citato quello di I. Ginzl<sup>(3)</sup>. Mancava una tavola che, fornendo direttamente i valori naturali di  $\Gamma(z)$  in funzione di  $x, y$ , fosse di facile uso.

Al compito di costruire una tale tavola si accinse allora l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. In un primo tempo si seguì un metodo indicato da G. Ascoli<sup>(4)</sup>, ma lo si dovette abbandonare perchè, come osserva lo stesso Autore, il metodo stesso è di difficile applicazione in prossimità dell'asse reale. Si ricorse allora ad un altro metodo, indicato da M. Picone e da me successivamente elaborato, che, assai rapidamente, condusse alla tabellazione di  $\Gamma(z)$  nel quadrato  $4 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1$  con 5 cifre decimali esatte. Il metodo stesso avrebbe consentito, a prescindere dal tempo occorrente, di ottenere un qualsivoglia numero di cifre decimali esatte.

Si chiede all'Accademia Nazionale dei Lincei di voler onorare il lavoro compiuto, pubblicando la presente Nota che contiene la suddetta tavola e brevi indicazioni sul modo di usarla. Con una successiva pubblicazione si faranno conoscere altri dati, nonchè il metodo di calcolo seguito.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1947.

(1) Cfr. H. T. DAVIS, *Tables of the higher mathematical functions*, Volume I; Bloomington, Indiana, Principia Press, 1933; Table 6, pp. 269-273.

(2) Cfr. W. MEISSNER, *Tafel der  $\ln \Gamma$ -Funktion mit complexem Argumentbereich*, « Deutsche Mathematik », 4, 1939, pp. 537-555.

(3) Cfr. I. GINZEL, *Die konforme Abbildung durch die Gammafunktion*, « Acta Mathematica » (Uppsala), 56, 1931, pp. 273-353. Per altre indicazioni cfr. A. FLETCHER, J. C. P. MILLER, L. ROSENHEAD, *An index of mathematical tables*. « Scientific Computing Service Limited », London, 1946, pp. 204-205.

(4) Cfr. G. ASCOLI, *Sopra un'equazione funzionale*, « Portugaliae Mathematica », 4, 1943-45, pp. 145-157.



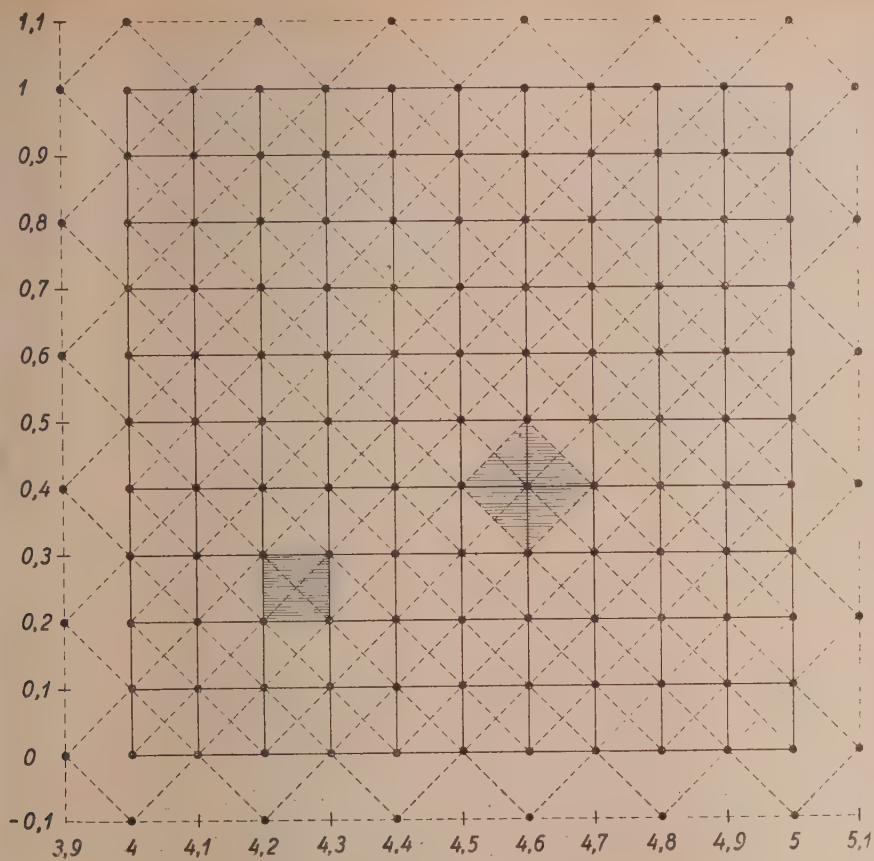


Fig. 1.

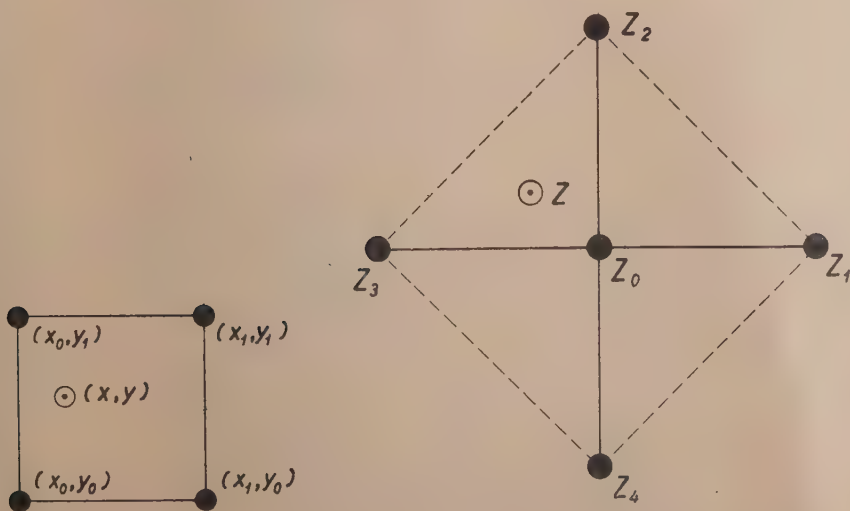


Fig. 2.

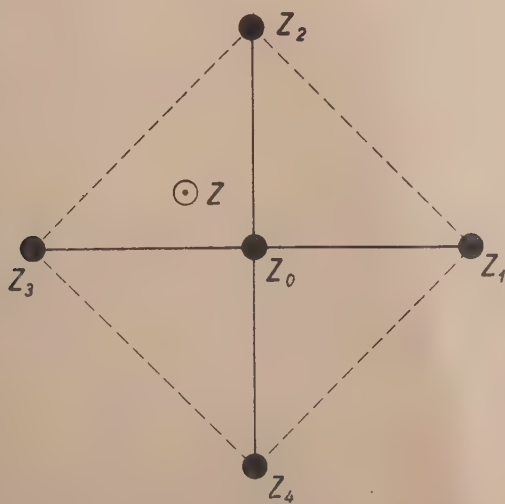


Fig. 3.

La tavola corrisponde allo schema di fig. 1, cioè fornisce i valori di  $\Gamma(\zeta)$  nei punti  $\zeta$  del quadrato  $4 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 1$  che sono segnati con un cerchietto nero, ed è orlata con alcuni altri valori della funzione stessa sulle verticali  $x = 3,9$ ;  $x = 5,1$  e sulle orizzontali  $y = -0,1$ ;  $y = 1,1$  necessari per l'interpolazione.

Per quest'ultima si possono usare, ad esempio, i due procedimenti seguenti. Il primo è quello di servirsi in un quadrato del tipo di fig. 2 (corrispondente ad uno dei due tratteggiati in fig. 1) della formula di interpolazione bilineare in  $x, y$ :

$$\Gamma(x+iy) = 100 \{ (x_1 - x)(y_1 - y)\Gamma(x_0 + iy_0) + (x - x_0)(y_1 - y)\Gamma(x_1 + iy_0) + \\ + (x_1 - x)(y - y_0)\Gamma(x_0 + iy_1) + (x - x_0)(y - y_0)\Gamma(x_1 + iy_1) \};$$

si ottengono così non più di 2 cifre decimali esatte. Il secondo è quello di usare in un quadrato del tipo di fig. 3 (corrispondente all'altro tratteggiato in fig. 1) la formula di interpolazione di 4° grado di Lagrange

$$\Gamma(\zeta) = 2500 \{ (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)(\zeta - \zeta_4)\Gamma(\zeta_1) + \\ + (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_3)(\zeta - \zeta_4)\Gamma(\zeta_2) + \\ + (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_4)\Gamma(\zeta_3) + \\ + (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)\Gamma(\zeta_4) - \\ - 4(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)(\zeta - \zeta_4)\Gamma(\zeta_0) \};$$

con questa si ottengono almeno 4 cifre decimali esatte.

Per calcolare  $\Gamma(\zeta)$  in punti situati fuori del quadrato considerato, basta tener conto delle note proprietà espresse dalle formule:

$$\Gamma(\zeta + 1) = \zeta \Gamma(\zeta),$$

$$\Gamma(n\zeta) = n^{n\zeta - \frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\zeta + \frac{k}{n}\right), \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\Gamma(\bar{\zeta}) = \overline{\Gamma(\zeta)}.$$

Con ripetute applicazioni della prima si può evidentemente calcolare  $\Gamma(\zeta)$  in tutti i punti della striscia  $0 \leq y \leq 1$  dopo di che, servendosi della seconda con opportuna scelta dell'intero  $n$ , si può ottenere  $\Gamma(\zeta)$  in un qualsiasi punto del semipiano  $y > 1$ . Con la terza, infine, si ricavano i valori di  $\Gamma(\zeta)$  nel semipiano  $y < 0$ .

(Dei due numeri scritti in ogni casella, quello in alto rappresenta la parte reale, quello in basso il coefficiente di  $\epsilon$ ).

$\frac{r}{y}$	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1
0,1	— —	5,94427 —0,75071	— —	7,67976 —1,01298	— —	10,02919 —1,37632	— —	13,23176 —1,88292	— —	17,62742 —2,59373	— —	23,70202 —3,59725	—
0	5,29933 0	6 0	6,81262 0	7,75669 0	8,85534 0	10,13610 0	11,63173 0	13,38128 0	15,43141 0	17,83786 0	20,66738 0	24 0	27,03175 —0
0,1	— —	5,94427 0,75071	6,74720 0,87129	7,67976 1,01298	8,76472 1,17974	10,02919 1,37632	11,50539 1,60843	13,23176 1,88292	15,25416 2,20804	17,62742 2,59373	20,41717 3,05198	23,70202 3,59725	—
0,2	5,11041 1,28086	5,77862 1,48372	6,55275 1,72166	7,45113 2,00103	8,49547 2,32982	9,71157 2,71729	11,13012 3,17470	12,78768 3,71548	14,72783 4,35585	17,00266 5,11533	19,67444 6,01744	22,81773 7,09058	26,52105 8,36910
0,3	— —	5,50750 2,18187	6,23462 2,53056	7,07721 2,93998	8,05525 3,42150	9,19246 3,98874	10,51791 4,65803	12,06240 5,44900	13,86853 6,38523	15,98300 7,49510	18,46264 8,81284	21,37543 10,37973	—
0,4	4,56356 2,44489	5,13823 2,82907	5,80155 3,27911	6,56846 3,80720	7,45661 4,42791	8,48091 5,15866	9,68412 6,02036	11,07765 7,03807	12,70241 8,24193	14,60000 9,66818	16,81992 11,36051	19,42128 13,37157	22,47470 15,76497
0,5	— —	4,68069 3,41073	5,26533 3,95000	5,93899 4,58229	6,71645 5,32485	7,61520 6,19833	8,65584 7,22750	9,86276 8,44201	11,26482 9,87746	12,89624 11,57669	14,79767 13,59124	17,01738 15,98326	—
0,6	3,71591 3,38901	4,14702 3,91423	4,64048 4,52835	5,20615 5,24765	5,85556 6,09152	6,60223 7,08315	7,46203 8,25029	8,45361 9,62617	9,59891 11,25065	10,92376 13,17162	12,45865 15,44667	14,23954 18,14512	16,30897 21,35053
0,7	— —	3,55123 4,32925	3,94370 5,00205	4,38991 5,78907	4,89777 6,71119	5,47659 7,79338	6,13699 9,06544	6,80139 10,56306	7,75420 12,32897	8,74216 14,41444	9,87470 16,88105	11,17445 19,80286	—
0,8	2,65454 4,03567	2,90875 4,64807	3,19038 5,36211	3,51218 6,19604	3,86934 7,17160	4,26963 8,31469	4,71827 9,65621	5,22115 11,23307	5,78481 13,08943	6,41649 15,27817	7,12415 17,86274	7,91654 20,91929	8,80317 24,53934
0,9	— —	2,23592 4,86574	2,40896 5,60284	2,59616 6,46207	2,79792 7,46532	3,01440 8,63858	3,24541 10,01283	3,49025 11,62502	3,74754 13,51924	4,01496 15,74820	4,28901 18,37501	4,56452 21,47558	—
1	1,48546 4,34125	1,54950 4,98016	1,61037 5,72200	1,66553 6,58479	1,71170 7,58984	1,74457 8,76246	1,75862 10,13272	1,74676 11,73637	1,69991 13,61602	1,60656 15,82246	1,45205 18,41634	1,21785 21,47013	0,88050 25,07058
1,1	— —	0,86615 4,99210	— —	0,74876 6,56590	— —	0,49328 8,68968	— —	0,03784 11,57309	— —	—0,74132 15,51127	— —	—2,02670 20,92115	— —

**Analisi.** — *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali.* Nota I di E. BAIADA, presentata (\*) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Le equazioni differenziali in forma esplicita:

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

per quanto riguarda le soluzioni che soddisfano alla condizione iniziale:

$$(1') \quad y(x_0) = y_0,$$

sono equivalenti all'equazione integrale:

$$(2) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx,$$

la quale rientra in una più vasta famiglia di equazioni funzionali chiamate del « tipo di Volterra », di cui un caso particolare è l'equazione seguente:

$$(3) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx + \psi(x),$$

dove  $\psi(x)$  è una funzione data. La teoria relativa a queste equazioni ed in particolare alla (3), per quanto riguarda i teoremi d'esistenza della soluzione, va condotta con gli stessi metodi di quelli adoperati per le equazioni differenziali ordinarie ed i risultati ai quali si perviene sono gli stessi.

Fondamentali nella teoria delle equazioni del tipo (1), (1'), (2), sono i teoremi di confronto, i teoremi di unicità e la dipendenza degli integrali rispetto a un parametro e rispetto ai valori iniziali, così come sono di grande utilità le considerazioni su alcune disuguaglianze differenziali o integrali di cui la più tipica è:

$$(4) \quad 0 \leq \chi(x) \leq \int_0^x [M \chi(x) + N] dx,$$

che è argomento del ben noto lemma di Gronwall<sup>(2)</sup>.

Nella teoria classica tutte queste proporzioni vengono raggiunte basandosi essenzialmente su un teorema di passaggio al limite per gli integrali

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Denominazione introdotta da L. TONELLI, *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*. « Bull. Calcutta Math. Society », 20 (1928), pp. 31-48.

(2) Vedere per esempio G. SANSONE, *Le equazioni differenziali nel campo reale*. (Zanichelli, 1941) vol. I, p. 28, la dimostrazione ivi esposta è la più breve.



delle equazioni differenziali ed il ragionamento cui si fa sempre ricorso e quello per assurdo, cosa questa che non permette un agevole lavoro all'intuizione.

Faremo vedere come teoremi anche più generali e classi di disuguaglianze più ampie della (4) si possono ottenere con ragionamenti diretti basati sulla costruzione effettiva della soluzione.

I risultati raggiunti permettono di rendersi meglio conto di come la trattazione elementare secondo le idee di Cauchy-Peano, Picard Lipschitz Tonelli e quella concettualmente molto elegante ed efficace relativa agli elementi uniti delle trasformazioni tra spazi funzionali secondo le idee di Birkhoff-Kellog-Caccioppoli si compenetrino, inquadrandosi negli schemi classici dell'Analisi ordinaria.

2. Sia  $f(x, y)$  definita per  $(x, y)$  reale interna al campo

$C \equiv (x_0 - a \leq x \leq x_0 + a ; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b)$ ,  $a$  e  $b$  positivi.

Supporremo  $f(x, y)$  continua rispetto a  $(x, y)$  per semplicità di ragionamento, ma questa condizione può essere notevolmente allargata.

Consideriamo la disuguaglianza integrale:

$$(5) \quad y(x) \leq y(\xi) + \int_{\xi}^x f[x, y(x)] dx,$$

con  $x, \xi$  qualunque tali che  $x_0 \leq \xi \leq x \leq x_0 + \delta \leq x_0 + a$  e  $y(x)$  funzione continua.

Faremo vedere che la classe delle funzioni continue che soddisfano alla (5), è tutta formata di funzioni tali che:

$$y(x) \leq y_M(x),$$

dove  $y_M(x)$  indica l'integrale superiore dell'equazione (1) (1') o (2). In altre parole, la classe delle soluzioni della (5) ammette  $y_M(x)$  quale massimo. Invertendo il senso della (5) si ottengono le stesse considerazioni, relative però all'integrale inferiore. Nella classe di tutte le funzioni continue le soluzioni della (5) vengono a formare una sottoclasse avente un elemento unito e il quale è anche massimo.

3. Osserviamo subito che la (5) ammette infinite soluzioni. Consideriamo infatti l'equazione funzionale:

$$(6) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx - \psi(x),$$

dove  $\psi(x)$  sia una funzione continua definita in  $(x_0, x_0 + \delta)$  tale che  $|\psi(x)| < b$ , e sia inoltre non negativa non decrescente. Si possono determinare

allora un numero  $\delta'$  inferiore ad  $a$  e una funzione  $z(x)$  continua in  $(x_0, x_0 + \delta')$  soddisfacente alla (6) e quindi alla (5).  $z(x)$  si costruisce con il procedimento indicato dal Tonelli<sup>(3)</sup> per le equazioni integrali del tipo di Volterra.

Viceversa, se  $y(x)$  è continua con  $|y(x) - y_0| \leq b$  e soddisfa in un intervallo  $(x_0, x_0 + \delta)$  alle (5), posto:

$$\psi(x) = -y(x) + y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx,$$

la funzione così definita risulta continua, non negativa non decrescente.

Si può affermare così che le soluzioni continue di (5) sono date tutte dalle soluzioni della (6) dove  $\psi(x)$  sia una qualunque funzione continua non negativa non decrescente.

4. Indichiamo con  $y_M(x)$  l'integrale superiore dell'equazione (2) e con  $y(x)$  una qualunque soluzione continua della (5). Poniamo:

$$y_M(x) - y(x) = \varphi(x),$$

questa funzione risulta definita nel campo  $(x_0, x_0 + \delta)$  comune di definizione delle due funzioni  $y_M(x)$  e  $y(x)$  e risulterà ivi continua. Avremo:

$$(7) \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x) + \varphi(x)] dx - y(x),$$

ossia  $\varphi(x)$  soddisfa a una equazione del tipo di Volterra.

Viceversa se  $\bar{\varphi}(x)$  è soluzione di (7), dove  $y(x)$  è quella soluzione della (6) fissata in precedenza, la  $y(x) + \bar{\varphi}(x)$  è soluzione di (2), cioè:

$$y(x) + \bar{\varphi}(x) \leq y_M(x),$$

e quindi per quanto abbiamo già posto sarà  $\bar{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$

Pertanto, se la (7) ammette una soluzione  $\varphi^*(x)$  non negativa anche  $\varphi(x)$  sarà non negativa e sarà pure, così,  $y'(x) \leq y_M(x)$  e l'asserto del n. 2 sarà così provato.

5. Per arrivare al risultato enunciato nel numero precedente ci gioveremo del metodo d'approssimazione secondo Tonelli. Conserviamo le notazioni e le relazioni dei numeri precedenti e sia  $y(x)$  una soluzione continua della (5). Per quanto abbiamo ammesso sia  $M$  il massimo modulo di  $f(x, y)$  in  $C$ , sarà:

$$|\psi(x) + y(x) - y_0| < M|x - x_0|,$$

(3) L. TONELLI, Memória citata.

e la (7) si può scrivere:

$$(7') \quad \varphi(x) = \int_{x_0}^x \{f[x, y(x) + \varphi(x)] - f[x, y(x)]\} dx + \psi(x),$$

che è una equazione funzionale del tipo di Volterra nella funzione  $\varphi(x)$ . Possiamo sempre supporre  $y(x_0) = y_0$ , in caso diverso con ovvio ragionamento, ci si riconduce a questo caso.

Costruiamo le approssimazioni successive:

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \psi(x_0), \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n}, \quad \text{sarà cioè} \quad \varphi_n^{(1)}(x) \geq 0.$$

Costruiamo poi l'espressione:

$$(I) \quad \psi\left(x - \frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0}^x \{f[x, y(x) + \psi(x_0)] - f[x, y(x)]\} dx,$$

essa per  $x = x_0 + \frac{\delta}{n}$  assume il valore  $\psi(x_0)$  e risulta continua per tutti gli  $x$  dell'intervallo  $\left(x_0 + \frac{\delta}{n}, x_0 + 2\frac{\delta}{n}\right)$ . Due casi si possono presentare e precisamente, per tutti gli  $x$  di questo intervallo essa risulta non negativa oppure no. Nel primo caso prenderemo la (I) quale espressione di  $\varphi_n^{(2)}(x)$ . Nel caso opposto sia  $\left(x_0 + \frac{\delta}{n}, \xi_1\right)$  il massimo intervallo in cui (I) risulta non negativa, sarà perciò:

$$\psi\left(\xi_1 - \frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0}^{\xi_1 - \frac{\delta}{n}} \{f[x, y(x) + \psi(x_0)] - f[x, y(x)]\} dx = 0.$$

Porremo allora  $\varphi_n^{(2)}(x)$  uguale all'espressione I per i soli  $x$  dell'intervallo  $\left(x_0 + \frac{\delta}{n}, \xi_1\right)$ , e sarà  $\varphi_n^{(2)}(\xi_1) = 0$ .

Per  $\xi_1 \leq x \leq \xi_1 + \frac{\delta}{n}$ , porremo invece:

$$(II) \quad \varphi_n^{(3)}(x) = \psi\left(x - \frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0}^{\xi_1 - \frac{\delta}{n}} \{f[x, y(x) + \varphi_n^{(2)}(x)] - f[x, y(x)]\} dx + \\ + \int_{\xi_1 - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} \{f[x, y(x) + \varphi_n^{(2)}(\xi_1)] - f[x, y(x)]\} dx,$$

dove il secondo integrale messo per simmetria è evidentemente nullo, mentre il primo è uguale a  $-\psi\left(\xi_1 - \frac{\delta}{n}\right)$ , sarà così:

$$\varphi_n^{(3)}(x) = \psi\left(x - \frac{\delta}{n}\right) - \psi\left(\xi_1 - \frac{\delta}{n}\right) \geq 0 \quad \text{per} \quad \xi_1 \leq x \leq \xi_1 + \frac{\delta}{n}.$$

Si prosegue nella maniera indicata sino a ricoprire interamente l'intervallo  $(x_0, x_0 + \delta)$ , dove  $\delta$  sia opportunamente scelto; si verrà così a costruire una funzione  $\varphi_n(x)$  mediante la:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n^{(r)}(x) \quad \text{per } x \text{ nell'intervallo } r\text{-esimo.}$$

Questa funzione risulta continua, non negativa e soddisfa a una relazione del tipo (I) o (II).

È facile convincersi che queste funzioni  $\varphi_n(x)$  sono equilimitate. Esse sono inoltre equicontinue, infatti proviamo che lo sono le differenze  $\varphi_n(x) - \varphi(x)$ .

Siano  $x_1 < x_2$  due numeri appartenenti alla stessa parte della suddivisione che è stata creata per costruire  $\varphi_n(x)$  ed in essa valga la (I), sarà:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2) &= \psi\left(x_1 - \frac{\delta}{n}\right) - \psi\left(x_2 - \frac{\delta}{n}\right) + \\ &+ \int_{x_1 - \frac{\delta}{n}}^{x_2 - \frac{\delta}{n}} \{f[x, y(x) + \varphi(x)] - f[x, y(x)]\} dx, \end{aligned}$$

e la deduzione rimane ovvia. Se invece  $x_1$  e  $x_2$  appartengono ad uno stesso intervallo in cui vale la (II) è:

$$\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2) \leq \psi\left(x_1 - \frac{\delta}{n}\right) - \psi\left(x_2 - \frac{\delta}{n}\right),$$

e se ne ricava uguale conseguenza. Se  $x_1, x_2$  si trovano nè nell'uno nè nell'altro caso, siano  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  i punti, analoghi a  $\xi_1$ , intermedi tra  $x_1$  e  $x_2$ , sarà:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2) &= \varphi_n(x_1) - \varphi_n(\xi_1) + \varphi_n(\xi_1) - \varphi_n(\xi_2) + \dots + \varphi_n(\xi_r) - \varphi_n(x_2) = \\ &= \psi\left(x_1 - \frac{\delta}{n}\right) + \psi\left(\xi_1 - \frac{\delta}{n}\right) - \psi\left(\xi_2 - \frac{\delta}{n}\right) + \dots + \psi\left(\xi_r - \frac{\delta}{n}\right) - \psi\left(x_2 - \frac{\delta}{n}\right) + \\ &+ \text{ancora } r \text{ integrali in cui la funzione integranda è minore di } 2M. \end{aligned}$$

Avremo così:

$$\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2) \leq \psi\left(x_1 - \frac{\delta}{n}\right) - \psi\left(x_2 - \frac{\delta}{n}\right) + 2M|x_1 - x_2|,$$

quanto affermato risulta così completamente dimostrato.

Per il teorema di Ascoli, dalla successione  $\{\varphi_n(x)\}$  si può estrarre un'altra successione  $\{\varphi_{n_m}(x)\}$  che converge uniformemente a una funzione  $\varphi(x)$ , continua, che soddisfa alla (7'). Abbiamo infatti:

$$\varphi_{n_m}(x) = \psi\left(x - \frac{\delta}{n_m}\right) + \int_{x_0}^{x - \frac{\delta}{n_m}} \{f[x, y(x) + \varphi_{n_m}(x)] - f[x, y(x)]\} dx,$$



dove con  $\bar{\varphi}_{n_m}(x)$  abbiamo indicato  $\varphi_{n_m}(x)$  oppure  $\varphi_{n_m}(\xi_i)$  e  $\xi_i$  differisce per meno di  $\frac{\delta}{n_m}$  da  $x$ . In forza della equicontinuità, comunque fissato un  $\varepsilon > 0$ , si può determinare un  $\bar{n}_m$  tale che per  $n_m > \bar{n}_m$ , sia  $|\bar{\varphi}_{n_m}(x) - \varphi_{n_m}(x)| < \varepsilon$ , e per la continuità della  $f(x, y)$ , fissato un  $\sigma > 0$  si può determinare un  $\varepsilon > 0$  e quindi  $\bar{n}_m$  in modo che se  $n_m > \bar{n}_m$  sia:

$$|f[x, y(x) + \varphi_{n_m}(x)] - f[x, y(x) + \bar{\varphi}_{n_m}(x)]| < \sigma,$$

e di conseguenza potremo scrivere:

$$\left| \varphi_{n_m}(x) - \psi\left(x - \frac{\delta}{n_m}\right) + \int_{x_0}^x \{f[x, y(x) + \varphi_{n_m}(x)] - f[x, y(x)]\} dx \right| < \sigma \delta.$$

Rimane così provato che  $\varphi(x)$  è soluzione della (7') e risulta non negativa.

6. Le considerazioni ed i metodi esposti nei numeri precedenti permettono di trattare in modo uniforme, apportandovi naturalmente le dovute modifiche, i teoremi di confronto e la dipendenza degli integrali rispetto ai parametri e ai valori iniziali noti, nonchè di ottenerne di più affinati. Questo sarà il compito dei numeri seguenti.

Osserviamo intanto che tutti i teoremi di confronto <sup>(4)</sup> generalmente noti rientrano nel caso esposto nel n. 5.

Osserviamo ancora che se supponiamo  $f(x, y)$  monotona, non decrescente rispetto alla  $y$ , la costruzione precedente permette di provare che la funzione  $\varphi(x)$  è non negativa anche ove non si ammetta non decrescente la  $\psi(x)$ . Si ottiene così una notevole generalizzazione diretta del lemma di Gronwall portando così alla spiegazione naturale dei motivi che impongono la sua enunciazione nei termini classici.

Facciamo notare inoltre una nuova interpretazione degli integrali superiori ed inferiori delle equazioni differenziali come massimi e minimi della classe delle soluzioni continue della (6) o della opposta.

Infine si vede subito come, quale conseguenza, si ottengono anche i teoremi di confronto di Perron <sup>(5)</sup>, i quali si possono così enunciare anche senza far uso delle derivate sinistre o destre.

(4) Anche i teoremi di L. GIULIANO, *Generalizzazione di un lemma di Gronwall...* « Acc. Lincei », Ser. VIII, vol. I, fasc. 12, p. 1264, rientrano in questo caso: il lemma di cui egli fa uso si deduce immediatamente da quanto qui esposto.

(5) Vedere P. PERRON, *Ein neuer Existenzbeweis für...* « Math. Annalen », 76 (1915), pp. 471-484, oppure G. SANSONE libro citato.

**Analisi.** — *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali.* Nota II di E. BAIADA, presentata<sup>(\*)</sup> dal Corrisp. G. SANSONE.

7. Adotteremo le stesse notazioni usate nella prima Nota,  $\psi(x)$  indicherà una funzione continua non negativa non decrescente.

Dimostreremo che ammesse determinate ipotesi su  $\psi(x)$  che preciseremo in seguito, la minima soluzione della (7) è non negativa. In seguito ai ragionamenti al n. 4 (I parte) ne concluderemo che indicato con  $y_m(x)$  l'integrale inferiore si avrà:

$$y(x) \leq y_m(x),$$

relazione questa che precisa e rafforza quella ottenuta precedentemente. Poniamo:

$$\varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) = \max |f[x, y_1] - f[x, y_2]|,$$

$$(x, y_1), (x, y_2) \text{ in } C, \quad e \quad |y_1 - y_2| \leq (4M + 3) \frac{\delta}{n}.$$

Le approssimazioni successive seguenti:

$$\tau_n(x) = -4M \frac{\delta}{n}, \quad \text{per } x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n},$$

$$\tau_n(x) = \tau_n\left(x_0 + r \frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0 + (r-1) \frac{\delta}{n}}^{x_0 + r \frac{\delta}{n}} \{f[x, y(x) + \psi(x) + \tau_n(x)] - f[x, y(x)]\} dx -$$

$$- \int_{x_0 + (r-1) \frac{\delta}{n}}^{x_0 + r \frac{\delta}{n}} \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) dx, \quad \text{per } x_0 + r \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + (r+1) \frac{\delta}{n},$$

convergono per  $n$  tendente all'infinito, uniformemente all'integrale inferiore della (7), dove sia inteso che  $\tau(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ . Quindi l'integrale inferiore della (7) è il limite per  $n \rightarrow \infty$  della successione  $\{\varphi_n(x)\}$ , dove  $\varphi_n(x)$  sono date dalle:

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi_n(x) = \psi(x) - 4M \frac{\delta}{n}, & \text{per } x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n}, \\ \varphi_n(x) = \varphi_n\left(x_0 + r \frac{\delta}{n}\right) - \psi\left(x_0 + r \frac{\delta}{n}\right) + \psi(x) + \\ + \int_{x_0 + (r-1) \frac{\delta}{n}}^{x_0 + r \frac{\delta}{n}} \{f[x, y(x) + \varphi_n(x)] - f[x, y(x)]\} dx - \int_{x_0 + (r-1) \frac{\delta}{n}}^{x_0 + r \frac{\delta}{n}} \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) dx, \\ \text{per } x_0 + r \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + (r+1) \frac{\delta}{n}. \end{cases}$$

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

Ora nei ragionamenti che giustificano questa costruzione <sup>(1)</sup> dell'approssimazione  $\varphi_n(x)$ , non interviene in modo essenziale il tipo della suddivisione in parte dell'intervallo  $(x_0, x_0 + \delta)$  e non è quindi indispensabile che la suddivisione sia fatta in parti uguali, basta invece ammettere che le parti in numero finito siano tutte d'ampiezza inferiore a  $\frac{\delta}{n}$ . In sostituzione alle approssimazioni (8) noi penseremo allora di costruire  $\varphi_n(x)$  con la legge precedente fintantochè nell'intervallo  $\left(x_0 + r \frac{\delta}{n}, x_0 + (r+1) \frac{\delta}{n}\right)$  sia  $\varphi_n(x) \equiv -(4M+3) \frac{\delta}{n}$ , e ciò avviene realmente per qualche intervallo, sicuramente per la prima parte. Se nel detto intervallo ciò non avvenisse, sia  $\xi$  il massimo numero per cui in  $\left(x_0 + r \frac{\delta}{n}, \xi\right)$  sia  $\varphi_n(x) \equiv -(4M+3) \frac{\delta}{n}$ . Nell'intervallo  $\left(x_0 + r \frac{\delta}{n}, \xi\right)$  definiremo  $\varphi_n(x)$  sempre con la stessa legge, mentre nell'intervallo  $\left(\xi, \xi + \frac{\delta}{n}\right)$  definiremo  $\varphi_n(x)$  nel modo seguente:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(\xi) + \psi(x) - \psi(\xi) + \int_{\xi - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} \{f[x, y(x) + \varphi(x)] - f[x, y(x)]\} dx - \int_{\xi - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) dx$$

e cioè, nella stessa maniera di sopra ma a partire da  $\xi$ . Poniamo per comodità di calcoli:

$$\{f[x, y(x) + \varphi(x)] - f[x, y(x)]\} - \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) = A.$$

Ammetto che  $\varphi_n(\xi) = -(4M+3) \frac{\delta}{n}$ , dimostriamo che nell'intervallo  $\left(\xi - \frac{\delta}{n}, \xi\right)$ ,  $\varphi_n(x)$  risultava negativa e quindi  $\varphi_n(x) - \varphi_n(\xi) \leq (4M+3) \frac{\delta}{n}$ .

Infatti posto  $x_1 = x_0 + r \frac{\delta}{n}$ , sarà per  $x_1 \leq x \leq \xi$ :

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(x_1) + \psi(x) - \psi(x_1) + \int_{x_1}^x A dx,$$

mentre,

$$\varphi_n(\xi) = \varphi_n(x_1) + \psi(\xi) - \psi(x_1) + \int_{x_1}^{\xi} A dx = -(4M+3) \frac{\delta}{n}.$$

Quindi:

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(\xi) = \psi(x) - \psi(\xi) + \int_{\xi}^x A dx,$$

(1) Vedere E. BAIADA, *Le approssimazioni successive e gli integrali delle equazioni differenziali ordinari*, « Rendiconti Acc. Naz. Lincei ».

e cioè, ricordata la non decrescenza di  $\psi(x)$ :

$$\varphi_n(x) \leq -(4M+3) \frac{\delta}{n_0} + (4M+3)(\xi - x),$$

ciò vorrà dire, che, in particolare,  $\varphi_n(x_1)$  è negativo o nullo.

Se invece indichiamo per brevità  $\bar{x}_1$  il numero  $x_0 + (r-1) \frac{\delta}{n}$ , sarà per

$$\xi - \frac{\delta}{n} \leq x \leq \bar{x}_1,$$

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(\bar{x}) + \psi(x) - \psi(\bar{x}) + \int_{\bar{x} - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} A dx,$$

$$\varphi_n(\bar{x}_1) = \varphi_n(\bar{x}) + \psi(\bar{x}_1) - \psi(\bar{x}) + \int_{\bar{x} - \frac{\delta}{n}}^{\bar{x}_1 - \frac{\delta}{n}} A dx,$$

avremo, analogamente a quanto fatto sopra

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(\bar{x}_1) = \psi(x) - \psi(\bar{x}_1) + \int_{\bar{x}_1}^x A dx$$

$$\varphi_n(x) \leq -(4M+3) \frac{\delta}{n} + (4M+3)(\bar{x}_1 - x) \leq 0.$$

Avremo così che, per la definizione stessa di  $\varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right)$  l'espressione  $A$  risulterà minore in valor assoluto di  $2\varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right)$ , nell'intervallo  $\left(\xi - \frac{\delta}{n}, \xi\right)$  e sarà:

$$\varphi_n(x) \geq \varphi_n(\xi) = -(4M+3) \frac{\delta}{n},$$

se:

$$(9) \quad \psi(x) - \psi(\xi) \geq 2 \int_{\xi - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) dx.$$

Se la disuguaglianza precedente è supposta verificata per tutti gli  $x$  di  $(x_0, x_0 + \delta)$ , sarà in tutto questo intervallo,  $\varphi_n(x) \geq -(4M+3) \frac{\delta}{n}$ , e si potrà quindi affermare che la soluzione minima delle (7) è non negativa; avremo così il seguente:

TEOREMA: Se  $f(x, y)$  è definita e continua in  $C$ , ogni funzione  $y(x)$  continua soddisfacente alla:

$$\dot{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx + \psi(x),$$



dove  $\psi(x)$  è non negativa, non decrescente, continua, e soddisfacente alla (9), risulterà minore dell'integrale inferiore dell'equazione integrale:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx.$$

Osserviamo subito che il teorema così dimostrato contiene l'ordinario teorema di confronto <sup>(2)</sup> basta porre:

$$\psi(x) = N(x - x_0)$$

con  $N > 0$ , la (9) è allora sicuramente soddisfatta per  $n$  sufficientemente grande.

8. Consideriamo un'equazione differenziale dipendente da un parametro  $\lambda$ :

$$(10) \quad y' = f(x, y, \lambda)$$

definita per tutti i  $\lambda$  d'un certo intervallo, indicati con  $y_M(x, \lambda; x_0, y_0)$  e con  $y_m(x, \lambda; x_0, y_0)$  rispettivamente l'integrale superiore e l'integrale inferiore uscenti dal punto  $(x_0, y_0)$ , se ne conosce il comportamento rispetto ai propri parametri <sup>(3)</sup>. Nel caso più generale essi non sono continui rispetto a  $(\lambda, x_0, y_0)$  ma soltanto semicontinui. Per convincersene basta considerare un'equazione differenziale del tipo (10) che presenti, per  $\lambda = \lambda_0$  e per i valori iniziali  $(x_0, y_0)$  il caso di Peano con tutto un pennello di integrali e si supponga (o si costruisca)  $f(x, y, \lambda)$  crescente rispetto a  $\lambda$ . Per i noti teoremi di confronto, si ha:

$$y_M(x, y) < y_m(x, \lambda_0) \quad \text{se } \lambda < \lambda_0;$$

$$y_m(x, \lambda) > y_M(x, \lambda_0) \quad \text{se } \lambda > \lambda_0.$$

Qualunque soluzione della (10) non può quindi essere continua rispetto a  $\lambda$  <sup>(4)</sup>. La continuità sussiste nel caso dell'unicità della soluzione.

(2) Vedere per esempio G. SANSONE, libro citato, Nota I, p. 88, vol. II.

(3) Vedere E. PINI, *Sulla continuità degli integrali*. « Rendiconti Acc. Lincei » (6), 9, (1929).

(4) Questo ragionamento permette di fare osservare [Vedere O. PERRON, *Ueber Existenz und Nichtexistenz* ... « Math. Zeitschrift », 27 Band (1928)] che l'equazione alle derivate parziali:  $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z, q)$  ammessa la sola ipotesi della continuità della  $f$  può non ammettere soluzione (anche a prescindere d'un insieme superficiale di misura nulla). Infatti si possono trovare esempi di equazioni differenziali del tipo (10) che presentano il caso di Peano in tutti i punti  $(x, y)$  d'una regione (caso di Lavrentieff) e che siano inoltre crescenti rispetto a  $\lambda$ . La soluzione se esistesse dovrebbe essere discontinua rispetto a  $\lambda$  per tutti i  $\lambda$  d'un certo intervallo e quindi l'equazione  $z' = f(x, z, \lambda)$  avrebbe soluzione ovunque discontinua rispetto a  $\lambda$ . Se interpretiamo quest'ultima equazione come un'equazione alle derivate parziali sostituendo a  $\lambda$  la variabile  $y$ , equazione in cui non compare la  $q$ , vediamo che a maggiore ragione l'equazione  $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z, q)$  può non ammettere soluzione.

Dimosteremo prima per via diretta la semicontinuità degli integrali rispetto ai parametri, indi faremo vedere in quali condizioni si può ugualmente assicurare la continuità<sup>(5)</sup>.

9. Sia  $f(x, y, \lambda)$  continua rispetto a  $(x, y, \lambda)$  nel campo:

$$A \equiv (x_0 \leq x \leq x_0 + \delta \quad ; \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b \quad ; \quad \lambda_0 - a \leq \lambda \leq \lambda_0 + a).$$

e sia:

$$|f(x, y, \lambda)| \leq M \quad \text{per} \quad (x, y, \lambda) \in A.$$

Indichiamo con  $y(x, \xi, \eta, \lambda)$  la soluzione dell'equazione (10) tale che:

$$y(\xi, \xi, \eta, \lambda) = \eta$$

la costruzione della soluzione viene effettuata con vari metodi. Noi metteremo nell'insieme  $\{y_n(x)\}$  tutte quelle funzioni continue tali che:

$$(A) \quad \left| y_n(x) - \eta - \int_{\xi}^x f[x, y_n(x)] dx \right| \leq 2M \frac{\delta}{n},$$

e l'insieme detto non è vuoto perchè contiene l'approssimazione  $n$ -esima di Tonelli. È chiaro anche che  $\{y_n(x)\}$  contiene  $\{y_{n+1}(x)\}$ .

Tutte le funzioni della successione  $\{y_n(x)\}$  sono equilimitate per il modo stesso con il quale sono state definite. D'altra parte:

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} f[x, y_n(x)] dx \right| + 4M \frac{\delta}{n} \leq 5M \frac{\delta}{n},$$

se  $|x_1 - x_2| < \frac{\delta}{n}$ . Perciò comunque fissato un  $\varepsilon > 0$  si può determinare un  $\bar{n}$  intero positivo e un  $\sigma > 0$  tale che se  $n \geq \bar{n}$  e  $|x_1 - x_2| < \sigma$ , sia:

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| < \varepsilon.$$

Si può allora, dalla successione  $\{y_n(x)\}$ , estrarre un'altra successione  $\{y_{n_m}(x)\}$  che converge uniformemente a  $y_M(x, \xi, \eta, \lambda)$ .

Facciamo ora vedere che, comunque fissato  $\bar{n}$  intero positivo si può determinare un  $\sigma > 0$  tale che, se:

$$(12) \quad |\lambda - \lambda_0| \leq \sigma, \quad |\xi - \xi_0| \leq \sigma, \quad |\eta - \eta_0| \leq \sigma,$$

allora:

$$\{y_{\bar{n}+1}(x, \xi, \eta, \lambda)\} \text{ è interamente contenuto in } \{y_n(x, \xi_0, \eta_0, \lambda_0)\}.$$

(5) La continuità rispetto ai parametri è stata dimostrata, nel caso dell'unicità, per le equazioni funzionali del tipo di Volterra da S. CINQUINI, *Sulle equazioni del tipo di Volterra* « Rend. Acc. Lincei », 6<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem. (1933), fasc. 8.

Infatti dalla (A) viene:

$$\left| y_{\bar{n}+1}(x, \xi, \eta, \lambda) - \eta - \int_{\xi}^{x - \frac{\delta}{\bar{n}+1}} f[x, y_{\bar{n}+1}(x, \xi, \eta, \lambda), \lambda] dx \right| < 2M \frac{\delta}{\bar{n}+1},$$

Proviamo che basta scegliere  $\sigma$  opportunamente per modo che:

$$\left| y_{n+1}(x, \xi, \eta, \lambda) - \eta_0 - \int_{\xi}^{x - \frac{\delta}{n}} f[x, y_{n+1}(x, \xi, \eta, \lambda), \lambda_0] dx \right| < 2M \frac{\delta}{n}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi}^{x - \frac{\delta}{\bar{n}+1}} f[x, y_{\bar{n}+1}(x, \xi, \eta, \lambda), \lambda] dx - \int_{\xi_0}^{x - \frac{\delta}{\bar{n}}} f[x, y_{\bar{n}+1}(x, \xi, \eta, \lambda), \lambda_0] dx = \\ &= \int_{\xi_0}^{x - \frac{\delta}{\bar{n}+1}} \{f[x, y_{\bar{n}+1}(x, \xi, \eta, \lambda), \lambda] - f[x, y_{\bar{n}+1}(x, \xi, \eta, \lambda), \lambda_0]\} dx + \int_{\xi}^{\xi_0} B dx + \int_{x - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{\bar{n}+1}} C dx \end{aligned}$$

dove B e C sono espressioni inferiori in valor assoluto a  $2M$ . Ora se poniamo  $\varepsilon = \left( \frac{M\delta}{n} - \frac{M\delta}{n+1} \right)$ , si possono, in corrispondenza a  $\frac{\varepsilon}{4}$  determinare un  $\sigma_1 > 0$  tale che se  $|\lambda - \lambda_0| \leq \sigma_1$ , il primo integrale del secondo membro dell'ultima espressione scritta, risulti in valor assoluto minore di  $\frac{\varepsilon}{4}$ , un  $\sigma_2$  tale che se  $|\xi - \xi_0| < \sigma_2$  il secondo integrale della detta espressione sia inferiore in valor assoluto a  $\frac{\varepsilon}{4}$ , se con  $\sigma$  indichiamo il minor dei numeri  $\frac{\varepsilon}{4}, \sigma_1, \sigma_2$  abbiamo l'asserto. Fissato un numero  $\varepsilon > 0$ , si può determinare un  $\bar{n}$  intero tale che se  $n_m \geq \bar{n}$  sia, se  $\bar{y}_{n_m}(x, \lambda_0)$  indica la massima curva d'accumulazione di  $\{y_{n_m}(x, \lambda_0)\}$ :

$$|y_M(x, \xi_0, \eta_0, \lambda_0) - \bar{y}_{n_m}(x, \lambda_0)| < \varepsilon,$$

in relazione a questo  $\bar{n}$  si può determinare un  $\sigma > 0$  tale che se sono verificate le (12),  $\{y_{n_m+1}(x, y)\}$  è interamente contenuto in  $y_n(x, \lambda_0)$  e quindi:

$$y_M(x, \xi, \eta, \lambda) \leq y_{n_m}(x, \lambda_0)$$

e perciò:

$$y_M(x, \xi, \eta, \lambda) \leq y_M(x, \xi_0, \eta_0, \lambda) + \varepsilon.$$

Abbiamo ottenuto così il classico

**TEOREMA.** — *Gli integrali superiori ed inferiori delle equazioni differenziali del 1° ordine (10) con secondo membro continuo sono rispettivamente semicontinui superiormente e inferiormente rispetto al parametro e ai valori iniziali.*

10. Nel caso che l'equazione (10) relativamente alla condizione (11) e al valore  $\lambda_0$  del parametro, ammetta una sola soluzione, gli integrali stessi

della (10) risultano continui rispetto al parametro e ai valori iniziali per quel valore iniziale e quel valore del parametro.

Prendendo la questione da un altro punto di vista, caratterizzeremo alcuni casi in cui l'integrale inferiore (superiore) varia con continuità rispetto al parametro senza per altro che sussista la unicità della soluzione. Basterà assicurare che la soluzione, se vengono soddisfatte condizioni che determineremo in seguito, sia tale che:

$$y_m(x, \lambda) \leq y_m(x, \lambda_0), \quad \text{se } \lambda < \lambda_0 \quad (\text{continuità a sinistra})$$

perchè, combinando con la semicontinuità già vista se ne ricava l'asserto.

Ora per affermare che la relazione precedente è soddisfatta sono utili i teoremi di confronto già visti, cioè se:

$$y_m(x, \lambda_0) = y_0 + \int_{x_0}^x [f[x, y(x, \lambda_0), \lambda] + \psi(x, \lambda)] dx$$

dove  $\psi(x, \lambda)$  risulta crescente non negativa qualunque sia  $\lambda < \lambda_0$  per i teoremi di confronto già visti se ne deduce  $y_m(x, \lambda_0) \geq y_m(x, \lambda)$  e quindi anche la continuità a sinistra.

Facciamo ora osservare che la condizione precedente può essere notevolmente allargata, sempre seguendo gli stessi ragionamenti fatti nei numeri precedenti. Per quanto abbiamo detto, tutto dipende dall'equazione:

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \{f[x, y(x)] - f[x, y(x) - \varphi(x)]\} dx + \psi(x)$$

[abbiamo, per brevità, tralasciato di scrivere il parametro  $\lambda$  e abbiamo posto  $y(x) = y_m(x, \lambda_0)$ ] caratterizzando i casi in cui essa abbia soluzione non negativa.

Per arrivare a questa conclusione non è necessario, come abbiamo ammesso in precedenza, che  $\psi(x)$  sia sempre non decrescente non negativa. Basta che l'incremento che subisce l'integrale per effetto dell'incremento positivo di  $\varphi(x)$  riesca a compensare il decremento di  $\psi(x)$ . Più precisamente, se andiamo a considerare le approssimazioni successive come abbiamo fatto nei numeri precedenti, avremmo, se ammettiamo l'ipotesi:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) > M(x)(y_1 - y_2), \quad [\text{se } y_1 > y_2, \text{ e con } M(x) > 0]$$

e se teniamo presente la relazione precedente, che l'approssimazione  $n$ -esima nella striscia  $r$ -esima ha l'espressione:

$$(\alpha) \quad \varphi(x) > \varphi(x_r) + \psi(x) - \psi(x_r) + \int_{x_r - \frac{\delta}{n}}^{x_r + \frac{\delta}{n}} M(x) \varphi(x_r) dx \quad x_r = x_0 + r \frac{\delta}{n}$$



Se ne potrà dedurre che anche  $\varphi\left(x_r + \frac{\delta}{n}\right) > 0$  se

$$(\beta) \quad \varphi(x_r) + \psi(x) - \psi(x_r) + \int_{x_r}^x M(x) \varphi(x_r) dx > 0,$$

ora questa non rappresenta altro che l'approssimazione  $n$ -esima nella striscia  $r$ -esima relativa all'equazione integrale lineare:

$$(\gamma) \quad \tau(x) = \int_{x_1}^x M(x) \tau(x) dx + \psi(x) + \varphi(x_1) - \psi(x_1)$$

con condizione iniziale  $\varphi(x_1) > 0$ . La  $(\beta)$  sarà allora assicurata se questa equazione per una qualunque condizione iniziale positiva abbia soluzione positiva.

Riassumendo:

se  $\psi(x)$  è tale che:

1° risulti positiva crescente per  $x_0 \leq x \leq x_0 + b$ , dove  $b$  è un numero fissato d'altra parte completamente arbitrario.

2° valga per la  $f$  la relazione:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) > M(x)(y_2 - y_1),$$

se  $y_2 - y_1 > 0$  e  $M(x)$  sia continua e positiva.

3° l'equazione integrale  $(\gamma)$  abbia soluzione (unica) positiva, qualunque sia la condizione iniziale positiva.

Vale allora il teorema di confronto del n. 7.

Infatti in virtù del teorema del n. 7,  $\varphi(x_r)$  risulta positiva per qualche  $x_r$ , a condizione che la suddivisione sia sufficientemente fitta e  $x_0 < x_r \leq x_0 + b$ . Si vada a considerare la soluzione della  $(\gamma)$  con condizione iniziale  $x_1 = x_r$ ;  $\tau(x_r) = \varphi(x_r) > 0$  in forza della  $(\alpha)$  sarà  $\tau(x) \leq \varphi(x)$  e poichè  $\tau(x) > 0$  avremo l'asserto.

Ogni qual volta queste condizioni siano verificate qualunque sia  $\lambda < \lambda_0$ , l'integrale inferiore risulterà continuo (a sinistra, rispetto al parametro  $\lambda$ ).

Analoghe considerazioni valgono per  $\lambda > \lambda_0$  e la continuità a destra, come pure per quanto si riferisce all'integrale inferiore, avendo cura di cambiare opportunamente verso alle disuguaglianze.

Si possono applicare le considerazioni qui svolte onde provare che gli integrali superiori ed inferiori dell'equazione differenziale:

$$y' = |y + \lambda x|^{\frac{1}{2}} - \lambda,$$

soddisfacenti alla condizione iniziale  $x = 0, y = 0$  tendono per  $\lambda = +0$  ( $\lambda = -0$ ) agli integrali superiori ed inferiori dell'equazione:

$$y' = |y|^{\frac{1}{2}}$$

mentre sono inapplicabili tutti gli altri teoremi di confronto.

**Analisi.** — *Sull'integrale massimo e minimo e sulla unicità della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali del primo ordine* (\*). Nota (\*\*) di U. BARBUTI, presentata dal Corrisp. G. SANSONE.

1. — A proposito del problema della unicità <sup>(1)</sup> della soluzione della equazione differenziale, ordinaria, a secondo membro continuo:

$$y' = F(x, y),$$

A Rosemblatt <sup>(2)</sup>, M. Nagumo <sup>(3)</sup> ed O. Perron <sup>(4)</sup>, hanno dato un criterio, assai noto, che si riassume in una disuguaglianza atta a maggiorare, opportunamente, il valore assoluto del rapporto incrementale rispetto ad  $y$  del secondo membro della equazione data.

Indagando più a fondo sul significato di tale disuguaglianza, ho constatato che essa *determina* il segno della derivata della differenza di due integrali uscenti da un medesimo punto. Sfruttando questa circostanza, assegno una condizione sufficiente perchè un dato integrale sia massimo o minimo e, di qui, un criterio d'unicità, che generalizza quello degli autori citati. Provo poi dei teoremi, in certo senso analoghi, per i sistemi di equazioni differenziali.

**TEOREMA 1.** — *Sia  $F(xy)$  una funzione continua nel rettangolo*

$$R: |x - x^0| \leq a \quad ; \quad |y - y^0| \leq b.$$

*Sia  $y = f(x)$  un integrale della equazione differenziale:*

$$(1) \quad y' = F(x, y);$$

*uscente da  $(x^0, y^0)$  ed esistente in  $(x^0 - a, x^0 + a)$ .*

*Se per ogni funzione continua <sup>(5)</sup>  $y = y(x)$ ; [ $y(x^0) = y^0$ ]; e tale che per ogni  $x \neq x^0$  di  $(x^0 - a, x^0 + a)$  sia  $y(x) \geq f(x)$  e  $|y(x) - y^0| \leq b$ , si ha:*

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1947.

(1) Per una esposizione sistematica dei criteri più in uso per la unicità e per una notevole bibliografia dell'argomento vedere: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte II, pp. 85-104, e p. 134, ed. Zanichelli 1941.

(2) A. ROSEBLATT, *Ueber die Existenz...*, «Ark. för Matematik Astronomi och Fysik», 1908, t. 5.

(3) M. NAGUMO, *Eine hinreichende Bedingung für die Unität...*, «Japanese Journal of Mathematics», t. 3, 1926, pp. 107-112.

(4) O. PERRON, *Eine hinreichende Bedingung für die Unität...*, «Math. Zeitschr.», 28, 1928, pp. 216-219.

(5) Per la validità della proposizione basta aver constatato che la (2) è verificata per funzioni  $y(x)$  derivabili.

$$(2) \quad F(x, y(x)) - F(x, f(x)) \leq \frac{1}{x - x^0} \{y(x) - f(x)\}^{(6)},$$

allora  $y = f(x)$  è il massimo integrale uscente da  $(x^0, y^0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** — Sia  $y = g(x)$  un'altra curva integrale della equazione differenziale (1) uscente da  $(x^0, y^0)$  ed esistente in  $(x^0 - \delta, x^0 + \delta)$ , ( $0 < \delta \leq a$ ).

Ragionando prima per i punti a destra di  $x^0$ , si supponga esistere un punto almeno  $\bar{x}$  ( $x^0 < \bar{x} \leq x^0 + \delta$ ) in cui  $g(\bar{x}) > f(\bar{x})$ ; e si consideri la curva integrale  $f_1(x)$  della (1) uscente da  $(x^0, y^0)$  e così definita: nei punti  $x$  in cui  $g(x) \leq f(x)$ , si faccia  $f_1(x) = f(x)$ , nei punti  $x$  in cui  $g(x) > f(x)$  si ponga  $f_1(x) = g(x)$ . Sarà evidentemente  $f_1(x) \geq f(x)$ .

Si consideri ora la funzione

$$\Psi(x) = \frac{f_1(x) - f(x)}{x - x^0},$$

nell'intervallo  $(x^0, x^0 + \delta)$ . Tale funzione è definita in tutti i punti di questo intervallo tranne che in  $x^0$ . Ma è

$$\lim_{x \rightarrow x^0 + 0} \frac{f_1(x) - f(x)}{x - x^0} = 0,$$

perchè  $\Psi(x)$  non è che il rapporto incrementale della differenza  $f_1(x) - f(x)$  relativa al punto  $x^0$  e all'incremento  $x - x^0$  e tale differenza ha derivata nulla in  $x^0$ . Posto, allora,  $\Psi(x^0) = 0$ , la  $\Psi(x)$  risulta definita e continua in tutto  $(x^0, x^0 + \delta)$ ; inoltre nell'intervallo  $(\xi, x^0 + \delta)$  [ $x^0 < \xi < x^0 + \delta$ ] essa è derivabile e si ha per ogni  $x$  di questo intervallo:

$$\Psi'(x) = \frac{1}{x - x^0} \left\{ -\frac{1}{x - x^0} [f_1(x) - f(x)] + F(x, f_1(x)) - F(x, f(x)) \right\};$$

onde per la (2)

$$\Psi'(x) \leq 0 \quad (\xi < x \leq x^0 + \delta).$$

(6) Se per ogni funzione  $y(x) \leq f(x)$  è  $F(x, y(x)) - F(x, f(x)) \geq \frac{1}{x - x^0} \{y(x) - f(x)\}$ ,  $f(x)$  è il minimo integrale uscente da  $(x^0, y^0)$ . Col Teorema 1 può decidersi subito, ad esempio, che l'equazione  $y' = f(x, y)$ , dove:  $f(x, y) = Vy$ , quando  $y \geq 0$  e  $f(x, y) \equiv 0$  quando  $y < 0$ , ammette come massimo integrale, uscente a destra di  $(x^0, 0)$ , la funzione  $y = \frac{(x - x^0)^2}{4}$ .

Infatti la disuguaglianza  $\sqrt{y(x)} = \frac{x - x^0}{2} \geq \frac{1}{x - x^0} \left[ y(x) - \frac{(x - x^0)^2}{4} \right]$ , dà, se  $y(x) \geq \frac{(x - x^0)^2}{4}$ ,  $(x - x^0) \sqrt{y(x)} \leq y(x) + \frac{(x - x^0)^2}{4}$ , da cui  $(x - x^0) \sqrt{y(x)} \leq 2y(x)$ , onde  $\sqrt{y(x)} \geq \frac{x - x^0}{2}$  che è verificata appunto se  $y(x) \geq \frac{(x - x^0)^2}{4}$ .

Con lo stesso teorema può decidersi che  $y \equiv 0$  è il minimo integrale uscente a destra di  $(x^0, 0)$ .

(7) Si osservi che non si può migliorare la disuguaglianza (2) ponendo al secondo membro  $\bar{\Psi}(x) = M\Psi(x)$  con  $M$  costante positiva maggiore di 1. Perchè la disuguaglianza  $\Psi'(x) \leq 0$  che giuoca nella dimostrazione, non potrebbe più asserirsi per la nuova  $\bar{\Psi}(x) = M\Psi(x)$  se  $M > 1$ .

Così  $\Psi(x)$  risulta non crescente in  $(\xi, x^0 + \delta)$ , ma lo è anche in  $(x^0, x^0 + \delta)$  per la continuità in  $x^0$ . E poichè  $\Psi(x^0) = 0$ , si ha sempre per ogni  $x$  di  $(x^0, x^0 + \delta)$ :  $\Psi(x) \leq 0$  e quindi anche  $\Psi(\bar{x}) = \frac{f_1(\bar{x}) - f(\bar{x})}{\bar{x} - x^0} = \frac{g(\bar{x}) - f(\bar{x})}{\bar{x} - x^0} \leq 0$ , da cui segue  $g(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$  ciò che contraddice la ipotesi  $g(\bar{x}) > f(\bar{x})$ .

Un ragionamento analogo vale per i punti a sinistra di  $x^0$ .

Dal teorema ora provato segue subito il seguente criterio di unicità<sup>(8)</sup>.

**TEOREMA 2.** - Sia  $F(x, y)$  continua in  $R$  e si supponga che, per ogni coppia di funzioni continue<sup>(9)</sup>  $y_1(x), y_2(x)$ ;  $[y_1(x^0) = y_2(x^0) = y^0]$ ;  $y_1(x) \leq y_2(x)$ , e tali che per ogni  $x \neq x^0$  di  $(x^0 - a, x^0 + a)$  sia  $|y_1(x) - y^0| \leq b$ ,  $|y_2(x) - y^0| \leq b$ , si abbia

$$(3) \quad F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x)) \leq \frac{1}{x - x^0} \{y_2(x) - y_1(x)\},$$

allora l'equazione differenziale (1) ammette un solo integrale uscente da  $(x^0, y^0)$ .

Siano infatti  $g(x)$  e  $f(x)$  due integrali distinti della (1), uscenti da  $(x^0, y^0)$  ed esistenti in  $(x^0 - \delta, x^0 + \delta)$  ( $\delta \leq a$ ). Si consideri quello dei due integrali che in almeno un punto  $\bar{x}$  di  $(x^0 - \delta, x^0 + \delta)$  supera l'altro sia, cioè, ad esempio  $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$ . Poichè la (3) è soddisfatta per ogni  $x$  di  $(x^0 - \delta, x^0 + \delta)$  quando al posto di  $y_1(x)$  si mette  $g(x)$ , ne viene per il teorema precedente che  $g(x)$  è il massimo integrale della (1) uscente da  $(x^0, y^0)$ , contro la ipotesi che sia  $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$ .

2. - Con lo stesso ragionamento possono provarsi proposizioni un po' più generali delle precedenti. Alle disuguaglianze (2), (3) si possono sostituire, ad esempio, le altre

$$(2') \quad F(x, y(x)) - F(x, f(x)) \leq \left[ \frac{1}{x - x^0} - \frac{M'(x)}{M(x)} \right] \{y(x) - f(x)\}$$

$$(3') \quad F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x)) \leq \left[ \frac{1}{x - x^0} - \frac{M'(x)}{M(x)} \right] \{y_2(x) - y_1(x)\},$$

dove  $M(x)$  è definita in  $(x^0 - a, x^0 + a)$  tranne che in  $x^0$ , positiva, derivabile e limitata.

Se per  $M(x)$  può prendersi una costante si riottengono le (2) (3). Per provare il teorema 1 con la disuguaglianza (2') basta sostituire  $\Psi(x)$  con  $\Psi_1(x) = M(x) \Psi(x)$  e ripetere il ragionamento fatto. Per il teorema 2 vale lo stesso ragionamento.

(8) Questo criterio generalizza quello di ROSEBLATT-NAGUMO-PERRON e la proposizione di PEANO. Nel criterio di ROSEBLATT la disuguaglianza (3) è presa in valore assoluto e vale per ogni  $x \neq x^0$  di  $(x^0, x^0 + a)$  ed ogni coppia di valori  $y_1, y_2$ , tali che sia  $y_0 - b < y_1 < y_2 < y^0 + b$ , oppure  $y^0 - b < y_2 < y_1 < y^0 + b$ .

Ora supponendo  $y^0 - b < y_1 < y_2 < y_0 + b$  il valore assoluto a primo membro può toglersi.

(9) Cfr. nota (5).



3. - Per i sistemi di equazioni differenziali valgono le seguenti proposizioni.

TEOREMA 3. - Siano  $F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $n$  funzioni continue nel rettangolo

$$R: |x - x^0| \leq a, \quad |y_i - y_i^0| \leq b.$$

Sia  $f_i(x)$  un sistema di integrali del sistema differenziale

$$\{I\} \quad y'_i = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

uscite da  $(x^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$  ed esistente in  $(x^0 - a, x^0 + a)$ ; e si supponga che: scelte comunque  $n$  funzioni continue  $^{(10)} y_i(x)$ ,  $[y_i(x^0) = y_i^0]$ ; definite in  $(x^0 - a, x^0 + a)$ , soddisfacenti alla condizione:  $|y_i(x) - y_i^0| \leq b$ , per  $x$  variabile in  $(x^0 - a, x^0 + a)$ , si abbia:

$$\{2\} \quad F_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) - F_i(x, f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \leq \\ \leq \frac{1}{x - x^0} \text{Max}_{i=1}^n \{y_i(x) - f_i(x)\}^{(11)},$$

per ogni  $x$  di  $(x^0 - a, x^0 + a)$ ,  $x \neq x^0$  e per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Allora per ogni altro sistema di curve integrali  $g_i(x)$  del sistema  $\{I\}$ , uscente da  $(x^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$  è:

$$g_i(x) \leq f_i(x), \quad (x^0 - \delta \leq x^0 + \delta)$$

essendo  $(x^0 - \delta, x^0 + \delta)$  ( $\delta \leq a$ ) un intervallo nel quale le due soluzioni coesistono.

Se  $g_i(x)$  è un'altra soluzione del sistema  $\{I\}$  uscente da  $(x^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ , poniamo  $d_i(x) = g_i(x) - f_i(x)$  e ragioniamo in un primo tempo per i punti a destra di  $x^0$ .

Si consideri la funzione

$$\Psi(x) = \frac{1}{x - x^0} \text{Max}_{i=1}^n d_i(x)$$

per ogni  $x$  dell'intervallo  $(x^0, x^0 + \delta)$ . Tale funzione risulta definita in tutto  $(x^0, x^0 + \delta)$  tranne che in  $x^0$ , ma ripetendo una osservazione già fatta nel teorema 1 e ponendo  $\Psi(x^0) = 0$ , essa risulta definita in tutto  $(x^0, x^0 + \delta)$  ed ivi continua.

Inoltre la  $\Psi(x)$  risulta derivabile in quasi tutto  $(x^0, x^0 + \delta)$ .

(10) Cfr. nota (5).

(11) Se vale la disuguaglianza  $\frac{1}{x - x^0} \text{Min}_{i=1}^n \{y_i(x) - f_i(x)\} \leq F_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) - F_i(x, f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  allora per ogni sistema di curve integrali  $g_i(x)$  del sistema  $\{I\}$  è  $g_i(x) \geq f_i(x)$ .

Infatti, poichè la funzione  $d_i(x)$  è derivabile in tale intervallo, l'insieme dei punti in cui  $\text{Max}_{i=1}^n d_i(x)$  manca della derivata appartiene all'insieme dei punti  $x$  nei quali è

$$d_i(x) = d_l(x) \quad \text{e} \quad d'_i(x) \neq d'_l(x), \\ (i, l = 1, 2, \dots, n)$$

e tale insieme è isolato e quindi numerabile. Invero nei punti  $x$  di  $(x^0, x^0 + \delta)$  nei quali la massima differenza  $d_s(x)$  è maggiore delle altre  $d_i(x)$  esiste la derivata  $d'_s(x)$  ed è  $d'_s(x) = g'_s(x) - f'_s(x)$ . Lo stesso accade nei punti  $x$  in cui è per qualche valore dell'indice  $i$  ( $j$  ad esempio).

$$d_s(x) = d_j(x) \quad \text{e} \quad d'_s(x) \neq d'_j(x),$$

ed anche in questi punti è  $d'_s(x) = g'_s(x) - f'_s(x)$ . Allora se  $\bar{x} \neq x^0$  è un punto in cui esiste la derivata di  $\text{Max}_{i=1}^n d_i(x)$ , posto al solito  $d_s(\bar{x}) = \text{Max}_{i=1}^n d_i(\bar{x})$ , ivi esiste la derivata di  $\Psi(x)$  e si ha:

$$\Psi'(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x} - x^0} \left\{ - \frac{1}{\bar{x} - x^0} [g'_s(\bar{x}) - f'_s(\bar{x})] + \right. \\ \left. + F_s(\bar{x}, g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x})) - F_s(\bar{x}, f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})) \right\},$$

onde per la  $\{2\}$  è  $\Psi'(\bar{x}) \leq 0$  e perciò scelti due punti  $x^0 \leq x_1 < x_2 \leq x^0 + \delta$  è

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi'(x) dx = \Psi(x_2) - \Psi(x_1) \leq 0.$$

$\Psi(x)$  è dunque non crescente in  $(x^0, x^0 + \delta)$  ed essendo  $\Psi(x^0) = 0$ , è sempre  $\Psi(x) \leq 0$ , cioè  $g_i(x) \leq f_i(x)$ .

Analogo ragionamento si fa per i punti a sinistra di  $x^0$ . Segue subito il criterio d'unicità.

**TEOREMA 4.** — *Se, sempre nelle ipotesi del teorema 3 valgono le disuguaglianze*

$$\{3\} \quad \frac{1}{x - x^0} \text{Min}_{i=1}^n \{v_i(x) - f_i(x)\} \leq F_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) - \\ - F_i(x, f_1(x), \dots, f_n(x)) \leq \frac{1}{x - x^0} \text{Max}_{i=1}^n \{v_i(x) - f_i(x)\}$$

*il sistema di curve integrali  $y = f_i(x)$  è l'unico sistema uscente da  $(x^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ .*

4. — Chiudiamo osservando che le disuguaglianze  $\{3\}$  possono migliorarsi in modo analogo a quello con cui le (2) possono sostituirsi con le (2').

**Analisi.** — *Sui fondamenti geometrici del teorema del cambiamento di variabili negli integrali a più dimensioni.* Nota<sup>(\*)</sup> di T. VIOLA, presentata dal Socio M. PICONE.

1. In tutti i trattati di calcolo vien data la formola

$$(I) \quad \int_{T(H)} f(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \dots dx_r = \\ = \int_H f[x_1(u_1, u_2, \dots, u_r), x_2(u_1, u_2, \dots, u_r), \dots, x_r(u_1, u_2, \dots, u_r)] \cdot \\ \cdot |J(u_1, u_2, \dots, u_r)| du_1 du_2, \dots, du_r,$$

che realizza, in un integrale  $r$ -plo, il cambiamento dalle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_r$  alle variabili  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , legate alle precedenti da una generica trasformazione:

$$(2) \quad x_k = x_k(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Si dà solitamente, di questa formola, la dimostrazione per  $r = 2$  e per  $r = 3$ , limitandosi a dichiarare che, per  $r$  generico  $> 3$ , la dimostrazione si conduce in modo del tutto analogo. Ma è da osservare che la dichiarata analogia è bensì evidente, qualora s'introduca qualche opportuna condizione restrittiva per le funzioni (2) o per il dominio d'integrazione  $H^{(1)}$ , mentre non lo è affatto in condizioni del tutto generali, cioè nelle condizioni che sembrano doversi enunciare nei termini seguenti:

- a) Le funzioni (2) sono finite e continue, insieme con le loro derivate parziali prime, in tutto un certo dominio limitato  $B$  dello spazio  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ .
- b) Il determinante jacobiano

$$J(u_1, u_2, \dots, u_r) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_r)}$$

si conserva  $\neq 0$  in tutto  $B$ .

c) Detto  $A$  il dominio dello spazio  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  descritto dal punto di coordinate (2), al variare del punto  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$  in  $B$ , le equazioni (2) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti di  $A$  e quelli di  $B$ .

d)  $H$  è un qualunque dominio misurabile (nel senso di Peano-Jordan) interno a  $B$ ,  $T(H)$  è il dominio corrispondente ad  $H$ , in  $A$ , a mezzo delle (2).

Infatti, in tutte le dimostrazioni che del teorema ho avuto occasione d'esaminare, relativamente ai casi  $r = 2, r = 3$  e sotto le sole condizioni

(\*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1947.

(1) Cfr. ad esempio É. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique* (Parigi 1927) vol. I, pp. 357, 368; B. LEVI, *Analisi Matematica* (Bologna 1937), p. 469.

del tutto generali qui enunciate, sopraggiungono inattese e singolari complicazioni, non soltanto formali o di dettaglio, proprio quando si passa dal valore  $r = 2$  al valore  $r = 3$ .

Di tali dimostrazioni quella data dal prof. M. Picone, nel suo corso litografato *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, ediz. 1945 (pp. 513-522, 568-576), m'è sembrata offrire maggiore semplicità e soprattutto maggiore analogia nel passaggio da  $r = 2$  ad  $r = 3$ . Questi pregi sono dovuti, a mio parere, da un lato ad una felice applicazione della *teoria delle funzioni di dominio* ai fondamenti dell'analisi, d'altro lato alla conservazione del concetto ispiratore di qualche antica e classica dimostrazione, la cui prima parte consiste nel provare che il rapporto fra le estensioni di due elementi corrispondenti nei due spazi  $(x_1, x_2, \dots, x_r), (u_1, u_2, \dots, u_r)$ , ha per limite il valore assoluto dello jacobiano  $J$  (al tendere a zero di tali estensioni). Talchè nella prima parte vengono a concentrarsi le difficoltà di carattere, diciamo così, puramente geometrico, mentre la seconda parte, almeno quando si supponga (com'è lecito, non intendendo uscire dai limiti degli ordinari corsi d'analisi) la funzione integranda  $f$ , definita in tutto  $A$ , *continua in  $A$* , acquista snellezza e semplicità <sup>(2)</sup>.

Per tali ragioni mi sembra non inutile dare, in questa Nota, la generalizzazione al caso  $r$  qualunque, della prima parte della dimostrazione del prof. M. Picone o, più propriamente, di quel complesso di premesse geometriche su cui vengono a fondarsi ulteriori sviluppi quasi esclusivamente analitici, avvertendo fin d'ora che, per tali sviluppi, mi limito a rinviare il lettore al testo delle citate *Lezioni*, pp. 574-576, 512-513, 521-522. Tali sviluppi dovranno intendersi riprodotti letteralmente, pur con qualche evidente generalizzazione di dettaglio. Mi permetto, a questo proposito, d'aggiungere che credo d'aver già portato alla questione un primo contributo, di carattere preliminare, con una Nota attualmente in corso di stampa nel « Periodico di Matematiche », dal titolo: *Sui fondamenti della teoria della misura, in uno spazio cartesiano a tre o più dimensioni*. Nella quale Nota ho dimostrato l'invarianza dell'estensione d'un dominio misurabile dello spazio cartesiano, al variare del sistema di assi cui è fatto riferimento. Il prof. Picone, che gentilmente ha voluto segnalarmi l'intera questione, mi ha personalmente dichiarato che qualche dubbio era rimasto in lui, sulla possibilità di generalizzare la dimostrazione del teorema fondamentale di cui sopra, proprio perchè non si conosceva una dimostrazione della suddetta invarianza. Il lettore potrà infatti rendersi conto che tale invarianza è implicitamente ammessa nelle pagine che seguono.

Per la terminologia fondamentale e più semplice da me seguita, cioè per il significato dei termini: *dominio, dominio rettangolare, frontiera, estensione, misura*, rimando alle citate *Lezioni*.

(2) La stessa via fu battuta da R. BAIRE nelle sue *Leçons sur les théories générales de l'Analyse* (Parigi 1907), vol. I, pp. 168, 195, relativamente ai casi  $r = 2, r = 3$ , ma, a nostro parere, con esito meno felice.



2. DOMINI ELEMENTARI. COORDINATE CURVILINEE. — Chiamiamo *dominio elementare dello spazio*  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  (spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni) *nelle coordinate*  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , ogni dominio  $T$  che le (2) fanno corrispondere in  $A$  a un dominio rettangolare  $R$  contenuto in  $B$ .

Siano  $(a_1, a_2, \dots, a_r), (b_1, b_2, \dots, b_r)$  gli estremi di  $R$ . Per un qualunque valore dell'indice  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), l'equazione  $u_i = \bar{u}_i$ , ove  $\bar{u}_i$  è una qualunque costante compresa fra  $a_i$  e  $b_i$ , individua, tramite le (2), una certa porzione d'ipersuperficie *biregolare* <sup>(3)</sup> attraversante  $T$ . Il dominio  $T$  risulta così solcato da  $r$  sistemi di porzioni d'ipersuperficie biregolari: per un qualunque punto di  $T$  passa sempre *una* determinata ipersuperficie  $u_i$  (rappresentata parametricamente dalle (2), nelle quali si ponga  $u_i = \text{cost.}$ ), qualunque sia il valore dell'indice  $i$ . Inversamente, scelte a piacere  $r$  ipersuperficie  $u_i = \text{cost.}$  (con la sola condizione che sia, per ogni valore di  $i$ ,  $a_i \leq u_i \leq b_i$ ), queste hanno in comune uno ed un solo punto di  $T$ . Le ipersuperficie  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) possono perciò esser riguardate come *ipersuperficie coordinate* dei punti di  $T$ , e i parametri  $u_i$  come coordinate (*coordinate curvilinee*) di questi punti.

Non ha interesse di richiamare qui gli elementi della teoria d'un generico sistema di coordinate curvilinee, teoria che si potrebbe del resto facilmente svolgere, generalizzando quanto è esposto nelle citate *Lezioni*, pp. 568-572. Ci limitiamo presentemente ad affermare soltanto che ogni porzione d'ipersuperficie regolare in  $S_r$ , ha estensione nulla in  $S_r$ , donde segue che *ogni dominio elementare  $T$  di  $S_r$  è misurabile in  $S_r$ .*

3. DECOMPOSIZIONE CENTRALE D'UN DOMINIO RETTANGOLARE  $R$  IN  $S_r$ . — Chiamiamo così la decomposizione di  $R$  in  $(r+1)$ -edri fra loro equivalenti, in numero di  $r! 2^r$ , che s'ottiene con la legge seguente.

Sia  $Q$  il centro di  $R$ . Se  $r = 1$ ,  $R$  è un segmento che diciamo decomposto in modo centrale, dal punto  $Q$ , in due segmenti uguali. Ragionando per induzione, supponiamo d'aver eseguita la decomposizione centrale di ciascuna delle  $2r$  facce di  $R$ , in  $r$ -edri fra loro equivalenti, in numero di  $(r-1)! 2^{r-1}$ . Assumiamo ciascuno di tali  $r$ -edri, come base d'un  $(r+1)$ -edro, il cui vertice opposto cada in  $Q$ . Gli  $r! 2^r (r+1)$ -edri che così s'ottengono, sono evidentemente equivalenti: essi realizzano, per definizione, la decomposizione centrale di  $R$ .

Occorre convenire un certo ordine, in cui si dovrà sempre pensare di percorrere i successivi vertici d'uno qualunque degli  $r! 2^r (r+1)$ -edri della decomposizione centrale d'un qualunque dominio  $R$  in  $S_r$ , nel caso  $r \geq 2$ .

Se  $r = 2$ , i vertici di ciascuno degli 8 triangoli della decomposizione di  $R$ , dovranno considerarsi nel ben determinato ordine  $QQ^{(1)}Q^{(2)}$  (essendo  $Q^{(1)}$  e  $Q^{(2)}$  sul perimetro di  $R$ ) tale che la rotazione  $QQ^{(1)}Q^{(2)}$  sia positiva (cioè antioraria).

(3) Questa porzione è *regolare* cioè dotata, in ogni suo punto, d'iperpiano tangente variabile con continuità; essa è anzi *biregolare*, perchè la sua *base* (cioè il dominio rettangolare costituito dai punti di  $R$  che soddisfano all'equazione  $u_i = \bar{u}_i$ ) è un dominio regolare internamente connesso (Cfr. M. PICONE, loc. cit., pp. 37, 543).

Se  $r = 3$ , i vertici di ciascuno dei 48 tetraedri della decomposizione di  $R$ , dovranno considerarsi nel ben determinato ordine  $QQ^{(1)}Q^{(2)}Q^{(3)}$ , essendo  $Q^{(1)}$  il centro della competente faccia di  $R$ , e  $Q^{(2)}, Q^{(3)}$  i rimanenti vertici, presi in ordine tale che la rotazione  $Q^{(1)}Q^{(2)}Q^{(3)}$  apparisca positiva rispetto all'asse orientato  $\overrightarrow{QQ^{(1)}}$  (cioè il verso di rotazione tridimensionale dei quattro vertici  $Q, Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}$  risulti positivo).

Se  $r = 4$ , i vertici di ciascuno dei 384 pentaedri della decomposizione di  $R$ , dovranno considerarsi nel ben determinato ordine  $QQ^{(1)}Q^{(2)}Q^{(3)}Q^{(4)}$ , essendo  $Q^{(1)}$  il centro della competente faccia  $R^{(1)}$  di  $R$ ,  $Q^{(2)}$  il centro della competente faccia  $R^{(2)}$  di  $R^{(1)}$ , infine  $Q^{(3)}, Q^{(4)}$  i rimanenti vertici, presi in ordine tale che la rotazione tridimensionale  $Q^{(1)}Q^{(2)}Q^{(3)}Q^{(4)}$  apparisca positiva rispetto all'asse orientato  $\overrightarrow{QQ^{(1)}}$  (cioè il verso di rotazione quadridimensionale dei cinque vertici  $Q, Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}, Q^{(4)}$  risulti positivo) <sup>(4)</sup>.

Se  $r$  è generico, i vertici di ciascuno degli  $r! \cdot 2^r (r+1)$ -edri della decomposizione di  $R$ , dovranno considerarsi nel ben determinato ordine  $QQ^{(1)}Q^{(2)} \dots Q^{(r)}$ , essendo  $Q^{(1)}$  il centro della competente faccia  $R^{(1)}$  di  $R$ ,  $Q^{(2)}$  il centro della competente faccia  $R^{(2)}$  di  $R^{(1)}$ , ecc.,  $Q^{(r-2)}$  il centro della competente faccia  $R^{(r-2)}$  di  $R^{(r-3)}$ , infine  $Q^{(r-1)}$  e  $Q^{(r)}$  i rimanenti vertici, presi in ordine tale che la rotazione  $(r-1)$ -dimensionale  $Q^{(1)}Q^{(2)} \dots Q^{(r)}$  apparisca positiva rispetto all'asse orientato  $\overrightarrow{QQ^{(1)}}$  (cioè il verso di rotazione  $r$ -dimensionale degli  $r+1$  vertici  $Q, Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(r)}$  risulti positivo) <sup>(5)</sup>.

4. NUMERO D'APERTURA COMPETENTE A UN DOMINIO RETTANGOLARE  $R$ . - Diremo che l' $(r+1)$ -edro  $PP^{(1)}P^{(2)} \dots P^{(r)}$  dello spazio  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  è *pseudocorrispondente*, a mezzo delle (2), ad un certo  $(r+1)$ -edro  $QQ^{(1)}Q^{(2)} \dots Q^{(r)}$  dello spazio  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ , quando i vertici  $P, P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(r)}$  del primo sono ordinatamente corrispondenti, a mezzo delle (2), ai vertici  $Q, Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(r)}$  del secondo. Ciò premesso, andiamo a dimostrare il seguente

TEOREMA - Sia  $R$  un qualunque dominio rettangolare dello spazio  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ , interno al dominio  $B$ . Decompostolo, mediante  $r$  fasci di  $n-1$  iperpiani ciascuno, rispettivamente perpendicolari agli assi coordinati  $u_1, u_2, \dots, u_r$  e fra loro equidistanti, in  $n^r$  domini rettangolari uguali, decomponiamo alla loro volta ciascuno di questi, in modo centrale, in  $r! \cdot 2^r (r+1)$ -edri. Il dominio  $R$  risulta così decomposto in  $r! \cdot 2^r n^r (r+1)$ -edri d'eguale estensione. Ebbene, esiste un numero naturale  $n_0(R)$  tale che, per  $n \geq n_0(R)$ , gli  $(r+1)$ -edri a quelli pseudocorrispondenti nello spazio  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , a mezzo delle (2), sono effettivamente  $(r+1)$ -edri non aventi, presi due a due, punti interni comuni.

<sup>(4)</sup> Si può anche dire che  $Q^{(3)}$  e  $Q^{(4)}$  sono presi in tal modo che il pentaedro  $QQ^{(1)}Q^{(2)}Q^{(3)}Q^{(4)}$  possa ridursi per deformazione continua, vertice a vertice e senza che la sua estensione mai s'annulli, al pentaedro fondamentale  $(0,0,0,0)$   $(1,0,0,0)$   $(0,1,0,0)$   $(0,0,1,0)$   $(0,0,0,1)$ .

<sup>(5)</sup> La proprietà enunciata nella nota precedente si generalizza in modo evidente.

**DIMOSTRAZIONE.** — Corrispondentemente alla convenuta orientazione positiva di ciascun  $(r+1)$ -edro  $QQ^{(1)}Q^{(2)}\dots Q^{(r)}$  (n. 3) dell'indicata decomposizione di R, anche l' $(r+1)$ -edro  $PP^{(1)}P^{(2)}\dots P^{(r)}$  a quello pseudo corrispondente, se ha estensione  $\neq 0$ , risulta dotato d'una certa orientazione nello spazio  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ . Si tratta evidentemente di dimostrare l'esistenza d'un numero naturale  $n_0$  tale che, per  $n \geq n_0$ , il detto  $(r+1)$ -edro  $PP^{(1)}P^{(2)}\dots P^{(r)}$  riesca un effettivo  $(r+1)$ -edro, avente un'orientazione che non varia al variare del primo  $(r+1)$ -edro. Tale numero  $n_0$  sarà precisamente quello menzionato nel teorema.

Dette  $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_r$  le dimensioni di R, siano  $u_1, u_2, \dots, u_r$  le coordinate del vertice Q che si considera. Per le coordinate  $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_r^{(i)}$  di  $Q^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) si avrà

$$u_1^{(i)} = u_1 + \varepsilon_{i1} \frac{a_1}{n}, u_2^{(i)} = u_2 + \varepsilon_{i2} \frac{a_2}{n}, \dots, u_r^{(i)} = u_r + \varepsilon_{ir} \frac{a_r}{n},$$

ove  $\varepsilon_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3, \dots, r$ ) designa uno dei numeri  $-1, 0, 1$ . Per l'estensione E dell' $(r+1)$ -edro  $QQ^{(1)}Q^{(2)}\dots Q^{(r)}$  considerato, si trova, in due evidenti modi diversi <sup>(6)</sup>,

$$\begin{aligned} E &= \frac{2^r a_1 a_2 \dots a_r}{r! 2^r n^r} = \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} u_1^{(1)} - u_1 & u_2^{(1)} - u_2 & \dots & u_r^{(1)} - u_r \\ u_1^{(2)} - u_1 & u_2^{(2)} - u_2 & \dots & u_r^{(2)} - u_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(r)} - u_1 & u_2^{(r)} - u_2 & \dots & u_r^{(r)} - u_r \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{r!} \frac{a_1 a_2 \dots a_r}{n^r} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{r1} & \varepsilon_{r2} & \dots & \varepsilon_{rr} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Perciò è

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{r1} & \varepsilon_{r2} & \dots & \varepsilon_{rr} \end{vmatrix} = 1.$$

D'altra parte, per le coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_r$  di P e  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_r^{(i)}$  di  $P^{(i)}$ , risulta

$$x_k^{(i)} - x_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \varepsilon_{i1} \frac{a_1}{n} + \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \varepsilon_{i2} \frac{a_2}{n} + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \varepsilon_{ir} \frac{a_r}{n} + \frac{\alpha_k}{n}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, r)$$

ove le derivate  $\frac{\partial x_k}{\partial u_1}, \frac{\partial x_k}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial x_k}{\partial u_r}$  s'intendono calcolate nel punto Q ed  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  sono tali infinitesimi, per  $n \rightarrow \infty$ , che, comunque si prescriva un numero  $\sigma > 0$ , esiste un numero naturale  $n_\sigma$  per cui, quando è  $n \geq n_\sigma$ , il modulo di ciascuno di essi si mantiene, *in tutto* B,  $< \sigma$ .

(6) Cfr. la mia Nota citata al n. I.

Ne segue, e ciò dimostra quanto si voleva,

$$\begin{aligned}
 n^r \begin{vmatrix} x_1^{(1)} - x_1 & x_2^{(1)} - x_2 & \dots & x_r^{(1)} - x_r \\ x_1^{(2)} - x_1 & x_2^{(2)} - x_2 & \dots & x_r^{(2)} - x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(r)} - x_1 & x_2^{(r)} - x_2 & \dots & x_r^{(r)} - x_r \end{vmatrix} = \\
 = n^r \frac{a_1 a_2 \dots a_r}{n^r} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_r}{\partial u_1} & \frac{\partial x_r}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial u_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{r1} & \varepsilon_{r2} & \dots & \varepsilon_{rr} \end{vmatrix} + \lambda = \\
 = a_1 a_2 \dots a_r J(u_1, u_2, \dots, u_r) + \lambda,
 \end{aligned}$$

ove  $\lambda$ , per  $n > d$  d'un certo numero naturale, può rendersi, in tutto B, minore in modulo d'una quantità positiva comunque prefissata.

Il numero  $n_0(R)$ , di cui s'è dimostrata l'esistenza, è detto un *numero d'apertura* competente al dominio rettangolare R.

**Geometria.** — *Sui sistemi di ipersuperficie di  $S_r$  aventi lo stesso sistema primo polare.* Nota di C. LONGO, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Dei sistemi di ipersuperficie di  $S_r$  aventi lo stesso sistema primo polare si è già occupato il Bertini<sup>(1)</sup> e spettano a lui le seguenti proprietà:

a) Se due ipersuperficie d'ordine  $n$ ,  $V_{r-1}^n$  (non con) hanno lo stesso primo sistema polare, tra i loro poli sussiste un'omografia  $\Omega$  non degenerare.

b) Le  $V_{r-1}^n$  costituiscono un sistema lineare  $\Lambda$ .

c) Considerato in  $\Lambda$  un fascio generico supponiamo che l'omografia  $\Omega$ , da esso determinata, sia generale e siano  $S_{h'-1}, \dots, S_{h(g)-1}$  i suoi spazi fondamentali<sup>(2)</sup>  $[\Sigma h^{(i)} = r + 1]$ . Sia allora  $\Lambda'$  il sistema più ampio, situato in  $\Lambda$ , tale che gli spazi fondamentali relativi all'omografia determinata da due generiche  $V_{r-1}^n$  di  $\Lambda'$  siano quelli di  $\Omega$ .

(\*) Nella seduta del 11 giugno 1947.

(1) E. BERTINI, *Quand'è che due curve piane dello stesso ordine hanno le stesse prime polari?* « Acc. delle Scienze di Torino », 1897; E. BERTINI, *Sui sistemi di ipersuperficie di  $S_r$  aventi le stesse prime polari.* Nota 1<sup>a</sup> « Rend. Acc. Lincei », 7, 217, 1898, Nota 2<sup>a</sup> idem, 7, 275, 1898.

(2) P. PREDELLA, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.* « Annali di Mat. », 113, 1899; E. BERTINI, *Introduzioni alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, p. 75, Casa Ed. Principato.



Indicata con  $W_i$  una ipersuperficie avente come spazio  $n$ -plo lo spazio  $S_{r-k(i)}$  coniugato in  $S_r$  ad  $S_{h(i)-1}$ , le  $\sigma$  ipersuperficie  $W_i$  sono linearmente indipendenti ed individuano il sistema  $\Lambda$ .

d) Ogni altra  $V_{r-1}^n$  avente lo stesso sistema primo polare delle ipersuperficie del sistema  $\Lambda'$  appartiene a  $\Lambda'$ ; ossia  $\Lambda \equiv \Lambda'$ .

Inoltre il Bertini determina i sistemi  $\Lambda$  per  $r = 1, 2, 3$  anche nel caso di omografie particolari, caratterizzando geometricamente quelli per  $r = 1$ , ed  $r = 2$ .

Per  $r = 3$  traslascia le singole interpretazioni geometriche « di cui, talune sono ovvie, mentre altre si presentano in forma molto complessa ».

Dalla ricerca del Bertini rimangono quindi aperte le due questioni di caratterizzare geometricamente, già in  $S_3$ , i casi meno ovvii dei sistemi cercati di superficie, e di completare la ricerca di questi sistemi, in  $S_r$  qualunque, quando l'omografia presenti punti uniti infinitamente vicini.

Nella presente Nota dopo aver richiamato alcune delle proprietà generali si dimostra in modo rapido la proprietà d) anche nel caso che l'omografia  $\Omega$  sia particolare, ed inoltre per  $r = 3$  si dà la caratterizzazione geometrica dei casi meno semplici (quelli in cui la  $\Omega$  abbia una sola radice caratteristica).

In una seconda Nota saranno determinati i sistemi  $\Lambda$  per  $r$  qualunque nel caso di omografie particolari, per i quali, come già ha osservato il Bertini, non vale la caratterizzazione mediante le  $W_i$  (cfr. c).

SU ALCUNE PROPRIETÀ GENERALI DELLE  $V_{r-1}^n$ . — Per completezza, e per la dimostrazione del teorema del n. 7, che è essenziale per la determinazione dei nostri sistemi (e che nel Bertini è raggiunto faticosamente solo per omografie generali) richiamo alcuni teoremi stabiliti dal Bertini [2-6], dando di alcuni una più diretta dimostrazione analitica.

2. La polare di un punto rispetto ad una  $V_{r-1}^n$  di  $S_r$  è sempre determinata in modo unico escluso soltanto il caso che la  $V_{r-1}^n$  sia un cono il cui vertice contenga il punto (o coincida con esso).

Se infatti  $f(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$  è l'equazione di  $V_{r-1}^n$ , e si sceglie il punto come  $A_{r+1}(0, \dots, 0, 1)$  l'equazione della polare

$$\partial_{r+1} f = 0 \quad (3).$$

diviene indeterminata se e solo se  $f = 0$  non contiene  $x_{r+1}$ : cioè  $V_{r-1}^n$  è un cono di vertice  $A_{r+1}$  (o che ha per vertice uno spazio per  $A_{r+1}$ ).

3. La corrispondenza fra i punti di  $S_r$  e le loro polari rispetto ad una  $V_{r-1}^n$  è biunivoca sempre quando  $V_{r-1}^n$  non sia un cono.

Se infatti i punti  $A_r$  ed  $A_{r+1}$  hanno la stessa polare deve essere

$$\lambda \partial_r f \equiv \mu \partial_{r+1} f.$$

$$(3) \text{ Si è posto: } \partial_{r+1} f = \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}.$$

Il punto  $(0, \dots, 0, \lambda - \mu)$  ha quindi polare indeterminata e la  $V_{r-1}^n$  è perciò un cono.

4. Dalla proprietà precedente segue:

*Due  $V_{r-1}^n$ , non conì, che abbiano lo stesso sistema primo polare, determinano un'omografia  $\Omega$  non degenera, nella quale si corrispondono i punti che, rispetto alle due  $V_{r-1}^n$  hanno una stessa polare.*

5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto sia unito nella omografia determinata da due  $V_{r-1}^n$  aventi lo stesso sistema primo polare è che nel loro fascio esista un cono con vertice in quel punto.*

Se il punto è  $A_{r+1}$  ed  $f=0$ ,  $\varphi=0$  sono le equazioni delle due  $V_{r-1}^n$ , ridotti uguali i coefficienti di  $x_{r+1}^n$ , dovrà averci identicamente

$$\partial_{r+1} f = \partial_{r+1} \varphi$$

e perciò  $f \equiv \varphi + \Theta(x_1, \dots, x_r)$  essendo  $\Theta$  omogenea d'ordine  $n$ . Al fascio appartiene quindi il cono  $\Theta = 0$  con vertice in  $A_{r+1}$ ; e viceversa.

6. *Le  $V_{r-1}^n$  che hanno lo stesso sistema polare formano un sistema lineare  $\Lambda$ .*

Basta far vedere che se due  $V_{r-1}^n$  hanno lo stesso sistema polare  $\infty^r$  altrettanto accade per ogni  $V_{r-1}^n$  del loro fascio. Se l'equazione di quest'ultimo è  $\lambda f + \mu \varphi = 0$ , per la polare del punto  $y_i$  si ha

$$\sum y_i \partial_i (\lambda f + \mu \varphi) \equiv \sum (\lambda \partial_i f + \mu \partial_i \varphi) y_i = 0$$

il che prova il teorema poichè per ipotesi  $\sum y_i \partial_i f = 0$  e  $\sum y_i \partial_i \varphi = 0$  appartengono al medesimo sistema  $\infty^r$ .

7. *I punti uniti nell'omografia individuata da due  $V_{r-1}^n$  sono uniti per tutte le omografie che si ottengono variando comunque le due  $V_{r-1}^n$  nel sistema  $\Lambda$ .*

Possiamo individuare il sistema  $\Lambda$  lineare con i fasci contenenti un suo elemento fisso. Sia  $A_{r+1}$  un punto unito relativo al fascio  $\{f, \varphi\}$  cui appartiene il cono  $\Theta = 0$  (n. 5). Individuiamo il fascio con  $\Theta = 0$  ed  $f = 0$ . Data un'altra qualsiasi  $\bar{f} = 0$  di  $\Lambda$  (ma non del fascio precedente) consideriamo il fascio individuato da  $\Theta = 0$  e da  $\bar{f} = 0$ . Per ogni  $\bar{\varphi}$  di questo fascio (e quindi del tipo  $\bar{\varphi} \equiv \bar{f} + \lambda \Theta$ ) la polare di  $A_{r+1}$  è

$$\partial_{r+1} \bar{\varphi} \equiv \partial_{r+1} \bar{f} = 0$$

cioè  $A_{r+1}$  è unito nelle omografie individuate da due qualsiasi  $V_{r-1}^n$  del fascio  $\{\bar{f}, \bar{\varphi}\}$ .

Facendo il prodotto di due omografie relative a  $\Theta = 0$  ed ad una  $V_{r-1}^n$  del primo o del secondo fascio, si ha che  $A_{r+1}$  è punto unito nell'omografia fra due  $V_{r-1}^n$ , qualsiasi della rete  $\{f, \varphi, \bar{f}\}$ . Variando  $\bar{f}$  si vede che  $A_{r+1}$  è punto unito per qualsiasi coppia di  $V_{r-1}^n$  di  $\Lambda$ .

Se ne conclude: *la configurazione degli spazî uniti dipende dal sistema  $\Lambda$  (e non dalla particolare coppia di  $V_{r-1}^n$  in esso considerata).*

CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DEI SISTEMI  $\Lambda$  PER  $r=3$  NEL CASO CHE L'OMOGRAFIA  $\Omega$  ABBIA UNA SOLA RADICE CARATTERISTICA. — 8. *I Casi  $r=1$  ed  $r=2$  quando le equazioni di  $\Omega$  formino una sola catena* <sup>(4)</sup>. Riprendiamo dal Bertini, per servircene in seguito, i seguenti risultati.

Per  $r=1$ , se le equazioni di  $\Omega$  sono:  $y_1 = ax_1$ ,  $y_2 = a_2 x_1 + ax_2$ , per il sistema  $\Lambda$  si ha

$$\Lambda(x_1, x_2) = x_1^{n-1} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \quad (\lambda_i \text{ cost})$$

ossia i gruppi fondamentali sono costituiti da un dato elemento  $(n-1)$ -plo e da un altro qualunque.

Per  $r=2$ , se le equazioni di  $\Omega$  sono:  $y_1 = ax_1$ ,  $y_2 = a_2 x_1$ ,  $y_3 = a_3 x_2 + ax_3$ , posto

$$(8.1) \quad \Gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^{n-2} (2 a_2 x_1 x_3 + (n-1) a_3 x_2^2)$$

per il sistema  $\Lambda$  si ha:

$$(8.2) \quad \Lambda(x_1, x_2, x_3) = \Gamma(x_1, x_2, x_3) + \Lambda(x_1, x_2).$$

La curva  $\Gamma=0$  si spezza nella retta unita dell'omografia ( $x_1=0$ ) contata  $(n-2)$ -volte ed in una conica passante per l'elemento curvilineo del 2° ordine  $E_2$  <sup>(5)</sup>.

$$(8.3) \quad x_1 = -\frac{n-1}{2} \frac{a_3}{a_2} x_2^2 + [3]$$

avente centro nel punto unito  $A_3$  e tangente la retta  $x_1=0$ . Per il sistema  $\Lambda$  si ha che: hanno le stesse prime polari le  $\infty^2$  curve d'ordine  $n$  costituite da una data retta  $(n-2)$ -pla e dalle coniche che la toccano in un dato punto ed ivi ne osculano tutta una fissata.

9. *Caso  $r=3$  ed  $\Omega$  con una sola catena.* Siano

$$y_1 = ax_1, \quad y_2 = a_2 x_1 + ax_2, \quad y_3 = a_3 x_2 + ax_3, \quad y_4 = a_4 x_3 + ax_4$$

le equazioni di  $\Omega$ . Per essa sono uniti: il punto  $A_4$  (0, 0, 0, 1), la retta  $S_1^*$  ( $x_1 = x_2 = 0$ ) ed il piano  $S_2^*$  ( $x_1 = 0$ ).

Posto

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_1^{n-3} \left[ a_2^2 x_1^2 x_4 + (n-1) a_2 a_4 x_1 x_2 x_3 + \frac{1}{3!} (n-1)(n-2) a_3 a_4 x_2^3 \right]$$

(4) Ricordiamo che se un'omografia  $\Omega$  ha una radice caratteristica multipla d'ordine  $\mu$ , le sue equazioni relative alla detta radice si possono ridurre al tipo:

$$y_1 = ax_1, y_2 = a_2 x_1 + ax_2, \dots, y_{h_1} = a_{h_1} x_{h_1-1} + ax_{h_1}, y_{h_1+1} = a_{h_1+1} x_{h_1+1} + ax_{h_1+2}, \dots, \\ y_{h_2} = a_{h_2} x_{h_2-1} + ax_{h_2}, \dots, y_{h_{p-1}+1} = a_{h_{p-1}+1} x_{h_{p-1}+1} + ax_{h_{p-1}+2}, \dots, \\ y_{h_p} = a_{h_p} x_{h_p-1} + ax_{h_p} \quad (h_p = \mu).$$

Diremo allora (BOMPIANI) che l'omografia presenta in corrispondenza alla detta radice  $p$  catene, ciascuna composta di  $h'_1 = h_1$ ,  $h'_2 = h_2 - h_1$ ,  $\dots$ ,  $h'_p = h_p - h_{p-1}$  coordinate. Se è  $h'_1 = 1$ , la catena si dirà semplice, altrimenti composta.

(5) E. BOMPIANI, *Alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale*, « Rend. del Semin. Mat. e Fis. di Milano », 1936.

per il sistema  $\Lambda$  si ha

$$(9.1) \quad \Lambda(x_1, \dots, x_4) = \Gamma(x_1, \dots, x_4) + \lambda_3 \Lambda(x_1, x_2, x_3) \quad (\lambda_3 \text{ cost}).$$

Poichè è già caratterizzato il sistema (8.2) per caratterizzare il sistema  $\Lambda(x_1, \dots, x_4)$  basta caratterizzare la superficie  $\Gamma = 0$ . Questa si spezza nel piano unito  $S_2^*$  contato  $(n-3)$ -volte ed in una superficie cubica  $\Gamma^* = 0$ , che appartiene al sistema lineare delle superficie cubiche  $F^3$  aventi la retta  $S_1^*$  doppia; il punto  $A_4$  unipolare con piano tangente  $l'S_2^*$  e per sezione con questo piano  $l'S_1^*$  contato tre volte.

L'equazione di una qualsiasi  $F^3$  soddisfacente alle condizioni ora enunciate è del tipo:

$$\alpha x_1^2 x_4 + \beta x_1 x_2 x_3 + \gamma x_2^3 + p x_1 x_2^2 + x_1^2 (q x_2 + r x_3) + t x_1^3 = 0.$$

Per caratterizzare fra queste la  $l'V$  determiniamo la polare di un punto  $P(0, h, k, l)$  rispetto ad una  $F^3$ . Essa ha l'equazione

$$(\beta x_1 x_3 + 3\gamma x_2^2 + 2p x_1 x_2 + q x_1^2)h + (\beta x_1 x_2 + r x_1^2)k + \alpha l x_1^2 = 0,$$

ossia è un cono di vertice  $A_4$ : l'equazione precedente rappresenta anche la conica  $C^2$  sezione del cono con un  $S_2$  generico, sulla quale possiamo ragionare per semplicità di discorso.

Le coniche  $C^2$  passano per  $l'E_3$ ,

$$(9.2) \quad x_1 = -\frac{3\gamma}{\beta} x_2^2 + \frac{3\gamma}{\beta^2} \left(2p + \beta \frac{k}{h}\right) x_2^3 + [4]$$

questo ha per centro il punto  $A_3$  intersezione dell' $S_1^*$  con lo  $S_2$ , per tangente la retta intersezione dell' $S_2^*$  con  $l'S_2$  ed un  $E_2$  indipendente dal punto  $P$  e da  $p, q, r, t$ .

$l'E_3$  dipende solamente dalle rette per  $A_4$  (cioè da  $\frac{k}{h}$ ): se si vuole che per un dato  $E_2$  e per una data retta per  $A_4$   $l'E_3$  non vari al variare della  $C^2$ , deve essere  $p = 0$ . Fissato allora un  $E_3$ , ossia un punto  $A_2$  sulla tangente all' $E_2$  è individuata in  $S_2$  una retta per  $A_3$ : la polare  $S_1$  di  $A_2$  rispetto al fascio di coniche per  $l'E_3$ . Sia  $A_1$  un punto arbitrario su  $S_1$ .

Se si vuole che: 1° la  $C^2$  polare rispetto ad  $A_2$  passi per  $A_1$  deve essere  $q = 0$ ; 2° che le  $F^3$  passino per la retta  $A_1 A_3$ , dev'essere  $r = t = 0$ .

L'equazione di una  $F^3$  soddisfacente alle precedenti condizioni è del tipo:

$$\alpha x_1^2 x_4 + \beta x_1 x_2 x_3 + \gamma x_2^3 = 0.$$

Per caratterizzare infine la  $l'V$  tra le  $F^3$  precedenti, basta imporre che l'invariante di contatto tra  $l'E_2$  (8.3) e  $l'E_2$  dell' $E_3$  (9.2) sia  $\frac{n-I}{n-2}$ , e dare il rapporto  $I = \frac{\gamma}{\alpha}$ , ossia imporre che  $\Gamma'$  passi per la calotta

$$x_1^2 = -I x_2^3 + \dots$$



definita dalle superficie del tipo

$$x_1^2 x_3 + I x_2^3 + x_1 \varphi_2(x_1 x_2) = 0$$

essendo  $\varphi_2$  una qualsiasi forma di 2° grado.

10. *Caso  $r = 3$  ed  $\Omega$  con due catene composte*<sup>(6)</sup>. Supponiamo ora che le equazioni di  $\Omega$  siano:

$$y_1 = a x_1, \quad y_2 = a_2 x_1 + a x_2, \quad y_3 = a x_3, \quad y_4 = a_4 x_3 + a x_4$$

ossia vi siano due catene composte.

Posto

$$Q_b = a_2 b x_1 x_4 + a_4 (n - b) x_2 x_3$$

per una superficie  $F$  del sistema  $\Lambda$  si ha:

$$(10.1) \quad F = \bar{\Lambda}(x_1 x_2) + \bar{\Lambda}(x_3 x_4) + W_n(x_1 x_3) + \theta_b x_1^{n-b-1} x_3^{b-1} \sum_{b=1}^{n-1} Q_b$$

ove  $W_n$  è una forma d'ordine  $n$  nelle variabili  $x_1$  ed  $x_3$  (cfr. I, c). Per caratterizzare ora il sistema (10.1), basta caratterizzare le quadriche  $Q_b$ . Per questo basta osservare che: 1° le quadriche  $Q_b$  appartengono al fascio che ha per base il quadrilatero avente per lati la retta  $A_2 A_4$  (luogo punti uniti), le rette unite  $A_1 A_2$  ed  $A_3 A_4$ , e la retta  $A_1 A_3$  che è la congiungente due punti scelti arbitrariamente ciascuno su una delle due precedenti rette unite; 2° due quadriche  $Q_i$  e  $Q_k$  hanno in  $A_4$  l'invariante di contatto

$$(10.2) \quad (Q_i Q_k) = \frac{n-k}{n-i} \cdot \frac{k}{i}$$

Scelta quindi ad arbitrio nel fascio una delle quadriche, per esempio  $Q_1$ , le altre  $Q_i$  sono caratterizzate dagli invarianti di contatto (10.2). Con ciò è caratterizzata la superficie (10.1). Applicando ad una di queste un'omografia dello stesso tipo si ha un sistema  $\Lambda(x_1 x_2; x_3 x_4)$ .

11. *Casi  $r = 3$  ed  $\Omega$  con una catena composta ed una o due catene semplici*. - Per completezza esaminiamo i casi in cui l'omografia  $\Omega$  è del tipo

$$y_1 = a x_1, \quad y_2 = a_2 x_1 + a x_2, \quad y_3 = a_3 x_2 + a x_3, \quad y_4 = a x_4$$

(una catena composta ed una semplice)

ovvero

$$y_1 = a x_1, \quad y_2 = a_2 x_1 + a x_2, \quad y_3 = a x_3, \quad y_4 = a x_4$$

(una catena composta e due semplici)

Si ha rispettivamente.

$$\Lambda(x_1 x_2 x_3; x_4) = \Lambda(x_1 x_2 x_3) + W_n(x_1 x_4).$$

$$\Lambda(x_1 x_2 x_3; x_4) = \Lambda(x_1 x_2) + W_n(x_1 x_2 x_3).$$

La caratterizzazione di questi sistemi è ovvia.

(6) È questo il caso segnalato dal BERTINI.

**Geometria.** — *Le ipersuperficie d'ordine  $n$  con un punto  $(n-2)$ -plo.* — I. *Genesi delle singolarità della varietà di diramazione.* Nota di G. VACCARO, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

I. OGGETTO DELLA RICERCA. — La determinazione delle  $V_3^4$  di  $S_4$  con un numero finito o infinito di punti doppi mi ha condotto ad approfondire le relazioni fra una  $V_{r-1}^n$  di  $S_r$  con un punto  $(n-2)$ -plo e la  $V_{r-2}$  di diramazione che si ottiene relativamente ad esso in un  $S_{r-1}$  ( $r \geq 4$ ).

In questa prima Nota esamino come si producano singolarità della diramazione in relazione a singolarità della ipersuperficie data: nella seconda invertirò il procedimento.

Indichiamo le coordinate proiettive omogenee di un punto di  $S_r$  con  $x_1, \dots, x_r, t$ . Posto il punto  $O$   $(n-2)$ -plo per  $V_{r-1}^n$  in  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  l'equazione di questa sia:

$$(1.1) \quad t^2 \varphi_{n-2}(x_1 \dots x_r) + 2t \varphi_{n-1}(x_1 \dots x_r) + \varphi_n(x_1 \dots x_r) = 0$$

con le  $\varphi_i$  forme di grado  $i$  in  $x_1, \dots, x_r$ .

La  $V_{r-2} \equiv F$  di diramazione, su  $t=0$  da  $O$ , ha l'equazione

$$(1.2) \quad \varphi_{n-1}^2 - \varphi_{n-2} \varphi_n = 0;$$

$\varphi_{n-2} = 0, \varphi_{n-1} = 0, \varphi_n = 0$  sono le sezioni con lo  $S_{r-1}, t=0$  del cono delle tangenti  $(n-1)$ -punte in  $O$  a  $V_{r-1}^n$ , cono che indicherò con  $\Gamma_0$ , della varietà polare di  $O$  rispetto a  $V_{r-1}^n$ , e della  $V_{r-1}^n$ , stessa: indichiamo queste  $V_{r-2}$  ordinatamente con  $F', F'', F'''$ .

La  $F$ , per la (1.2), è tangente alla  $F'$  lungo l'intersezione completa  $C^{(n-1)(n-2)}$  di  $F'$  con  $F''$ .

Viceversa sia in  $S_{r-1}, t=0, \varphi_{2n-2}=0$  l'equazione di una  $F^{2n-2}$  tangente ad una  $F^{n-2}$ , di equazione  $\varphi_{n-2}=0$ , lungo la  $C^{(n-1)(n-2)} \equiv V_{r-3}$  intersezione completa di  $F^{n-2}$  con una  $F^{n-1}$  di equazione  $\varphi_{n-1}=0$ . Nel fascio

$$\varphi_{2n-2} + \lambda \varphi_{n-1}^2 = 0$$

una  $V_{r-2}$  che contenga un punto di  $F^{n-2}$ , fuori della  $C$ , contiene  $F^{n-2}$  e una residua  $F^n$ , per cui si può porre con  $\bar{\lambda}$  conveniente

$$\varphi_{2n-2} + \bar{\lambda} \varphi_{n-1}^2 = \varphi_{n-2} \varphi_n \quad \text{ossia} \quad \varphi_{2n-2} \equiv -\bar{\lambda} \varphi_{n-1}^2 + \varphi_{n-1} \varphi_n,$$

cioè  $F^{2n-2}$  ha un'equazione del tipo (1.2). Quindi:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché un  $V_{r-2} \equiv F^{2n-2}$  di  $S_{r-1}$  sia di diramazione relativamente alla proiezione di una  $V_{r-1}^n$  di un  $S_r$  da un suo punto  $(n-2)$ -plo è che esista una  $V_{r-2}^{n-2}$  tangente alla  $F^{2n-2}$  lungo l'intersezione completa della  $V_{r-2}^{n-2}$  con una  $V_{r-2}^{n-1}$ .*

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

Aggiungiamo l'osservazione che le rette di  $V_{r-1}^n$  per  $O$  riempiono in generale un cono  $V_{r-3}^1$  di ordine  $n(n-1)(n-2)$ .

2. LE  $V_{r-1}^n$  CON UN PUNTO  $O$   $(n-2)$ -plo E UN PUNTO  $P$  DOPPIO. — Esaminiamo ora il caso in cui la  $V_{r-1}^n$  di  $S_r$  abbia oltre ad  $O$  un punto doppio  $P \neq O$ . Poniamo questo nel punto  $(0, \dots, 0, 1, 0)$  e per comodità di scrittura poniamo  $x_r = \zeta$ ; sicchè d'ora in avanti indicheremo le coordinate proiettive omogenee di un punto di  $S_r$  con  $x_1, \dots, x_{r-1}, \zeta, t$ .

L'ipotesi che  $P$  sia doppio porta che l'equazione di  $V_{r-1}^n$  si scrive

$$(2.1) \quad t^2 \{ \zeta^{n-2} \theta_0 + \zeta^{n-3} \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \} + 2t \{ \zeta^{n-2} \psi_1 + \zeta^{n-3} \psi_2 + \dots + \psi_{n-1} \} + \zeta^{n-2} \chi_2 + \zeta^{n-3} \chi_3 + \dots + \chi_n = 0$$

ove  $\theta_i, \psi_i, \chi_i$  sono forme di grado  $i$  nelle sole  $x_1, \dots, x_{r-1}$ .

Notiamo che se e solo se  $\theta_0 = 0$  la retta  $OP$  sta su  $V_{r-1}^n$ .

Se ciò non avviene può farsi sempre  $\theta_0 = 1$ .

Esaminiamo separatamente i due casi.

3. LA RETTA  $OP$  NON APPARTIENE A  $V_{r-1}^n$ . — Fatto  $\theta_0 = 1$ , il cono delle tangenti tripunte in  $P, \Gamma_P$ , alla  $V_{r-1}^n$  ha l'equazione

$$(3.1) \quad t^2 + 2t\psi_1 + \chi_2 = 0.$$

L'equazione della  $V_{r-2} \equiv F$  di diramazione (da  $O$  sopra un  $S_{r-1}$  non per  $O$ , che possiamo prendere come  $t=0$  e che indicheremo d'ora in poi con  $S_{r-1}^*$ ) nell'intorno del punto  $P_1$  proiezione di  $P$  da  $O$  (che, con la scelta dello  $S_{r-1}$  secante coincide con  $P$ ; ma questa coincidenza è inessenziale) è, fattovi  $\zeta = 1$ :

$$(3.2) \quad \psi_1^2 - \chi_2 + 2\psi_1\psi_2 - \theta_1\chi_2 - \chi_3 + \dots = 0$$

e quindi  $F$  ha per cono tangente (a tangenti tripunte) in  $P_1$

$$(3.3) \quad \psi_1^2 - \chi_2 = 0;$$

lo indicheremo con  $\Gamma_{P_1}$ .

Convieni ora distinguere diversi sottocasi.

I a). Il cono  $\Gamma_P$  è di prima specie: il punto  $P_1$  è doppio conico per  $F$  (se come si può prendere come  $t=0$  la  $S_{r-1}$  polare di  $O$  rispetto a  $\Gamma_P$  si ha  $\psi_1 \equiv 0$ ).

I b). Il cono  $\Gamma_P$  è di seconda specie: la sua retta vertice *non* può passare per  $O$  (che non appartiene al cono). Si può per esempio assumere questa retta come  $t = x_1 = \dots = x_{r-2} = 0$  nel qual caso in  $\psi_1$  e in  $\chi_2$  deve mancare la variabile  $x_{r-1}$ . Ma questo porta che anche  $\Gamma_{P_1}$  è un cono di seconda specie.

Lo stesso ragionamento prova che se il cono  $\Gamma_P$  è di specie  $s+1$  anche  $\Gamma_{P_1}$  è di specie  $s+1$  (almeno), cioè anche  $\Gamma_{P_1}$  ha un  $S_s$  vertice (o uno spazio più ampio). Vediamo gli ultimi casi possibili.

I c). Il cono  $\Gamma_P$  è di specie  $r-1$ , cioè ha un  $S_{r-2}$  vertice ed è quindi spezzato in due  $S_{r-1}$  (distinti). Il cono  $\Gamma_{P_1}$  (di  $S_{r-1}^*$ ) essendo pure di specie

$r-1$  (almeno) si compone di due  $S_{r-2}$  coincidenti cioè il punto  $P_1$  è per  $F$  punto doppio *uniplanare*.

Ai due  $S_{r-1}$  distinti in cui si spezza  $\Gamma_P$  si possono sempre dare le equazioni  $x_1 + t = 0, x_2 + t = 0$ . In tal caso è  $\psi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \chi_2 = x_1 x_2$  e quindi lo  $S_{r-2}$  tangente (doppio) in  $P_1$  è  $x_1 - x_2 = 0$ , cioè la proiezione da  $O$  dello  $S_{r-2}$  doppio di  $\Gamma_P$ .

In questo  $S_{r-2}$  esiste un cono cubico  $W_{r-3}$  di tangenti 4-punte in  $P$  a  $V_{r-1}$ ; i piani passanti per una delle  $\infty^{r-4}$  sue generatrici danno luogo a sezioni con tacnodo, cioè su ciascuna di esse vi è un punto doppio di  $V_{r-1}$  infinitamente vicino a  $P$ .

Questi punti doppi, o il cono che li contiene, si proiettano in punti doppi della varietà di diramazione  $F$  infinitamente vicini al punto doppio *uniplanare*  $P_1$ , o nel cono cubico che li contiene situato nello  $S_{r-2}$  tangente in  $P_1$ , ad  $F$ .

S'intende che più in particolare può accadere che ogni tangente in  $P$  a  $V_{r-1}$  situata nello  $S_{r-2}$  doppio sia 4-punta, nel qual caso  $P_1$  è *tacnodo* di  $F$ .

I *d*). Il cono  $\Gamma_P$  è di specie  $r$ , cioè si compone di un  $S_{r-1}$  doppio, che si può per esempio prendere come  $t = x_1$  e con ciò  $\psi_1 = -x_1, \chi_2 = x_1^2$  e perciò  $P_1$  è almeno *triplo* per  $F$ .

4. LA RETTA  $OP$  APPARTIENE A  $V_{r-1}''$ . - Poichè  $\theta_0 = 0$ , la  $V_{r-1}''$  nell'intorno di  $P$  ( $\chi = 1$ ) si scrive

$$(4.1) \quad 2t\psi_1 + \chi_2 + (t^2\theta_1 + 2t\psi_2 + \chi_3) + \dots = 0$$

e la varietà di diramazione (in  $t = 0$ ) nell'intorno di  $P_1$

$$(4.2) \quad \psi_1^2 + (2\psi_1\psi_2 - \theta_1\chi_2) + \dots = 0.$$

Il cono delle tangenti  $(n-1)$ -punte in  $O$  a  $V_{r-1}$ ,  $\Gamma_O$ , è

$$(4.3) \quad \chi^{n-3}\theta_1 + \chi^{n-4}\theta_2 + \dots + \theta_{n-2} = 0$$

e lo  $S_{r-1}$ , ad esso tangente in  $P$  è

$$(4.4) \quad \theta_1 = 0.$$

Il cono delle tangenti tripunte in  $P$  a  $V_{r-1}''$ , sia  $\Gamma_P$ , è (fatto  $\chi = 1$ )

$$(4.5) \quad 2t\psi_1 + \chi_2 = 0$$

e il suo  $S_{r-1}$  tangente in  $O$  è

$$(4.6) \quad \psi_1 = 0.$$

Anche qui distinguiamo diversi sottocasi secondo la natura di  $\Gamma_P$ .

II *a*). Il cono  $\Gamma_P$  è di prima specie. Il punto  $P_1$  di  $F$  è *uniplanare*. Il cono delle tangenti 4-punte in  $P_1$  si *spezza* in un  $S_{r-3}$ ,  $\theta_1 = 0, \psi_1 = 0$  e nella traccia  $\chi_2 = 0$  di  $\Gamma_P$  sopra lo  $S_{r-2}$  tangente in  $P_1$ ,  $\psi_1 = 0$ .

II *b*). Il cono  $\Gamma_P$  è di seconda specie, cioè con retta vertice. Questa può coincidere o essere distinta dalla  $OP$ .



II  $b_1$ ). Se la retta vertice *non* coincide con  $OP$  è necessariamente  $\psi_1 \equiv 0$ ;  $\psi_1$  e  $\psi_2$  si possono prendere per esempio indipendenti da  $x_{r-1}$ . Il cono delle tangenti 4-punte in  $P_1$  (entro  $\psi_1 = 0$ ) ad  $F$  si spezza in  $\theta_1 = 0$ , che è lo  $S_{r-3}$  traccia dello  $S_{r-1}$  tangente in  $P$  a  $\Gamma_0$ , e in  $\chi_2 (x_1 \cdots x_{r-2}) = 0$ , traccia di  $\Gamma_P$ , che è almeno di seconda specie.

II  $b_2$ ). Se la retta vertice è la  $OP$  è necessariamente  $\psi_1 \equiv 0$ . Ne segue che  $P_1$  è (almeno) *triplo* per  $F$ ; e il cono ivi tangente  $\theta_1 \chi_2 = 0$  si spezza in  $\theta_1 = 0$  ( $S_{r-2}$  traccia della  $S_{r-1}$  tangente in  $P$  a  $\Gamma_0$ ) e in  $\chi_2 = 0$  (traccia di  $\Gamma_P$ ) che è in generale di prima specie.

Lo stesso ragionamento si estende al caso in cui  $\Gamma_P$  sia di specie  $s+1 > 2$  e anche qui bisognerà distinguere due sottocasi secondo che la retta  $OP$  non appartiene oppure appartiene allo spazio  $S_s$  vertice. Nel primo sottocaso  $P_1$  è *uniplanare* per  $F$  e il cono delle tangenti quadripunte di  $F$  in  $P_1$  si spezza in uno  $S_{r-3}$  e in un cono (dell' $S_{r-2}$  tangente) che è pure di specie  $s+1$ . Invece nel secondo sottocaso ( $OP$  appartiene allo spazio vertice) il punto  $P_1$  è *triplo* (almeno) per  $F$  e il cono cubico delle tangenti  $\Gamma_{P_1}$ , si spezza nello  $S_{r-2}$ ,  $\theta_1 = 0$  e nel cono quadrico  $\chi_2 = 0$  che è in generale di specie  $s$ .

Vediamo gli ultimi casi possibili.

II  $c$ ). Il cono  $\Gamma_P$  è di specie  $r-1$ , cioè spezzato in due  $S_{r-2}$  distinti per un  $S_{r-2}$  vertice.

II  $c_1$ ). Se  $S_{r-2}$  non passa per  $O$ ,  $\psi_1 \equiv 0$ ,  $P_1$  è *uniplanare* per  $F$ , ma lo spezzamento voluto di  $\Gamma_P$  porta che  $\chi_2$  è divisibile per  $\psi_1$  (il che è d'accordo con quanto sopra perchè il cono  $\psi_1 = 0$ ,  $\chi_2 = 0$  entro l' $S_{r-2}$  tangente in  $P_1$  dovrebbe essere di specie  $r-1$ ): perciò ogni tangente in  $P_1$  ad  $F$  è 4-punta e  $P_1$  risulta un *tacnodo*.

II  $c_2$ ). Se invece lo  $S_{r-2}$  vertice passa per  $O$  è  $\psi_1 \equiv 0$  e  $\chi_2$  si scinde in due fattori lineari distinti (per ipotesi)  $P_1$  è punto triplo di  $F$  e il cono delle tangenti ivi si spezza in tre  $S_{r-2}$ , cioè  $P_1$  è *triplanare*.

II  $d$ ). Il cono  $\Gamma_P$  è di specie  $r$ , cioè è un  $S_{r-1}$  da contarsi due volte. In questo caso, poichè la 4.5 non contiene  $t^2$  l'unica possibilità è  $\psi_1 \equiv 0$  e  $\chi_2$  uguale al quadrato di una forma lineare, perciò  $P_1$  è *triplo* per  $F$  e il cono delle tangenti si spezza in due  $S_{r-2}$  di cui uno è *doppio*.

5. ULTERIORI SINGOLARITÀ DELLA  $V_{r-1}^n$ . — I risultati precedenti valgono nell'ipotesi che la  $V_{r-1}^n$  possieda nei punti  $O$  e  $P$  esattamente le singolarità precisate senza ulteriori particolarità. In caso contrario essi vanno modificati nel senso che si avranno in generale ulteriori particolarizzazioni della varietà di diramazione.

Nel caso che la retta  $OP$  appartenga alla  $V_{r-1}^n$  per la presenza di  $O$  ( $n-2$ )-plo e di  $P$  doppio, gli  $S_{r-1}$  tangenti a  $V_{r-1}^n$  nei punti di  $OP$  formano in generale fascio poichè lo  $S_{r-1}$  tangente in  $(o, \dots, o, \overset{\circ}{\chi}, \overset{\circ}{i})$  è dato da

$$\theta_1 \overset{\circ}{i} + 2\psi_1 \overset{\circ}{\chi} = 0.$$

Ma può accadere che vi sia un  $S_{r-1}$  tangente fisso lungo  $OP$  o che esso diventi indeterminato ( $OP$  doppia per  $V_{r-1}^n$ ).

Il primo fatto può accadere o perché  $\theta_1 \equiv 0$  o perché  $\psi_1 \equiv 0$  o perché le forme  $\theta_1$  e  $\psi_1$  differiscono per un fattore costante:  $\theta_1 \equiv h\psi_1$ ; mentre il secondo fatto avviene se e solo se  $\theta_1 \equiv 0$  e  $\psi_1 = 0$ .

Nel primo caso, com'è noto<sup>(1)</sup>, sulla OP vi sono  $n-1$  punti doppi (o singolarità equivalenti) per  $V_{r-1}^n$ .

E infatti se  $\theta_1 \equiv 0$  dalla sezione piana generica per OP si stacca la retta OP e rimane una curva che ha O come punto  $(n-3)$ -plo tangente ad OP; e quindi esiste sulla OP un punto doppio infinitamente vicino ad O. Questo caso può anche caratterizzarsi dicendo che la retta OP è doppia per il cono  $\Gamma_0$  ma non per la  $V_{r-1}^n$ . Se infine  $\theta_1 = h\psi_1$  vi è un punto doppio in  $t = 1, \chi = -h/2$ .

Se invece  $\psi_1 \equiv 0$ , dalla sezione piana per OP si stacca ancora la OP e la curva residua è tangente ad essa in P sicché vi è un nuovo punto doppio sulla OP infinitamente vicino a P. Si può anche dire che la OP è doppia per il cono  $\Gamma_P$  ma non per  $V_{r-1}^n$ .

Passando ora alle varietà di diramazione F si hanno i seguenti casi.

III. Se  $\theta_1 \equiv 0, \psi_1 \not\equiv 0$  la F nell'intorno di  $P_1$  è data da

$$\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + 2\psi_1\psi_3 + \psi_2^2 - \theta_2\chi_2 + \dots = 0.$$

Ciò prova che  $P_1$  è *uniplanare*, con  $S_{r-2}$  tangente  $\psi_1 = 0$ . Ogni tangente in  $P_1$  è almeno 4-punta, ma vi è un cono del 4° ordine di tangenti 5-punte,  $\psi_1 = 0, \psi_2^2 = \theta_2\chi_2$ . È facile caratterizzare geometricamente questo cono.

Il cono  $\Gamma_P$ , la cui equazione è sempre la (4.5) può essere di specie superiore alla prima (e la discussione si conduce come al n. 4). In particolare può spezzarsi in due  $S_{r-1}$ , distinti poichè la OP non è doppia per  $V_{r-1}^n$ , e allora si conclude come in II  $c_1$ ) che  $\chi_2$  è divisibile per  $\psi_1$ , e quindi il precedente cono del 4° ordine in  $\psi_1 = 0$  si riduce ad un cono quadrico contato due volte  $\psi_2^2 = 0$ . Anche questo cono s'individua facilmente come traccia del cono osculatore in  $P_1$  sullo  $S_{r-2}$  ivi tangente alla polare di O rispetto a  $V_{r-1}^n$ .

Se  $\psi_1 \equiv 0, \theta_1 \not\equiv 0$  si ritorna sul caso già discusso in II  $b_2$ ) (a meno che anche  $\chi_2 \equiv 0$ ; vedi VI).

IV) Se  $\theta_1 \equiv h\psi_1$  la F di diramazione ha in  $P_1$  un punto *uniplanare*, con  $S_{r-2}$  tangente  $\psi_1 = 0$ ; la tangente generica è quadripunta ( $P_1$  è *tacnodo*), ma vi è un cono di tangenti 5-punte,  $\psi_1 = 0, \psi_2^2 = \theta_2\chi_2$  (insomma si ripetono le circostanze del caso III, salvo il fatto che l'ulteriore punto doppio *non* è infinitamente vicino ad O).

V) Se  $\theta_1 \equiv 0, \psi_1 \equiv 0$  la OP è doppia per  $V_{r-1}^n$ , il punto P di F è *quadruplo* (almeno) ed il cono  $\Gamma_{P_1}$  ha l'equazione  $\psi_2^2 = \theta_2\chi_2$ .

(1) E. BOMPIANI, *Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica* « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. I, 1946. Il teorema generale cui si riferisce è il seguente: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una  $V_{r-1}^n$  abbia lungo un suo  $S_K$  un iperpiano tangente fisso è che esista in  $S_K$  una  $V_{K-1}^{n-1}$  luogo di punti doppi per  $V_{r-1}^n$ .*

Qui il teorema è applicato per  $k=1$ ; e date le singolarità già supposte in O e in P si determina l'ulteriore punto doppio esistente su OP.

VI) Un'altra particolarità di  $V_{r-1}^n$  si ha quanto P sia triplo invece che doppio. In tal caso, oltre a  $\theta_0 = 0$ ,  $\psi_1 \equiv 0$ , si ha  $\chi_2 \equiv 0$ ; la retta OP appartiene necessariamente a  $V_{r-1}^n$ . Il punto  $P_1$  è ancora *quadruplo*, come nel caso precedente, ma il cono  $\Gamma_{P_1}$  ha l'equazione  $\psi_2^2 = \theta_1 \chi_3$  e si distingue dal precedente per il diverso comportamento rispetto al cono  $\psi_2 = 0$ .

VII) Infine le ultime circostanze possono presentarsi insieme ( $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_1 \equiv \psi_1 \equiv \chi_2 \equiv 0$ ); la retta OP è doppia per  $V_{r-1}^n$  con O  $(n-2)$ -plo e P triplo; il punto  $P_1$  è pure *quadruplo*, ma  $\Gamma_{P_1}$  è un cono quadrico contato due volte.

**Geometria.** — *Sui diametri coniugati delle ovali a centro.* Nota di R. INZINGER, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. In questa Nota dimostro il teorema seguente:

*Se  $\mathcal{E}$  è un'ovale di centro O tagliata da ogni ellisse concentrica al più in quattro coppie di punti simmetriche rispetto ad O essa ha esattamente due coppie di diametri coniugati.*

Due diametri si dicono coniugati, rispetto all'ovale, quando le tangenti negli estremi di uno sono parallele all'altro.

J. Radon ha determinato le ovali a centro i cui diametri si comportano come quelli di un'ellisse; cioè si distribuiscono in  $\infty^1$  coppie di diametri coniugati (1).

Il numero minimo delle coppie di diametri coniugati nelle ovali a centro non appartenenti alla classe di Radon è due. Questa osservazione è stata fatta occasionalmente da P. Funk (2) in un problema di chiusura nella geometria affine relativo alle ovali a centro. Non sembra che esistano altri risultati in quest'indirizzo. La dimostrazione che segue del teorema enunciato richiede la continuità delle derivate seconde delle funzioni che si considerano rispetto ad un opportuno parametro.

2. Sia  $\mathcal{E}$  un'ovale a centro O tagliata da ogni ellisse concentrica in quattro coppie di punti al più, disposti simmetricamente rispetto ad O.

Consideriamo le ellissi concentriche a  $\mathcal{E}$  che toccano  $\mathcal{E}$  nella coppia  $P(P_1 P_2)$  di punti simmetrici rispetto ad O, e che appartengono completamente alla regione convessa limitata da  $\mathcal{E}$ . Nell'insieme di queste ellissi ve n'è esattamente una, sia K, che tocca  $\mathcal{E}$  oltre che in P in un'altra coppia  $P'(P'_1 P'_2)$  di punti simmetrici rispetto ad O. Questa ellisse K non può avere con  $\mathcal{E}$

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) J. RADON, *Ueber eine besondere Art konvexer Kurven*, «Leipziger Berichte», 68 (1916), pp. 123-128.

(2) P. FUNK, *Ueber den Eigenschaft der Ellipse*, «Math. Zeitschr.», 3 (1919), p. 91; v. anche l'osservazione a questo lavoro in «Math. Zeitschr.», 28 (1927), p. 95.

altri punti comuni perchè altrimenti, con piccola variazione, si otterrebbe una ellisse avente con  $\mathcal{E}$  più di quattro coppie di punti simmetrici rispetto ad  $O$ .

Consideriamo ora la totalità  $\{k\}$  delle ellissi che toccano  $\mathcal{E}$  in due coppie di punti simmetriche rispetto ad  $O$  e che appartengono alla regione convessa limitata da  $\mathcal{E}$ . Le ellissi  $k$  di questa totalità forniscono una corrispondenza biunivoca involutoria, quindi topologica,  $P \rightleftharpoons P'$  fra coppie dei loro punti di contatto e perciò una corrispondenza con le stesse proprietà fra i diametri  $p \rightleftharpoons p'$  che vanno ai loro punti di contatto. Cerchiamo gli elementi doppi della corrispondenza  $P \rightleftharpoons P'$  o  $p \rightleftharpoons p'$ .

È noto che esistono per ogni ovale a centro  $\mathcal{E}$  almeno quattro ellissi concentriche che iperosculano  $\mathcal{E}$  in punti diametralmente opposti <sup>(3)</sup> e che ne esistono al più tante quante sono le coppie di punti in cui  $\mathcal{E}$  può esser tagliata da un'ellisse concentrica <sup>(4)</sup>. Nel caso attuale vi sono dunque esattamente quattro ellissi iperosculatrici, delle quali due racchiudono la  $\mathcal{E}$  e le altre due sono da essa racchiuse. Ciascuna di queste ellissi iperosculatrici non può avere con  $\mathcal{E}$  altri punti comuni oltre quelli di iperosculazione, altrimenti con piccola variazione si avrebbero ellissi con più intersezioni con  $\mathcal{E}$  di quante se ne sono supposte.

Le due ellissi iperosculatrici inscritte in  $\mathcal{E}$  appartengono alla totalità  $\{k\}$  e le loro coppie di contatto  $Q = Q'$  e  $R = R'$  sono gli elementi doppi della corrispondenza involutoria  $P \rightleftharpoons P'$ . I diametri che vanno ai punti di contatto  $q = q'$  e  $r = r'$  di queste ellissi iperosculatrici sono notoriamente (cfr. loc. cit. in <sup>(3)</sup>) normali affini doppie di  $\mathcal{E}$ : essi appariscono ora come gli elementi doppi nella corrispondenza  $p \rightleftharpoons p'$ .

Al variare di  $k$  nella totalità  $\{k\}$ , quando la coppia di contatto  $P$  si muove verso uno degli elementi doppi  $Q = Q'$  o  $R = R'$ , l'altra coppia di contatto, a causa dell'univocità e della continuità della corrispondenza  $P \rightleftharpoons P'$ , si muove verso  $Q = Q'$  o  $R = R'$ . Ne segue che nelle corrispondenze  $P \rightleftharpoons P'$  e  $p \rightleftharpoons p'$  si invertono il verso su  $\mathcal{E}$  e nel fascio dei diametri.

Sia  $k$  un'ellisse della totalità  $\{k\}$  e siano  $p$  e  $p'$  i diametri di contatto di  $\mathcal{E}$  e  $k$ . Oltre alla corrispondenza  $p \rightleftharpoons p'$  consideriamo l'altra  $p \rightleftharpoons p''$  che fa corrispondere a ciascun diametro  $p$  di  $\mathcal{E}$  il diametro  $p''$  coniugato di  $p$  rispetto a  $k$ . Questa corrispondenza  $p \rightleftharpoons p''$  è evidentemente biunivoca e continua, ma non involutoria: essa conserva il verso nel fascio dei diametri. Il prodotto delle due corrispondenze  $p \rightleftharpoons p' \rightleftharpoons p''$  è ancora una corrispondenza biunivoca e continua, non involutoria, che inverte il verso nel fascio dei diametri. Essa possiede dunque esattamente due elementi uniti  $s' = s''$ ,  $t' = t''$  ed è evidentemente  $s' = s'' = t$ ,  $t' = t'' = s$ . Le rette doppie della corrispondenza  $p' \rightleftharpoons p''$  costituiscono quindi una coppia di diametri coniugati di  $\mathcal{E}$ .

(3) R. INZINGER, *Einige Bemerkungen über Eiliniën*, « Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, math.-nat. Abt. », II<sup>a</sup>, 147 (1938), p. 238.

(4) R. INZINGER, *Ueber Mittelpunktseiliniën*, « Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, math.-nat. Abt. », II<sup>a</sup>, 155 (1946).



Negli estremi di questa coppia di diametri coniugati la  $\mathcal{E}$  è tangente ad un'ellisse  $k_i$  contenuta all'interno della regione limitata da  $\mathcal{E}$ . Si vede facilmente che  $k_i$  è l'ellisse concentrica a  $\mathcal{E}$  e interna a  $\mathcal{E}$  che ha l'area massima.

Si ripetano le considerazioni fatte considerando le ellissi concentriche a  $\mathcal{E}$ , che la toccano in coppie di punti simmetrici e che contengono  $\mathcal{E}$  nel loro interno. Si proverà allo stesso modo di prima l'esistenza di un'altra coppia di diametri coniugati di  $\mathcal{E}$ . Nei loro estremi  $\mathcal{E}$  è toccata da un'ellisse concentrica  $k_e$  esterna a  $\mathcal{E}$  (cioè avente  $\mathcal{E}$  all'interno). L'ellisse  $k_e$  è quella che ha area minima fra quelle ora considerate.

### Geometria. — *Sulle connessioni affini e sul vettore di Einstein* (\*).

Nota di A. COSSU, presentata (\*\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Sia  $A_n$  una varietà a connessione affine asimmetrica  $\nabla^{(1)}$  di parametri  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  e siano  $u^\lambda$  le coordinate curvilinee di un suo punto ( $\lambda, \mu, \nu, \omega, \dots = 1, 2, \dots, n$ ). A tale connessione si possono associare due altre connessioni affini  $\nabla^*$ ,  $\nabla^{(b)}$  intrinsecamente legate alla  $\nabla$ , le quali prendono rispettivamente il nome di *connessione coniugata* e di *connessione simmetrica associata* alla data (2).

Indicati con  $R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu}$ ,  $R_{\lambda\omega\mu}^{*\dots\nu}$ ,  $B_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu}$  i tre tensori di curvatura riemanniana relativi alle tre connessioni introdotte, sussistono le seguenti relazioni (3)

$$(1) \quad R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} - R_{\lambda\omega\mu}^{*\dots\nu} = 2 (\nabla_\omega^{(b)} S_{\mu\lambda}^{\dots\nu} - \nabla_\lambda^{(b)} S_{\mu\omega}^{\dots\nu})$$

$$(2) \quad R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} - B_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} = S_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu},$$

ove si è posto

$$S_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} = \nabla_\omega^{(b)} S_{\mu\lambda}^{\dots\nu} - \nabla_\lambda^{(b)} S_{\mu\omega}^{\dots\nu} + S_{\mu\lambda}^{\dots\tau} S_{\tau\omega}^{\dots\nu} - S_{\mu\omega}^{\dots\tau} S_{\tau\lambda}^{\dots\nu},$$

essendo  $S_{\mu\lambda}^{\dots\nu} = \Gamma_{[\mu\lambda]}^{\dots\nu}$  il tensore di torsione della connessione  $\nabla$ .

Contraendo le (1), (2) rispetto agli indici  $\mu, \nu$  segue:

$$(3) \quad R_{\lambda\omega\nu}^{\dots\nu} - R_{\lambda\omega\nu}^{*\dots\nu} = 2 \Phi_{\omega\lambda}$$

$$(4) \quad R_{\lambda\omega\nu}^{\dots\nu} - B_{\lambda\omega\nu}^{\dots\nu} = \Phi_{\omega\lambda},$$

ove  $\Phi_{\omega\lambda} = \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial u^\omega}$  è il rotore del *vettore di Einstein*  $\Phi_\omega = S_{\omega\nu}^{\dots\nu}$ .

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Denotiamo la connessione affine col simbolo della corrispondente derivazione covariante.

(2) Vedi: E. BORTOLOTTI, *Sulla Geometria della Varietà a connessione affine*, « Ann. di Mat. », ser. IV, to. VIII, 1930-31; p. 59 e sg.

(3) Cfr. nota precedente.

D'altra parte è noto che, costruito un ciclo, che per semplicità supporremo un parallelogramma infinitesimo, a partire da un punto P della  $A_n$  e di lati  $d_1 u^\lambda, d_2 u^\omega$  (4) si ottiene facilmente:

$$(5) \quad \frac{DV}{V} = R_{\lambda\omega\nu}^{\dots\nu} d_1 u^\omega d_2 u^\lambda \quad (5),$$

ove V e DV rappresentano rispettivamente il volume  $n$ -dimensionale di una piramide definita da  $n$  vettori indipendenti applicati in P, e la parte principale dell'incremento che questo subisce trasportandolo per  $\nabla$ -equipollenza lungo il supposto ciclo.

Dalle (3), (4), (5) segue, quindi, subito:

$$\frac{DV - D^* V}{V} = 2 \Phi_{\omega\lambda} d_1 u^\omega d_2 u^\lambda$$

$$\frac{DV - D^{(b)} V}{V} = \Phi_{\omega\lambda} d_1 u^\omega d_2 u^\lambda,$$

o anche, indicando con  $\bar{V}, \bar{V}^*, \bar{V}^{(b)}$  i valori finali assunti da V nel trasporto infinitesimale per  $\nabla, \nabla^*, \nabla^{(b)}$ -equipollenza lungo il suddetto ciclo,

$$\frac{\bar{V} - \bar{V}^*}{V} = 2 \Phi_{\omega\lambda} d_1 u^\omega d_2 u^\lambda$$

$$\frac{\bar{V} - \bar{V}^{(b)}}{V} = \Phi_{\omega\lambda} d_1 u^\omega d_2 u^\lambda.$$

Si può quindi concludere che:

*Il rotore del vettore di Einstein esprime il rapporto tra il divario dei valori finali, assunti da un volume V, n-dimensionale, (di una piramide definita da n vettori indipendenti uscenti da un punto P della varietà) nel trasporto ciclico infinitesimale per  $\nabla$  e  $\nabla^*$ -equipollenza (o  $\nabla$  e  $\nabla^{(b)}$ -equipollenza), ed il volume stesso.*

2. Se  $\Phi_{\omega\lambda} = 0$ , e quindi  $\Phi_\lambda$  è il gradiente di uno scalare, il trasporto ciclico infinitesimale per equipollenza del volume V coincide per le tre connessioni introdotte. Di più la connessione  $\nabla^{(p)}$  di parametri:

(4) Per costruirlo basterà che, denotati con P,  $P_1, P_{12}, P_2$  i suoi vertici,  $\overline{P_1 P_{12}}$  sia  $\nabla$ -equipollente a  $\overline{P P_2}$  lungo  $\overline{P_1 P}$  e  $\overline{P_2 P_{12}}$  sia  $\nabla^*$ -equipollente a  $\overline{P P_1}$  lungo  $\overline{P_2 P}$ .

(5) Definita, infatti, la derivata covariante di uno scalare relativo A di peso K mediante la relazione  $\nabla_\lambda A = \frac{\partial A}{\partial u^\lambda} - K \Gamma_{\nu\lambda}^\nu A$ , segue facilmente:

$$DA = KA R_{\lambda\omega\nu}^{\dots\nu} d_1 u^\omega d_2 u^\lambda,$$

essendo DA la parte principale dell'incremento che lo scalare A subisce nel trasporto infinitesimale per  $\nabla$ -equipollenza lungo il parallelogramma infinitesimo di lati  $d_1 u^\lambda, d_2 u^\omega$ .

Osservo ancora, e ciò non mi sembra sia stato ancora notato, che per  $n = 3$  l'incremento DV è nullo allorché la giacitura piana, determinata dalle due direzioni  $d_1 u^\lambda, d_2 u^\omega$  nello spazio affine tangente in P alla  $A_n$ , contiene la direzione associata al bivettore covariante  $R_{\lambda\omega\nu}^{\dots\nu}$ . In tal caso quindi la connessione  $\nabla$  si comporta come una connessione EQUIAFFINE.

$$P_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{2}{n-1} \delta_{\mu}^{\lambda} \Phi_{\nu}^{(6)},$$

intrinsecamente legata alla data connessione  $\nabla$  ed invariante per le trasformazioni  $T_p$  che conservano il parallelismo, è invariante anche per le trasformazioni  $T_{pc}$  che conservano il parallelismo e la curvatura. In altre parole la  $\nabla^{(p)}$  è la  $T_{pc}$ -trasformata della connessione primitiva.

In tal caso, indicato con  $K_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu}$  il tensore di curvatura riemanniana della  $\nabla^{(p)}$ , si ha:

$$R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} = K_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} \quad (7).$$

Ciò ha un semplice significato geometrico che si può esprimere dicendo:

*Se la connessione  $\nabla$  e le connessioni associate  $\nabla^*$ ,  $\nabla^{(b)}$  ammettono lo stesso trasporto ciclico infinitesimale per equipollenza per un volume  $n$ -dimensionale  $V$ , le connessioni  $\nabla$  e  $\nabla^{(p)}$  hanno la medesima curvatura.*

Più in generale, essendo  $\Phi_{\omega\lambda} \neq 0$ , se esiste un parallelogramma infinitesimo di lati  $d_1 u^{\lambda}$ ,  $d_2 u^{\omega}$  lungo il quale il trasporto per equipollenza di un volume  $V$ ,  $n$ -dimensionale, è lo stesso per le tre connessioni  $\nabla$ ,  $\nabla^*$ ,  $\nabla^{(b)}$ , la connessione  $\nabla$  si comporta lungo lo stesso ciclo come la sua  $T_{pc}$ -trasformata <sup>(8)</sup>.

OSSERVAZIONE. — Per  $n = 3$  ciò accade *sempre*, allorchando la giacitura delle due direzioni  $d_1 u^{\lambda}$ ,  $d_2 u^{\omega}$  contiene la direzione associata al bivettore covariante  $\Phi_{\omega\lambda}$ ; più precisamente, quando il piano, passante per i due lati  $d_1 u^{\lambda}$ ,  $d_2 u^{\omega}$  del parallelogramma infinitesimo, appartiene al fascio avente per asse la direzione associata a  $\Phi_{\omega\lambda}$ , uscente dal punto a partire dal quale s'è costruito il ciclo. Notiamo ancora che, se le due direzioni  $d_1 u^{\lambda}$ ,  $d_2 u^{\omega}$  appartengono alla giacitura individuata dalle due direzioni associate ai due bivet-

(6) Vedi op. cit. nota (2); EISENHART, *Non-Riemannian Geometry*, « A. M. S., Colloquium Publications », New-York, 1927.

(7) In generale sussiste la relazione:  $K_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} = R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} + \frac{2}{n-1} \delta_{\mu}^{\nu} \Phi_{\lambda\omega}$  da cui si vede subito che la presenza del rotore del vettore di Einstein denota lo scostarsi della curvatura della connessione  $\nabla$  da quella della  $\nabla^{(p)}$ .

(8) Trasportando, infatti, un vettore controvariante  $\xi^{\lambda}$  per  $\nabla$  e  $\nabla^{(p)}$ -equipollenza lungo il supposto ciclo, i cui lati soddisfino alla relazione  $\Phi_{\omega\lambda} d_1 u^{\omega} d_2 u^{\lambda} = 0$ , segue:

$$D\xi^{\nu} = R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} \xi^{\mu} d_1 u^{\lambda} d_2 u^{\omega} = K_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} \xi^{\mu} d_1 u^{\lambda} d_2 u^{\omega}$$

ove si è indicato, come al solito, con  $D\xi^{\nu}$  la parte principale dell'incremento che  $\xi^{\nu}$  subisce alla fine del ciclo. Si noti che un fatto analogo accade per il trasporto infinitesimale per  $\nabla$ ,  $\nabla^{(p)}$ -equipollenza lungo una direzione appartenente alla giacitura iperpiana del vettore di Einstein. Infatti in tal caso, come è facilmente verificabile, si ha, ad esempio per il vettore controvariante  $\xi^{\lambda}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \xi^{\mu} du^{\nu} = P_{\mu\nu}^{\lambda} \xi^{\mu} du^{\nu},$$

essendo  $\Phi_{\nu} du^{\nu} = 0$ .

tori  $R_{\lambda\omega\nu}^{\dots\nu}, R_{\lambda\omega\nu}^{\dots\nu}$ , le tre connessioni  $\nabla, \nabla^*, \nabla^{(b)}$  (cfr. nota (5)) si comportano lungo quel ciclo come tre connessioni *equiaffini*.

Se poi, per  $n > 3$ ,  $\Phi_{\omega\lambda}$  soddisfa alla relazione  $\Phi_{\omega\lambda} \Phi_{\sigma\tau} = \delta_{\lambda\sigma}^{\tau\nu} \Phi_{\tau\omega} \Phi_{\nu\sigma}$  ossia  $\Phi_{\lambda[\omega} \Phi_{\sigma]\nu} = 0$  <sup>(9)</sup>, si ha, analogamente a quanto si è detto per  $n = 3$ , che le connessioni  $\nabla, \nabla^{(p)}$  hanno uguali *rotazioni affini* <sup>(10)</sup> per ogni ciclo infinitesimo i cui lati  $d_1 u^\lambda, d_2 u^\omega$  individuano una 2-direzione avente a comune una direzione con la  $(n-2)$ -direzione associata a  $\Phi_{\omega\lambda}$ .

**Matematica (Geometria).** — *Sulle superficie isoterme-asintotiche.*  
Nota <sup>(\*)</sup> di O. TIGANO, presentata dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Si deve al Calapso uno studio, dal punto di vista sintetico, della proiettività,  $\pi$ , definita come prodotto dei sistemi nulli osculatori alle asymptotiche di una superficie (non rigata)  $S$ , in un suo generico punto  $P$  <sup>(1)</sup>.

La considerazione di questa proiettività conduce ad un problema la cui soluzione fornisce una nuova *proprietà caratteristica delle superficie isoterme-asintotiche*, come ora mostreremo.

È noto <sup>(2)</sup> che, riferendo la  $S$  alle asymptotiche  $u = \text{cost}$  e  $v = \text{cost}$ , le coordinate proiettive  $x, y, z$  del punto mobile su di essa soddisfano ad un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

(in cui  $a, b, p, q$  sono funzioni di  $u$  e  $v$ ), le cui condizioni d'integrabilità sono:

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial v^2} + p \frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial(bp)}{\partial v} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + q \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial(ap)}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} + a \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial(bq)}{\partial v} = \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + b \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial(bp)}{\partial u} \end{cases}$$

Se  $P(x, y, z)$  è un generico punto della superficie, corrispondente ai valori  $u$  e  $v$  dei parametri, conviene, com'è d'uso, introdurre per ogni punto  $M$  dello spazio le cosiddette coordinate omogenee locali  $x', y', z', t'$ , legate alle

(9) Ciò equivale a dire che  $\Phi_{\omega\lambda}$  è un bivettore covariante semplice.

(10) Cfr. nota (8).

(\*) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1947.

(1) R. CALAPSO, *Studi sintetici di Geometria proiettiva differenziale*. « Rendiconti della Accademia dei Lincei » (1931), 1° semestre, p. 350.

(2) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1927),



coordinate proiettive non omogenee  $x'', y'', z''$  (a cui è già riferito lo spazio) dalle relazioni:

$$(1) \quad x'' = x + \frac{x'}{t'} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{y'}{t'} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{z'}{t'} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},$$

ed analoghe in  $y$  e  $z$  (3).

Allora, un facile calcolo, che qui omettiamo, permette di trovare le equazioni della proiettività  $\pi$  nel riferimento locale. Precisamente, indicando con  $(x', y', z', t')$  le coordinate locali di un qualunque punto  $M$  dello spazio e con  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  quelle del punto  $M_1$  corrispondente ad  $M$  in  $\pi$ , si hanno le equazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = -x' - mz' \\ y_1 = -y' - nz' \\ z_1 = z' \\ t_1 = nx' + my' + mnz' + t', \end{cases}$$

ed inversamente:

$$(3) \quad \begin{cases} x' = -x_1 - mz'_1 \\ y' = -y_1 - nz'_1 \\ z' = z'_1 \\ t' = nx'_1 + my'_1 + mnz'_1 + t_1, \end{cases}$$

avendo posto:

$$(4) \quad \begin{cases} m = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial v} + q \\ n = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} + a. \end{cases}$$

Dal confronto delle (2) con le (3) si deduce subito, come ha osservato il Calapso, che la proiettività  $\pi$  è involutoria. Essa è un'omografia biassiale armonica avente per assi le due direttrici di Wilezynski (4).

Questi risultati si ricavano anche subito analiticamente dalle (2).

2. È noto che una congruenza di rette si dice coniugata ad una superficie, se le sviluppabili della congruenza staccano sulla superficie un sistema coniugato, e che la più generale congruenza coniugata alla considerata superficie è generata dalle rette per  $P$  rappresentate dalle equazioni locali (5):

$$(5) \quad \begin{cases} x' = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ y' = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \end{cases}$$

in cui  $\Phi$  indica una funzione arbitraria di  $u$  e  $v$ .

(3) Si ricordi che il determinante  $\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right|$  è diverso da zero per ogni coppia  $u, v$  che si considera.

(4) R. CALAPSO, loc. cit. in (1), p. 351.

(5) G. FUBINI, *Sulle congruenze coniugate od armoniche ad una superficie data.* « Rend. Circolo Matematico », Palermo, 1925, t. XLIX.

Trasformando la congruenza (5) mediante la proiettività  $\pi$  si ottiene una nuova congruenza, il cui raggio generico passa sempre, evidentemente, per lo stesso punto P (che è unito in  $\pi$ ); ma in generale avviene che la nuova congruenza non risulta più coniugata alla superficie S.

Pertanto siamo indotti a porre il seguente problema: «Caratterizzare i casi in cui, trasformando con la proiettività  $\pi$  la congruenza (5), coniugata alla data superficie S, si ottiene una congruenza anch'essa coniugata alla S».

Un calcolo, che per brevità omettiamo, mostra che la congruenza trasformata della (5) mediante la proiettività  $\pi$  è generata (al variare di  $u$  e  $v$ ) dalle rette rappresentate in coordinate locali dalle equazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{x'_1}{\tilde{x}'_1} = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \left( \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial v} + q \right) \\ \frac{y'_1}{\tilde{y}'_1} = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \left( \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} + a \right) \end{cases}$$

Ora la condizione necessaria e sufficiente affinché anche questa retta descriva una congruenza coniugata alla superficie S è che si abbia:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial v} + q \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} + a \right);$$

ma sappiamo, per le (\*), che:

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u},$$

onde la (7) riducesi alla condizione

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{b}{p} = 0,$$

che appunto caratterizza le superficie isoterme-asintotiche <sup>(6)</sup>.

Si perviene così al seguente teorema:

« Condizione necessaria e sufficiente affinché una congruenza coniugata ad una superficie S venga mutata dalla proiettività  $\pi$  in una congruenza pure coniugata alla S è che la S sia una superficie isoterma-asintotica. Dunque se la proprietà è verificata da una di tali congruenze, allora essa sussiste per ciascuna di queste ».

3. Vogliamo osservare ancora che per una qualunque superficie accade che ogni retta canonica è mutata da  $\pi$  in una retta canonica.

Più precisamente vale il seguente teorema, che facilmente si dimostra per via sintetica e di cui il lettore può subito, per mezzo delle (2), fare una verifica analitica:

« Per una qualunque superficie S, una retta del piano canonico (passante per il punto P di S) è trasformata da  $\pi$  nella sua coniugata armonica rispetto alla prima direttrice di Wilezynski ed alla tangente canonica ».

(6) G. FUBINI-E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1926), p. 94.

**Geometria.** — *Su alcuni tipi di quartiche piane.* Nota (\*) di V. DALLA VOLTA, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

Espongo in questa breve Nota qualche semplice proprietà proiettiva di alcuni tipi di quartiche piane, ellittiche o razionali, proprietà che non mi sembrano del tutto prive di interesse: esse si ottengono quali applicazioni dei primi teoremi sulle serie lineari  $g_n^r$  date su una curva algebrica.

1. È notissimo<sup>(1)</sup> che operando una trasformazione quadratica piana, una conica generica si trasforma in una quartica dotata di tre punti doppi; questi sono *biflecnodi* (nodi aventi le tangenti principali di flesso) se e solo se il triangolo fondamentale della trasformazione quadratica è *autopolare* rispetto alla conica data<sup>(2)</sup>. Da notissime proprietà dei triangoli autoconiugati segue allora subito il seguente teorema, che non ho trovato esplicitamente enunciato:

*Se una quartica razionale,  $C^4$ , con tre punti doppi, possiede un biflecnodo, mentre, in uno degli altri due punti doppi, una delle tangenti principali si suppone di flesso, allora anche l'altra gode della medesima proprietà; inoltre anche il terzo punto doppio è biflecnodo: o, in altri termini: non possono esistere quartiche piane razionali con un biflecnodo e un flecnodo: tale proprietà, di dimostrazione pressochè immediata, non mi pare possa prevedersi a priori, basandosi, per esempio su un computo di costanti.*

Ora, una proprietà analoga vale pure per una quartica ellittica,  $\Gamma^4$ , vale a dire: *se una quartica piana di genere 1,  $\Gamma^4$ , ha due punti doppi a tangenti distinte, e tre delle tangenti principali sono di flesso, allora anche la quarta gode della stessa proprietà.*

Indichiamo infatti con A ed A' le due origini — coincidenti — dei due rami lineari uscenti da uno dei punti doppi, rami che, per ipotesi supporremo di flesso; siano inoltre B e B' le origini dei rami lineari uscenti dal secondo punto doppio; e supponiamo che il ramo uscente, per esempio, da B sia di flesso; si vuol dimostrare che anche il ramo uscente da B' è inflessionale. Consideriamo allora l'involuzione  $g_2^1$  segata sulla  $\Gamma^4$  dalle rette uscenti dal primo punto doppio; in essa, per l'ipotesi fatta, A ed A' sono *punti doppi*, mentre B e B' sono coniugati: cosicchè si ha:

$$(1) \quad 2A \equiv B + B'$$

$$(1') \quad 2A' \equiv B + B'.$$

Similmente, si consideri la  $\bar{g}_2^1$  segata su  $\Gamma^4$  dalle rette uscenti dall'altro punto doppio; in questa, ovviamente, A ed A' sono coniugati, mentre, per ipotesi,

(\*) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1947.

(1) V. per esempio ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla Teoria Geometrica delle Equazioni e delle Funzioni Algebriche*, vol. III, p. 233.

(2) V. loc. cit. in (1).

B è uno dei punti doppi; indicato allora con  $\bar{B}'$  il coniugato di  $B'$  in questa  $\bar{g}_2^1$ , si tratta di dimostrare che  $B'$  coincide con  $\bar{B}'$ ; si ha infatti

$$(2) \quad 2B \equiv A + A'$$

$$(2') \quad B' + \bar{B}' \equiv A + A';$$

sommando membro a membro le (1), (2) si ha allora:

$$2A + 2B \equiv A + B + A' + B',$$

da cui

$$(3) \quad A + B \equiv A' + B';$$

analogamente, sommando invece le (1'), (2') abbiamo:

$$2A' + B' + \bar{B}' \equiv B + B' + A + A',$$

cioè

$$(3') \quad A' + \bar{B}' \equiv A + B$$

e quindi, per la (3)

$$B' \equiv \bar{B}';$$

ma essendo  $\Gamma^4$  di genere 1, su di essa non può esistere una  $g_1^1$ ; perciò  $B'$  dovrà coincidere con  $\bar{B}'$ , c. v. d.

2. Il ragionamento precedente si può tradurre così in forma invariante per trasformazioni birazionali:

*Su una curva di genere  $p = 1$ , si consideri una  $g_2^1$  e due dei suoi punti doppi, siano  $A$  ed  $A'$ : si consideri poi la  $\bar{g}_2^1$  individuata dal gruppo  $A + A'$ , e sia  $B$  uno dei suoi punti doppi; detto  $B'$  il coniugato di  $B$  nella prima involuzione  $g_2^1$ , esso è necessariamente doppio per la seconda involuzione,  $\bar{g}_2^1$ .*

3. Possiamo ora ricavare altre proprietà delle nostre curve, quali applicazioni del risultato precedente; consideriamo infatti, dapprima, gli altri due punti doppi della  $g_2^1$  segata dalle rette uscenti da  $A$  (coincidente con  $A'$ ) (per esempio): essi sono evidentemente i punti di contatto di tangenti alla curva uscenti da  $A$ . Risulta allora dal numero precedente che tali punti di contatto sono coniugati nell'involuzione delle rette uscenti dall'altro punto doppio; cioè: *in una quartica ellittica con due biflencodi, le due rette uscenti da uno dei nodi, e tangenti altrove alla curva, hanno i punti di contatto allineati con l'altro punto doppio.*

Se invece l'altro punto doppio,  $B$  è a tangenti coincidenti, esso è anzitutto certamente una cuspidi di prima specie, poichè  $\Gamma^4$  è ellittica (3); consideriamo la  $g_2^1$  delle rette uscenti da  $A$ ; (coincidente con  $A'$ ) in essa  $A$  ed  $A'$  sono punti doppi, e, come è ovvio, la  $\bar{g}_2^1$  individuata dal gruppo  $A + A'$  è ancora quella segata dalle rette per la cuspidi; sia  $C$  uno dei punti doppi della  $\bar{g}_2^1$  (cioè il punto di contatto di una delle 4 tangenti a  $\Gamma^4$  uscenti da  $B$ ); per quanto si è visto, il suo coniugato nella  $g_2^1$  è doppio per la  $\bar{g}_2^1$ ; ossia: *in una quartica ellittica con un biflencodo e una cuspidi i quattro punti di contatto*

(3) Che esistano quartiche con le singolarità in questione, si constata costruendone effettivamente l'equazione.



delle tangenti alla curva uscenti dalla cuspide sono a coppie allineati col biflecnode. Invertiamo ora l'ufficio delle due serie, considerando dapprima la  $\bar{g}_2^1$  segata dalle rette uscenti dalla cuspide, e due dei suoi punti doppi; come abbiám visto or ora, essi sono allineati con A e, pertanto, la  $g_2^1$  da essi individuata è quella segata dalle rette per A; per essa il punto B è doppio; ma allora, sempre per il n. 2), è doppio anche il coniugato di B nella  $\bar{g}_2^1$ , vale a dire l'ulteriore punto di intersezione con  $\Gamma^4$  della tangente cuspidale; possiamo concludere perciò: *la tangente cuspidale alla nostra  $\Gamma^4$  sega la curva nel punto di contatto della (unica) tangente uscente dal biflecnode* <sup>(4)</sup>.

4. Se si vuole dimostrare il teorema enunciato al n. 1 per una  $C^4$  razionale, senza ricorrere alle trasformazioni quadratiche, si può considerare la nostra curva come un caso *limite* di una  $\Gamma^4$  ellittica; è infatti evidente che la conclusione del n. 1 continua a sussistere quando la  $\Gamma^4$ , variando con continuità, acquista un nuovo punto doppio. Ora, sulla  $C^4$  razionale, le  $g_2^1$  considerate in precedenza diventano, al limite, involuzioni nel senso ordinario della parola; segue allora subito, intanto, che il terzo punto doppio *non* può essere a tangenti coincidenti; in tale ipotesi, infatti, la  $g_2^1$  segata dalle rette per uno dei punti doppi avrebbe tre punti uniti <sup>(5)</sup>; d'altro canto è ovvio che, dette C e C' le origini — coincidenti — dei rami lineari uscenti dal terzo punto doppio, la coppia CC' è comune alle due involuzioni di cui sopra: onde si ha:  $(AA'CC') = (BB'CC') = -1$ ; ma allora C e C' sono i punti uniti della involuzione determinata dalle coppie AA', BB'; e poichè tale involuzione è evidentemente quella segata dalle rette per il 3° punto doppio, si conclude che anche esso è un biflecnode.

**Geometria.** — *Alcune osservazioni sulle varietà subordinate di una varietà a connessione affine asimmetrica* <sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di A. COSSU, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

1. ALCUNE NOZIONI E NOTAZIONI FONDAMENTALI. — Siano le  $x^\lambda$  ( $\lambda, \mu, \nu, \omega, \rho, \sigma, \tau = 1, 2, \dots, n$ ) un sistema di coordinate curvilinee in una varietà a connessione affine  $A_n$  <sup>(1)</sup> di parametri  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ , e sia  $X_m$  una varietà subordinata  $m$ -dimensionale ( $m < n$ ), rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$x^\lambda = x^\lambda(y^1, y^2, \dots, y^m),$$

(4) Segue dalle formule di PLÜCKER che la nostra  $\Gamma^4$  è di classe 7; e poichè 6 delle tangenti uscenti dal biflecnode sono assorbite dalle tangenti principali, vi è effettivamente una sola retta tangente altrove a  $\Gamma^4$ .

(5) Si può dire di più: *se una  $C^4$  razionale ha un biflecnode, gli altri due punti doppi sono necessariamente a tangenti distinte.*

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1947.

(1) Si indica con  $X_n$  una varietà  $n$ -dimensionale, con  $A_n$  una  $X_n$  a connessione affine, con  $E_n$  uno spazio affine.

essendo le  $y^a$  ( $a, b, c, d = 1, 2, \dots, m$ ) un sistema di coordinate curvilinee in  $X_m$ .

Associamo ad ogni punto della  $X_m$  un  $E_p$  ( $p = n - m$ ) *pseudonormale*<sup>(2)</sup> alla  $X_m$ , la cui totalità darà luogo alla varietà anolonomica  $X_m^p$  delle  $p$ -direzioni pseudonormali.

Assegniamo inoltre  $p$  campi di vettori pseudonormali  $C^\lambda(i, j, b, k = 1, 2, \dots, p)$  che assumiamo come vettori fondamentali di un riferimento in  $X_m^p$ .

Siano infine  $e^\lambda_\mu, e^\lambda_a; e'^a_b, e''^i_j; e''^i_j, e''^i_j$  i vettori fondamentali controvarianti e covarianti relativi ai sistemi coordinati fissati in  $A_n, X_m, X_m^p$ .

Posto

$$(1) \quad B^\lambda_a = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}, \text{ da cui } B^\lambda_a = e'^b_a B^\lambda_b(i),$$

e posto

$$C^\lambda_i = e''^j_i C^\lambda_j,$$

ricordando che l' $E_p$  pseudonormale in un punto alla  $X_m$  non ha direzioni a comune con l' $E_m$  ivi tangente alla stessa  $X_m$ , si ha

$$(2) \quad \begin{vmatrix} B^1_1 B^2_1 \dots B^n_1 \\ \dots \dots \dots \\ B^1_m B^2_m \dots B^n_m \\ C^1_1 C^2_1 \dots C^n_1 \\ \dots \dots \dots \\ C^1_p C^2_p \dots C^n_p \end{vmatrix} \neq 0.$$

Indicati allora con  $B^\lambda_a, C^\lambda_i$  i tensori definiti dai complementi algebrici nel determinante (2) dei termini  $B^\lambda_a, C^\lambda_i$ , si ha evidentemente

$$(3) \quad \begin{aligned} B^\lambda_a B^\lambda_b &= \delta^a_b & B^\lambda_a C^\lambda_i &= 0 \\ C^\lambda_i B^\lambda_b &= 0 & C^\lambda_i C^\lambda_j &= \delta^i_j, \end{aligned}$$

da cui, posto  $B^\lambda_\mu = B^\lambda_a B^a_\mu$  e  $C^\lambda_\mu = C^\lambda_i C^i_\mu$ , si ottiene  $B^\lambda_\mu + C^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\mu$ .

Si deduce quindi che la  $n$ -pla di vettori covarianti  $B_\lambda = e'^a_b B^\lambda_a$ ,  $C_\lambda = e''^i_j C^\lambda_i$  è indipendente e che la loro giacitura è individuata per le (3) dal contenere le direzioni dei vettori  $B^\lambda, C^\lambda$ , escluse rispettivamente quelle di  $B^\lambda$  e  $C^\lambda$ .

(2) Per ciò che riguarda i fondamenti e le notazioni sulla teoria delle varietà subordinate in  $A_n$  a connessione affine si veda: E. BORTOLOTTI, *Sulle varietà subordinate*. «Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», vol. LXIV, fasc. VI-X, 1931.

(3) Si noti che il sistema dei vettori  $B^\lambda_a$  rappresentano in  $A_n$  gli  $m$  vettori controvarianti fondamentali  $e'^b_a$  di  $X_m$ .

Premesso ciò, la connessione affine  $\nabla$  della  $A_n$  subordina, secondo E. Bortolotti<sup>(4)</sup>, sulla  $X_m$  e sulla  $X_m^p$  due connessioni affini, rispettivamente di parametri

$$(4) \quad \Gamma_{ab}^{'c} = \left( \frac{\partial B_a^\lambda}{\partial y^b} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda B_a^\mu B_b^\nu \right) B_\lambda^c = D_b B_a^\lambda \cdot B_\lambda^c e_a^d$$

$$(5) \quad \Gamma_{ja}^{'i} = \left( \frac{\partial C_j^\lambda}{\partial y^a} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda C_j^\mu B_a^\nu \right) C_\lambda^i = D_a C_j^\lambda \cdot C_\lambda^i e_j^h (5).$$

In tal modo la  $X_m$  e la  $X_m^p$  divengono due varietà a connessione affine  $A_m$  e  $A_m^p$  i cui corrispondenti simboli di derivazione covariante denoteremo con  $\nabla'$  e  $\nabla''$ .

Indicando con  $\Omega_{ab}^{\cdot\cdot\lambda}$ ,  $\Phi_{ab}^{\cdot\cdot\lambda}$  rispettivamente il primo ed il secondo tensore di curvatura euleriana di  $A_m$  in  $A_n$ , con  $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ ,  $S_{ab}^{\cdot\cdot c}$  i tensori di torsione delle connessioni  $\nabla$ ,  $\nabla'$ , e con  $R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ ,  $R_{abc}^{\cdot\cdot d}$ ,  $R_{abi}^{\cdot\cdot j}$  i tensori di curvatura riemanniana delle connessioni  $\nabla$ ,  $\nabla'$ ,  $\nabla''$ , sussistono le seguenti relazioni fondamentali

$$(6) \quad S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} B_a^\lambda B_b^\mu = S_{ab}^{\cdot\cdot c} B_c^\nu - \Omega_{[ab]}^{\cdot\cdot i} C_i^\nu,$$

$$(7) \quad D_a B_b^\lambda = \Omega_{ab}^{\cdot\cdot i} C_i^\lambda,$$

$$(8) \quad D_a C_i^\lambda = \Phi_{ai}^{\cdot\cdot b} B_b^\lambda (6),$$

$$(9) \quad R_{abc}^{\cdot\cdot d} = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} B_a^\lambda B_b^\omega B_c^\mu B_\nu^d + \Omega_{bc}^{\cdot\cdot i} \Phi_{ai}^{\cdot\cdot d} - \Omega_{ac}^{\cdot\cdot i} \Phi_{bi}^{\cdot\cdot d},$$

$$(10) \quad 2 D_{[a} \Omega_{b]}^{\cdot\cdot j} = - R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} B_a^\lambda B_b^\omega B_c^\mu C_\nu^j + 2 S_{ab}^{\cdot\cdot d} \Omega_{dc}^{\cdot\cdot j};$$

$$(11) \quad 2 D_{[a} \Phi_{b]}^{\cdot\cdot d} = - R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} B_a^\lambda B_b^\omega C_i^\mu B_\nu^d + 2 S_{ab}^{\cdot\cdot c} \Phi_{ci}^{\cdot\cdot d};$$

$$(12) \quad R_{abi}^{\cdot\cdot j} = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} B_a^\lambda B_b^\omega C_i^\mu B_\nu^j + \Omega_{ac}^{\cdot\cdot j} \Phi_{bi}^{\cdot\cdot c} - \Omega_{bc}^{\cdot\cdot j} \Phi_{ai}^{\cdot\cdot c}.$$

Le (6), (9), (10), (11), (12) sono le condizioni di integrabilità del sistema formato dalle (1), (7), (8) nelle funzioni incognite  $x^\lambda$ ,  $B_a^\lambda$ ,  $C_i^\lambda$ .

## 2. Dimostriamo che (7):

(4) Cfr. op. cit. nota (2). Per determinare la connessione affine sulla  $X_m$  ( $X_m^p$ ) basta determinare la legge di trasporto infinitesimale per equipollenza dei vettori controvarianti di  $X_m$  ( $X_m^p$ ) in modo tale che i loro differenziali assoluti, calcolati in  $A_n$ , si mantengano costantemente pseudonormali (tangenziali) alla  $X_m$ .

(5)  $D$  è il simbolo di derivazione covariante secondo R. LAGRANGE, che opera sui tensori a una o più serie di indici ( $\lambda\mu\nu\ldots, abc\ldots, hki\ldots$ ) mediante i parametri che compaiono a ciascuna serie ( $\nabla$ ,  $\nabla'$ ,  $\nabla''$ ) ed in modo dipendente dall'indice di cui è affetto.

(6) Ricordando che è  $\Omega_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} = D_a B_b^\lambda = \frac{\partial B_b^\lambda}{\partial y^a} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda B_b^\mu B_a^\nu - \Gamma_{ba}^{'c} B_c^\lambda$ ,  $\Phi_{ai}^{\cdot\cdot\lambda} = D_a C_i^\lambda = \frac{\partial C_i^\lambda}{\partial y^a} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda C_i^\nu B_a^\mu - \Gamma_{ia}^{'j} C_j^\lambda$ , che le condizioni di subordinazione di due arbitrarie connessioni  $\nabla'$ ,  $\nabla''$  di  $X_m$  e  $X_m^p$  alla connessione della varietà ambiente son date da  $\Omega_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} B_\lambda^c = 0$ ,  $\Phi_{ai}^{\cdot\cdot\lambda} C_\lambda^j = 0$  e introducendo i tensori ridotti di curvatura euleriana  $\Omega_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} = \Omega_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} C_\lambda^i$ ,  $\Phi_{ai}^{\cdot\cdot b} = \Phi_{ai}^{\cdot\cdot\lambda} B_\lambda^b$  si ottengono le (6), (7) e (8).

(7) Le proprietà che si osservano in questo numero e nei seguenti si intenderanno valide per una generica scelta degli  $E_p$  pseudonormali, in caso contrario si indicherà di volta in volta la particolare scelta effettuata.

*Le connessioni subordinate su una  $A_m$  dalle connessioni coniugata e simmetrica associata ad una data connessione affine asimmetrica dell' $A_n$  ambiente coincidono con le connessioni coniugata e simmetrica associata alla connessione subordinata sull' $A_m$  dalla stessa connessione affine della varietà ambiente* <sup>(8)</sup>.

Indicando infatti con  $\Gamma_{ab}^{*c}$ ,  $B_{ab}^c$  i parametri delle connessioni indotte sulla  $A_m$  dalle connessioni  $\nabla^*$ ,  $\nabla^{(b)}$  coniugata e simmetrica associata alla connessione  $\nabla$  di  $A_n$ , si ha evidentemente per le (4)

$$(13) \quad \Gamma_{ab}^{*c} = \left( \frac{\partial B_a^\lambda}{\partial y^b} + \Gamma_{\nu\mu}^{*\lambda} B_a^\nu B_b^\mu \right) B_\lambda^c = \left( \frac{\partial B_b^\lambda}{\partial y^a} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda B_b^\mu B_a^\nu \right) B_\lambda^c = \Gamma_{ba}^{*c}$$

$$(14) \quad B_{ab}^c = \frac{B_\lambda^c}{2} \left[ \left( \frac{\partial B_a^\lambda}{\partial y^b} + \Gamma_{\nu\mu}^{*\lambda} B_a^\nu B_b^\mu \right) + \left( \frac{\partial B_b^\lambda}{\partial y^a} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda B_b^\mu B_a^\nu \right) \right] = \Gamma_{(ab)}^c.$$

Analogamente, indicando rispettivamente con  $\Omega_{ab}^{*..i}$ ,  $\Omega_{ab}^{(b)..i}$  i primi tensori ridotti di curvatura euleriana relativi alle connessioni  $\nabla^*$ ,  $\nabla^{(b)}$  si ha

$$\Omega_{ab}^{*..i} = \Omega_{ba}^{*..i}, \quad \Omega_{ab}^{(b)..i} = \Omega_{[ab]}^{(b)..i}$$

da cui

$$(15) \quad \Omega_{ab}^{*..i} - \Omega_{ab}^{(b)..i} = \Omega_{[ab]}^{*..i} = S_{\lambda\mu}^{\nu} B_b^\lambda B_a^\mu C_\nu^i \quad \text{e} \quad \Omega_{ab}^{*..i} - \Omega_{ab}^{(b)..i} = 2 \Omega_{[ab]}^{*..i}.$$

Considerati quindi due vettori controvarianti  $\xi^\lambda$ ,  $\eta^\mu$  di  $A_m$ , uscenti da uno stesso punto, si ha, essendo  $\xi^\lambda = \xi'^a B_a^\lambda$ ;  $\eta^\mu = \eta'^b B_b^\mu$ ,

$$(\Omega_{ab}^{*..i} - \Omega_{ab}^{(b)..i}) \xi'^a \eta'^b = S_{\lambda\mu}^{\nu} \xi^\lambda \eta^\mu C_\nu^i;$$

dà cui segue che il divario fra i due primi tensori ridotti di curvatura euleriana delle due connessioni  $\nabla'$  e  $\nabla^{(b)}$ , relativi a due vettori controvarianti distinti di  $A_m$ , rappresenta la componente pseudonormale del vettore di torsione della  $A_n$ , relativo agli stessi vettori controvarianti.

L'uguaglianza

$$(16) \quad \Omega_{ab}^{*..i} = \Omega_{ab}^{(b)..i} = \Omega_{ab}^{*..i(9)}$$

esprime quindi che il vettore di torsione della  $A_n$ , relativo ad una qualunque coppia di vettori controvarianti distinti di  $A_m$ , appartiene all' $E_m$  tangente nel punto ad essi comune alla stessa  $A_m$ . Non solo, ma essendo

$$(17) \quad S_{ab}^{*..c} B_c^\nu = S_{\lambda\mu}^{\nu} B_a^\lambda B_b^\mu B_\tau^\nu = S_{\lambda\mu}^{\nu} B_a^\lambda B_b^\mu + \Omega_{[ab]}^{*..c} C_c^\nu, \quad \text{per} \quad \Omega_{[ab]}^{*..i} = 0$$

si ha

$$(18) \quad S_{ab}^{*..c} B_c^\nu = S_{\lambda\mu}^{\nu} B_a^\lambda B_b^\mu.$$

(8) Per ciò che riguarda le connessioni coniugata e simmetrica associata ad una connessione affine si veda: E. BORTOLOTTI, *Sulla Geometria delle varietà a connessione affine*. «An. di Mat.», ser. IV, to. VIII, 1930-31.

(9) È evidente che l'uguaglianza (16) comporta la simmetria di  $\Omega_{ab}^{*..i}$  rispetto ai suoi indici di covarianza, che si abbia sempre tale simmetria quando la connessione della varietà ambiente è simmetrica.



Viceversa dalla (18) per la (17) si ha là  $\Omega_{[ab]}^{\dots i} = 0$  e quindi:

*In ogni punto di una  $A_m$ , a torsione non nulla<sup>(10)</sup>, per la quale sono uguali i primi tensori ridotti di curvatura euleriana, relativi alle connessioni  $\nabla'$ ,  $\nabla'^*$ ,  $\nabla'^b$ , la torsione della varietà, ambiente relativa ad una faccetta piana tangenziale alla  $A_m$ <sup>(11)</sup>, eguaglia la torsione della connessione subordinata sulla  $A_m$ , relativa alla stessa faccetta piana.*

*Osservazione.* Per ogni  $A_3$  in  $A_4$  il divario  $\Omega_{[ab]}$  fra i primi tensori ridotti di curvatura euleriana delle connessioni  $\nabla'$  e  $\nabla'^{(b)}$  è un bivettore covariante. Di conseguenza la torsione relativa ad una faccetta piana tangenziale alla  $A_3$ , appartenente al fascio che ha per asse la direzione associata a  $\Omega_{[ab]}$  uscente dal punto di tangenza, è uguale alla torsione della varietà ambiente relativa alla stessa faccetta.

Più in generale, per ogni  $A_{n-1}$  di  $A_n$  in cui  $\Omega_{[ab]}$  è un bivettore covariante, la torsione, relativa ad una faccetta piana tangenziale alla  $A_{n-1}$ , ed avente a comune una direzione con l' $(n-3)$ -direzione associata ad  $\Omega_{[ab]}$ , è uguale alla torsione della stessa  $A_n$  relativa alla stessa faccetta.

3. Analogamente a ciò che si è fatto per la  $A_m$ , indicando con  $\Gamma_{i a}^{\prime * j}$ ,  $B_{j a}^{\prime j}$  i parametri delle connessioni subordinate sulla  $A_m^p$  dalle connessioni  $\nabla^*$ ,  $\nabla^b$  della varietà ambiente, si ha

$$(19) \quad B_{j a}^{\prime \prime i} = \frac{\Gamma_{j a}^{\prime \prime i} + \Gamma_{j a}^{\prime \prime * i}}{2}.$$

Tale relazione mostra che anche la connessione  $\nabla^{(b)}$  dà luogo sulla  $A_m^p$  ad una connessione per la quale si conserva la proprietà geometrica<sup>(12)</sup>, che definisce la connessione simmetrica associata ad una data connessione affine asimmetrica<sup>(13)</sup>. Perciò la connessione di parametri (19) è la connessione simmetrica associata  $\nabla''^{(b)}$  alla  $\nabla''$ . In tal modo si estende anche alla  $A_m^p$  il primo risultato del n. 2 relativo ad una  $A_m$ .

Dalle (5) si ha la seguente relazione tra i parametri delle connessioni  $\nabla'$ ,  $\nabla''^{(b)}$  che ci sarà utile più innanzi

$$(20) \quad \Gamma_{j a}^{\prime \prime i} - B_{j a}^{\prime \prime i} = S_{\mu \nu}^{\cdot \lambda} C_j^{\mu} C_a^{\nu} B_a^{\lambda} \quad (14).$$

(10) Cfr. n. 5.

(11) Chiameremo torsione di una faccetta piana tangenziale alla  $A_m$  la torsione relativa ad una coppia qualunque di vettori controvarianti distinti, appartenenti alla giacitura della faccetta piana, ed uscenti dal punto di tangenza di questa alla  $A_m$ . È evidente che tale torsione è definita a meno d'un fattore variabile al variare della coppia di vettori che si considera sulla faccetta.

(12) Cfr. op. cit. nota (6), p. 62.

(13) Ciò vale naturalmente allorchando si definisca come connessione coniugata alla  $\nabla''$  quella subordinata sulla  $A_m$  dalla  $\nabla^*$  e che denoteremo con  $\nabla''^*$ .

(14) Si noti che il trasporto infinitesimale per  $\nabla''$ -equipollenza di un vettore pseudonormale lungo una direzione tangenziale alla  $A_m$  coincide con il trasporto per  $\nabla''^{(b)}$ -equipollenza, se la direzione di torsione in  $A_n$ , relativa alla faccetta piana individuata dalla direzione di trasporto e dal vettore pseudonormale, è tangenziale alla  $A_m$ .

Denotando inoltre con  $\Phi_{ai}^{(b)\dots b}$ ,  $\Phi_{ai}^{*\dots b}$  i secondi tensori ridotti di curvatura euleriana della  $A_m$  in  $A_n$ , relativi alle connessioni  $\nabla^{(b)}$ ,  $\nabla^*$ , si ha evidentemente che:

$$(21) \quad \begin{aligned} \Phi_{ai}^{\dots b} - \Phi_{ai}^{(b)\dots b} &= S_{\mu\nu}^{\dots\lambda} C_i^\mu B_a^\nu B_\lambda^b \\ \Phi_{ai}^{\dots b} - \Phi_{ai}^{*\dots b} &= 2 S_{\mu\nu}^{\dots\lambda} C_i^\mu B_a^\nu B_\lambda^b. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che il divario fra i secondi tensori ridotti di curvatura euleriana di  $\nabla'$  e  $\nabla'^{(b)}$  (o  $\nabla'$  e  $\nabla'^*$ ) relativi a due vettori controvarianti, rispettivamente pseudonormale e tangenziale alla  $A_m$ , rappresenta la componente tangenziale del vettore di torsione di  $A_n$  relativo agli stessi vettori.

Di conseguenza in ogni punto della  $A_m$  per cui è valida la

$$(22) \quad \Phi_{ai}^{\dots b} = \Phi_{ai}^{(b)\dots b} = \Phi_{ai}^{*\dots b}$$

la torsione, relativa ad una qualunque faccetta piana non tangenziale alla  $A_m$ , ma avente in quel punto una direzione a comune con l' $E_m$  ivi tangente, è pseudonormale alla stessa  $A_m$ , e viceversa.

Osservazione. - È da notare che se è nullo il divario dei due tensori ridotti di curvatura euleriana  $\Phi_{ai}^{\dots b}$ ,  $\Phi_{ai}^{(b)\dots b}$ , relativamente a due direzioni una tangenziale e l'altra pseudonormale, e se coincidono i trasporti infinitesimali per  $\nabla''$  e  $\nabla''^{(b)}$  equipollenza della direzione pseudonormale lungo quella tangenziale, la torsione della  $A_n$ , relativa alla faccetta piana individuata dalle due direzioni, è nulla. Ciò si deduce facilmente dalle (20), (21).

4. Prendiamo in esame il caso di una  $A_m$  in  $A_n$  a connessione affine emisimmetrica <sup>(15)</sup>. Si ha allora per una qualunque  $A_m$  subordinata  $\Omega_{[ab]}' = 0$ ; ciò è evidente se si ricorda la proprietà caratteristica delle varietà a connessione affine emisimmetrica <sup>(16)</sup>. In tal modo è valida per una qualunque  $A_m$  di  $A_n$  a connessione emisimmetrica l'ultima proposizione enunciata al n. 2.

Essendo inoltre

$$(23) \quad S_{ab}^{\dots c} = -\frac{I}{n-1} (\delta_a^\nu \Phi_\nu^c - \delta_b^\nu \Phi_\nu^c) B_a^\lambda B_b^\mu B_\nu^c = -\frac{I}{m-1} (\delta_a^c \Phi_b' - \delta_b^c \Phi_a'),$$

ove con  $\Phi_a' = \frac{m-1}{n-1} \Phi_\mu B_a^\mu$  si è indicato il vettore di Einstein relativo alla  $A_m$ , si ha che in generale:

*Le varietà subordinate in una  $A_n$  a connessione affine emisimmetrica risultano esse stesse a connessione affine emisimmetrica* <sup>(17)</sup>.

(15) È noto che in tal caso il tensore di torsione assume la forma

$$S_{\lambda\mu}^{\dots\nu} = -\frac{I}{n-1} (\delta_\lambda^\nu \Phi_\mu - \delta_\mu^\nu \Phi_\lambda) \quad \text{ove} \quad \Phi_\lambda = S_{\lambda\nu}^{\dots\nu} \quad \text{è il vettore di Einstein.}$$

(16) Cfr. op. cit. nota (8), p. 81.

(17) L'unico caso d'eccezione è quello trattato al n. 5.

Di conseguenza è sempre nulla, in una generica  $A_m$ , la torsione relativa ad una faccetta piana ad essa tangenziale ed appartenente alla  $(m-1)$ -direzione del vettore di Einstein  $\Phi'_a$ ; è evidente che tale  $(m-1)$ -direzione è l'intersezione della  $(n-1)$ -direzione del vettore di Einstein  $\Phi_v$  con l' $E_m$  tangente alla  $A_m$ . Inoltre la direzione di torsione, relativa ad una qualunque altra faccetta piana della  $A_m$ , appartiene sempre alla  $(m-1)$ -direzione suddetta<sup>(18)</sup>.

Si deduce anche dalle (20) che il trasporto infinitesimale per  $\nabla''$ -equipollenza (o  $\nabla''^*$ -equipollenza) di un vettore pseudonormale, lungo ogni direzione appartenente alla  $(m-1)$ -direzione intersezione dell' $E_m$  tangente alla  $A_m$  con la  $(n-1)$ -direzione del vettore di Einstein della varietà ambiente, coincide con il trasporto per  $\nabla''^h$ -equipollenza lungo la stessa direzione<sup>(19)</sup>.

5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione subordinata su una  $A_m$  di  $A_n$  a connessione affine emisimmetrica sia simmetrica è che l' $E_m$  tangente alla  $A_m$  in ogni suo punto appartenga alla  $(n-1)$ -direzione associata al vettore di Einstein della varietà ambiente.*

Dalla (23) segue infatti che  $S'^{c}_{ab} = 0$  se

$$(24) \quad \Phi_\mu B^{\mu}_a = 0.$$

Viceversa se  $S'^{c}_{ab} = 0$  è necessariamente  $\Phi'_a = 0$ , da cui segue la (24).

È notevole il fatto che in tal caso la connessione  $\nabla'$  coincide con quella indotta sulla  $A_m$  dalla connessione simmetrica associata a quella della varietà ambiente.

Analogamente si dimostra che le uniche varietà subordinate in una  $A_n$  a connessione affine emisimmetrica, le cui varietà  $A^p_m$  sono a connessione affine simmetrica, sono quelle tangenti in ogni loro punto alla  $(n-1)$ -direzione del vettore di Einstein della varietà ambiente.

*Osservazione.* - Introduciamo in  $A_m$  le connessioni  $\nabla^{(p)}$ ,  $\nabla''^{(p)}$ , intrinsecamente legate a  $\nabla'$ ,  $\nabla''$  ed invarianti per trasformazioni che conservano il parallelismo ( $T_p$ -invarianti), di parametri

$$(25) \quad \begin{cases} P'^c_{ab} = \Gamma'^c_{ab} + \frac{2}{m-1} \delta^c_a \Phi'_b \\ P''^i_{ja} = \Gamma''^i_{ja} + \frac{2}{m-2} \delta^i_j \Phi'_a. \end{cases}$$

Essendo  $H'_a = H^{\nu}_{\lambda\mu} B^{\lambda}_a B^{\mu}_v = 0$ , ove con  $H^{\nu}_{\lambda\mu}$  si è indicato il tensore di torsione della connessione  $T_p$ -invariante  $\nabla^{(p)}$  legata a quella della  $A_n$ , si vede che  $\nabla^{(p)}$ ,  $\nabla''^{(p)}$  sono, nel caso di  $A_n$  a connessione affine emisimmetrica, effettivamente le connessioni subordinate su  $A_m$  e  $A^p_m$  dalla  $\nabla^{(p)}$ <sup>(20)</sup>.

(18) Si ha infatti in una varietà a connessione affine emisimmetrica  $S^{\nu\lambda}_{\lambda\mu} \xi^{\lambda} \eta^{\mu} \Phi_v = 0$  essendo  $\xi^{\lambda}$ ,  $\eta^{\mu}$  due vettori controvarianti distinti uscenti da uno stesso punto.

(19) Infatti per le (20) nel caso in esame si ha  $\Gamma'^i_{ja} - B^i_{ja} = -\frac{1}{n-1} \delta^i_j \Phi_v B^v_a$  da cui segue l'asserto.

(20) Cfr. op. cit., nota (2), p. 18.

Premesso ciò, le varietà di  $A_n$  a connessione affine emisimmetrica, tangenti alla  $(n-1)$ -direzione del vettore di Einstein  $\Phi_v$ , si possono anche caratterizzare come le uniche varietà per le quali le connessioni  $\nabla^{(p)}$ ,  $\nabla''^{(p)}$  coincidono, rispettivamente con le  $\nabla^{(b)}$ ,  $\nabla''^{(b)}$  <sup>(21)</sup>.

6. Riprendiamo in esame il caso di connessioni asimmetriche qualsiasi. Dalle (20) si ha in generale

$$(26) \quad \Gamma_{ia}^i - B_{ia}^i = \Phi_a' - \Phi_\mu B_a^\mu$$

se quindi  $\Phi_\mu B_a^\mu = 0$  è  $\Gamma_{ia}^i - B_{ia}^i = \Phi_a'$ . Indicando allora con  $V$  il volume di una piramide definita da  $p$  ( $p = n - m$ ) vettori pseudonormali uscenti da un punto della  $A_m$ , si ha che

$$(\nabla_a'' - \nabla_a''^{(b)}) V = V \Phi_a' \quad \text{se} \quad \Phi_\mu B_a^\mu = 0.$$

Segue quindi che se, per una generica scelta degli  $E_p$  pseudonormali in una  $A_m$  di  $A_n$  a connessione affine asimmetrica, coincidono i trasporti infinitesimali per  $\nabla''$  e  $\nabla''^{(b)}$ -equipollenza del volume  $V$ , lungo ogni direzione tangenziale appartenente alla  $(m-1)$ -direzione del vettore di Einstein  $\Phi_a'$ , l' $A_m$  è tangente in ogni suo punto alla  $(n-1)$ -direzione del vettore di Einstein della varietà ambiente <sup>(22)</sup>.

Nel caso particolare di una ipersuperficie la precedente proposizione verrà enunciata, sotto le stesse ipotesi, come segue:

*Se in una ipersuperficie di  $A_n$ , per una generica scelta delle direzioni pseudonormali, coincidono i trasporti per  $\nabla''$  e  $\nabla''^{(b)}$ -equipollenza di un qualunque vettore pseudonormale lungo ogni direzione appartenente alla  $(n-2)$ -direzione del vettore di Einstein  $\Phi_a'$ , l'ipersuperficie è tangente in ogni suo punto alla  $(n-1)$ -direzione del vettore di Einstein dell' $A_n$ .*

Dimostriamo infine che:

*Ogni ipersuperficie di  $A_n$ , per la quale il determinante  $|\Omega_{[ab]}| \neq 0$  <sup>(23)</sup>, si può sempre ricondurre ad una ipersuperficie a connessione affine  $T_p$ -invariante <sup>(24)</sup>, sulla cui varietà  $A_{n-1}$  la connessione subordinata coincide con quella simmetrica associata, allora e solo che essa è tangente in ogni suo punto alla giacitura iperpiana del vettore di Einstein della varietà ambiente.*

(21) Si ricordi che una connessione asimmetrica può rendersi simmetrica con conservazione del parallelismo allora e solo che essa è emisimmetrica. Si veda a tal proposito J. M. THOMAS, *Asymmetric displacement of a vector*. «Transaction of the Amer. Math. Society», 1926, pp. 658-670.

(22) Si suppone ovviamente che la  $(m-1)$ -direzione associata a  $\Phi_v'$  non coincide con l' $(m-1)$ -direzione intersezione della giacitura iperpiana di  $\Phi_v$  con l' $E_m$  tangente alla  $A_m$ . Nel caso in cui è  $\Phi_a' \neq \Phi_\mu B_a^\mu$ , supposto  $\Phi_\mu B_a^\mu = 0$ , i trasporti del volume  $V$  per  $\nabla''$  e  $\nabla''^{(b)}$ -equipollenza coincidono lungo ogni direzione tangenziale alla  $A_m$ ; se infine, essendo  $\Phi_\mu B_a^\mu = \Phi_a'$ , è  $\Phi_\mu B_a^\mu = 0$  la  $A_m$  è a connessione affine  $T_p$ -invariante.

(23) Con ciò intanto si esclude che sia  $\Omega_{[ab]} = 0$ , il che (n. 2) ha un semplice significato geometrico, ed inoltre che l' $A_n$  ambiente abbia dimensione spari.

(24) Si noti che, contrariamente a ciò che accade generalmente, tale connessione è quella subordinata sulla  $A_{n-1}$  dalla connessione  $\nabla^{(p)}$  intrinsecamente legata a quella dell'ambiente. Cfr. nota (20).



Si ha infatti per le (20)

$$(27) \quad \Gamma_a'' - B_a'' = S_{\lambda\mu}^{\nu} C_{\nu}^{\lambda} B_a^{\mu} = \Phi_a' - \Phi_{\mu} B_a^{\mu}.$$

Se quindi effettuiamo un cambiamento delle direzioni pseudonormali con una trasformazione del tipo

$$(28) \quad \bar{C}^{\lambda} = C^{\lambda} + S^c B_c^{\lambda}$$

le (27) si muteranno nelle

$$\bar{\Gamma}_a'' - \bar{B}_a'' = S_{\lambda\mu}^{\nu} \bar{C}_{\nu}^{\lambda} \bar{B}_a^{\mu} = S_{\lambda\mu}^{\nu} C_{\nu}^{\lambda} (C^{\lambda} + S^c B_c^{\lambda}) B_a^{\mu} = \Gamma_a'' - B_a'' - \Omega_{[ca]} S^c.$$

Se si vuole che  $\Gamma_a = \bar{B}_a$ , basta risolvere il sistema nelle  $n-1$  incognite  $S^c$

$$\Omega_{[ca]} S^c = \Gamma_a - B_a,$$

il quale sotto condizione che  $|\Omega_{[ac]}| \neq 0$  sarà determinato.

In tal caso  $\Phi_{\mu} B_a^{\mu} = \Phi_a'$ , e se  $\Phi_{\mu} B_a^{\mu} = 0$  anche  $\Phi_a' = 0$ , e quindi  $P_{ab}' = \Gamma_{ab}'$ . Viceversa se, dopo aver effettuato la trasformazione delle direzioni pseudonormali in modo tale che risulti  $\Gamma_a = B_a$ , è  $\Phi_a' = 0$ , segue ovviamente  $\Phi_{\mu} B_a^{\mu} = 0$ .

Allo stesso risultato si può arrivare, sotto le medesime ipotesi, osservando che, con una trasformazione del tipo (28) si può sempre ridursi al caso in cui è  $\Phi_a' = 0$  <sup>(25)</sup>; di conseguenza se  $\Phi_{\mu} B_a^{\mu} = 0$  è  $\Gamma_a = B_a$ , e viceversa.

**Geometria.** — *L'intorno del 5° ordine di un punto di una superficie nello spazio proiettivo.* Nota <sup>(\*)</sup> di A. ROLLERO, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

1. Lo studio dell'intorno del 4° ordine di un punto regolare P di una superficie F dello spazio ordinario proiettivo è sostanzialmente esaurito una volta assegnato in modo intrinseco un riferimento proiettivo e il significato geometrico dei 2 invarianti: il che è stato fatto ormai in più modi.

Per lo studio dell'intorno del 5° ordine occorre calcolare i termini del 5° ordine in uno degli sviluppi canonici noti partendo dalle equazioni fondamentali della superficie che qui assumo nella forma canonica del Wilczynski:

$$(1) \quad x_{uu} = \beta x_v + p x, \quad x_{vv} = \gamma x_u + q x \quad (\beta\gamma \neq 0)$$

con le condizioni di integrabilità:

$$(2) \quad \begin{cases} p_{vv} + 2\beta_v q + \beta q_v = q_{uu} + 2\gamma_u p + \gamma p_u \\ \beta\gamma\psi = 2q_u + \gamma_{uu}, \quad \beta\gamma\varphi = 2p_v + \beta_{vv} \end{cases}$$

ove, come al solito,  $\varphi = (\log \beta\gamma^2)_u$ ,  $\psi = (\log \beta^2\gamma)_v$ .

(25) È notevole il fatto che, se  $|\Omega_{[ab]}| \neq 0$ , si può sempre fare in modo che su una  $A_{n-1}$  la connessione indotta sia  $T_p$ -invariante, indipendentemente dal fatto che essa sia o tangente alla  $(n-1)$ -direzione di  $\Phi_v$ .

(\*) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1947.

Come sviluppo canonico, da prolungare al 5° ordine, assumo quello da me dato recentemente <sup>(1)</sup>:

$$(3) \quad \chi = xy + x^3 + y^3 + Ux^3y + Vxy^3 + [5]$$

con

$$(4) \quad U = -\frac{3}{2} \beta^{-1} \gamma^{-1} \psi, \quad V = -\frac{3}{2} \beta^{-2} \gamma^{-1} \varphi.$$

Per abbreviare la scrittura, se  $A$  è una funzione dei coefficienti delle (1) e delle loro derivate, denotiamo con  $A^*$  la funzione ottenuta da  $A$  scambiando  $\beta$  con  $\gamma$ ,  $p$  con  $q$ , e nelle derivazioni  $u$  con  $v$ ; per esempio  $V = U^*$ . Indichiamo lo sviluppo ottenuto estendendo (3) con:

$$(5) \quad \chi = xy + x^3 + y^3 + Ux^3y + Vxy^3 + W_1x^5 + W_2x^4y + W_3x^3y^2 + \\ + W_3^*x^2y^3 + W_2^*xy^4 + W_1^*y^5 + [6].$$

Occorre e basta calcolare  $W_1, W_2, W_3$ .

2. Le coordinate  $X_i = x^{(i)}(u + \Delta u, v + \Delta v)$  di un punto di  $F$  prossimo ad  $(u, v)$  sono esprimibili nella forma:

$$X_i = \bar{X}_1 x_u^{(i)} + \bar{X}_2 x_v^{(i)} + \bar{X}_3 x_{uv}^{(i)} + \bar{X}_4 x^{(i)}$$

(ove le  $\bar{X}_i$  sono coordinate locali) e si ha, servendosi delle (1) e delle loro conseguenze differenziali, tenute anche presenti le ultime 2 delle (2):

$$\bar{X}_1 = \Delta u + A_1 \Delta v^2 + A_2 \Delta u^3 + A_3 \Delta u^2 \Delta v + A_4 \Delta u \Delta v^2 + A_5 \Delta v^3 + A_6 \Delta u^4 + \\ + A_7 \Delta u^3 \Delta v + A_8 \Delta u^2 \Delta v^2 + A_9 \Delta u \Delta v^3 + A_{10} \Delta v^4 + [5]$$

$$\bar{X}_2 = \Delta v + A_1^* \Delta u^2 + A_2^* \Delta v^3 + A_3^* \Delta u \Delta v^2 + A_4^* \Delta u^2 \Delta v + A_5^* \Delta u^3 + A_6^* \Delta v^4 + \\ + A_7^* \Delta u \Delta v^3 + A_8^* \Delta u^2 \Delta v^2 + A_9^* \Delta u^3 \Delta v + A_{10}^* \Delta u^4 + [5]$$

$$\bar{X}_3 = \Delta u \Delta v + n_1 \Delta u^3 + n_1^* \Delta v^3 + n_2 \Delta u^4 + n_3 \Delta u^3 \Delta v + n_4 \Delta u^2 \Delta v^2 + \\ + n_3^* \Delta u \Delta v^3 + n_2^* \Delta v^4 + n_5 \Delta u^5 + n_6 \Delta u^4 \Delta v + n_7 \Delta u^3 \Delta v^2 + \\ + n_7^* \Delta u^2 \Delta v^3 + n_6^* \Delta u \Delta v^4 + n_5^* \Delta v^5 + [6]$$

$$\bar{X}_4 = 1 + \frac{1}{2} p \Delta u^2 + \frac{1}{2} q \Delta v^2 + \frac{1}{6} p_u \Delta u^3 + \frac{1}{2} (p_v + \beta q) \Delta u^2 \Delta v + \\ + \frac{1}{2} (q_u + \gamma p) \Delta u \Delta v^2 + \frac{1}{6} q_v \Delta v^3 + [4]$$

con:

$$A_1 = \frac{1}{2} \gamma; \quad A_2 = \frac{1}{6} p; \quad A_3 = \frac{1}{2} \beta \gamma; \quad A_4 = \frac{1}{2} (q + \gamma u); \quad A_5 = \frac{1}{6} \gamma v;$$

$$A_6 = \frac{1}{24} (2p_u + \beta^2 \gamma); \quad A_7 = \frac{1}{6} (p_v + \beta q + \beta_u \gamma + \beta \gamma_u); \quad A_8 = \frac{1}{4} \gamma (\beta \psi + p);$$

$$A_9 = \frac{1}{6} (q_v + \gamma_{uv} + \beta \gamma^2); \quad A_{10} = \frac{1}{24} (\gamma_{vv} + 2\gamma q + \gamma \gamma_u);$$

(1) V. Ancora sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto.  
« Rend. Acc. Lincei », marzo 1947, n. 6.

e:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{1}{6} \beta \quad ; \quad n_2 = \frac{1}{12} \beta_u \quad ; \quad n_3 = \frac{1}{6} (p + \beta_v) \quad ; \quad n_4 = \frac{1}{4} \beta \gamma ; \\
 n_5 &= \frac{1}{120} (3 \beta_{uu} + 2 \beta p + \beta \beta_v) \quad ; \quad n_6 = \frac{1}{24} (2 p_u + \beta^2 \gamma + 2 \beta_{uv}) ; \\
 n_7 &= \frac{1}{12} (\beta \gamma \varphi + \beta q + \beta_u \gamma + \beta \gamma_u) .
 \end{aligned}$$

Si applichi la trasformazione di coordinate <sup>(2)</sup>:

$$\begin{cases}
 \sigma Y_1 = \lambda \bar{X}_1 & + \mu \bar{X}_2 \\
 \sigma Y_2 = & \lambda^* \bar{X}_2 + \mu^* \bar{X}_3 \\
 \sigma Y_3 = & + \lambda \lambda^* \bar{X}_3 \\
 \sigma Y_4 = v \bar{X}_1 + v^* \bar{X}_2 + v v^* \bar{X}_3 + \bar{X}_4
 \end{cases}$$

con:

$$\lambda = -\frac{1}{3} \beta^{\frac{2}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}} \quad , \quad \mu = \frac{1}{12} \beta^{\frac{2}{3}} \gamma^{-\frac{2}{3}} \gamma_v \quad , \quad v = -\frac{\beta_u}{4 \beta}$$

e si passi poi a coordinate non omogenee  $x = Y_1 : Y_4$  ,  $y = Y_2 : Y_4$  ,  $z = Y_3 : Y_4$ . Le espressioni così ottenute devono soddisfare alla (5) fino ai termini di 5° grado inclusi in  $\Delta u, \Delta v$ . L'identificazione dei coefficienti porge:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= 9 \beta^{-\frac{7}{3}} \gamma^{-\frac{2}{3}} \left[ \frac{1}{5} \left( \frac{\beta_{uu}}{4} - 2 \beta \beta_v + \beta p \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{\beta^2 \gamma_v}{\gamma} + \frac{1}{4} \frac{\beta_u^2}{\beta} \right) \right] ; \\
 W_2 &= 9 \left[ \frac{1}{4 \beta^2 \gamma} \left( \beta_{uv} - \frac{\beta_u \beta_v}{\beta} \right) - 1 \right] ; \\
 W_3 &= -9 \beta^{-\frac{5}{3}} \gamma^{-\frac{4}{3}} \left[ \beta \gamma_u + p_v + \beta q + \frac{1}{4} \left( \beta_u \gamma - \frac{\beta_v \gamma_v}{\gamma} - \frac{1}{4} \frac{\beta \gamma_v^2}{\gamma^2} \right) \right] .
 \end{aligned}$$

Dei 6 invarianti del 5° ordine soltanto  $W_2$  e  $W_3$  sono tali per *applicabilità proiettive* (oltre che per collineazioni), giacchè dipendono soltanto da  $\beta, \gamma$ ; gli altri sono invarianti per collineazioni.

(2) V. ancora il n. 6 della nota citata.

**Geometria.** — *Le ipersuperficie d'ordine  $n$  con un punto  $(n-2)$ -plo.* — II. *Singularità della ipersuperficie dedotte da quelle della varietà di diramazione.* Nota (\*) di G. VACCARO, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

1. OGGETTO DELLA RICERCA. — In una Nota precedente (1) ho studiato le singularità della  $V_{r-2}$  di diramazione di una  $V_{r-1}^n$  di  $S_r$  ( $r \geq 4$ ) con un punto  $O(n-2)$ -plo, quando si proietti da  $O$  sopra un  $S_{r-1}$  non passante per  $O$ . Inverto in questa Nota i risultati ottenuti risalendo dalle singularità di  $V_{r-2}$  a quella di  $V_{r-1}^n$ .

Se  $V_{r-2}$  è di diramazione per la  $V_{r-1}^n$ :

$$(I.1) \quad t^2 \varphi_{n-2} + 2t \dot{\varphi}_{n-1} + \varphi_n = 0$$

ove le  $\varphi$  sono forme in  $r$  variabili, la sua equazione nello  $S_{r-1}$ ,  $t=0$  è necessariamente del tipo (vedi I (1)):

$$(I.2) \quad \varphi_{n-1}^2 - \varphi_{n-2} \varphi_n = 0;$$

viceversa data questa in  $t=0$  e fissato ad arbitrio  $O$  non è individuata la  $V_{r-1}^n$  (potendosi mutare  $t$  aggiungendovi una forma di 1° grado nelle variabili rimanenti). Questa osservazione permette di identificare con un punto  $P_1$  di  $V_{r-2}$ , il punto  $P$  da cui esso proviene su  $V_{r-1}^n$  (semplificando così i calcoli: ciò si è fatto già nella Nota I, prendendo  $P_1 \equiv P$ ).

Al punto in esame  $P_1$  su  $V_{r-1}^n$  daremo le coordinate  $x_i=0$  ( $i=1, 2, \dots, r-1$ ),  $\chi=1$ ,  $t=0$  (e ad  $O$  le coordinate  $x_i=0$ ,  $\chi=0$ ,  $t=1$ ).

Per compiere l'indagine propostami basterà esaminare nei varî casi già distinti nella Nota I se la singularità in  $P$  di  $V_{r-1}^n$  è individuata da quella in  $P_1$  di  $V_{r-2}$ .

2. GENERALITÀ SULLA VARIETÀ DI DIRAMAZIONE. — Si è già osservato (I (1), ultimo enunciato) che le rette di  $V_{r-1}^n$  uscenti da  $O$  formano un cono  $V_{r-3}$  in generale d'ordine  $n(n-1)$  ( $n-2$ ). Indichiamo con  $G$  la sua sezione con lo  $S_{r-1}^*$  di  $V_{r-2}$  (gruppo di punti per  $r=4$ ). Per essa  $\varphi_{n-2} = \varphi_{n-1} = \varphi_n = 0$  (e  $t=0$ ) e può individuarsi come intersezione delle traccie su  $S_{r-1}^*$  rispettivamente del cono  $\Gamma_0$  delle tangenti  $(n-1)$ -punte in  $O$  a  $V_{r-1}^n$ , della varietà polare di  $O$  rispetto a  $V_{r-1}^n$ , e della  $V_{r-1}^n$  stessa. Indicherò, come nella Nota I, queste tre ipersuperficie in  $S_{r-1}^*$  con  $F'$ ,  $F''$ ,  $F'''$  e con  $F$  la  $V_{r-2}$  di diramazione.

Cominciamo col provare che: *i punti di  $G$  sono in generale doppi conici per  $F$ .*

(\*) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1947.

(1) Cfr. G. VACCARO, *Le ipersuperficie d'ordine  $n$  con un punto  $(n-2)$  plo.* Nota I: *Genesis delle singularità della varietà di diramazione.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei » in corso di pubblicazione. Questa Nota nel seguito sarà indicata con I.



Se  $P_1$ , con le coordinate dette, è su  $G$ , mancano in  $\varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n$  i termini di grado più alto in  $\chi$ ; cioè posto in generale:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \varphi_{n-2} \equiv \chi^{n-2} \theta_0 + \chi^{n-3} \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \equiv \chi^{n-1} \psi_0 + \chi^{n-2} \psi_1 + \dots + \psi_{n-1} \\ \varphi_n \equiv \chi^n \chi_0 + \chi^{n-1} \chi_1 + \dots + \chi_n \end{cases}$$

con le  $\theta, \psi, \chi$  forme dei gradi indicati dall'indice delle sole  $x_i$ , si ha:  $\theta_0 = \psi_0 = \chi_0 = 0$ .

Pertanto l'equazione di  $F$  è del tipo:

$$(2.2) \quad \chi^{2n-4} (\psi_1^2 - \theta_1 \chi_1) + \dots = 0$$

quindi  $P_1$  è in generale doppio con cono osculatore  $\psi_1^2 = \theta_1 \chi_1$  non spezzato.

Passiamo ad esaminare un punto  $P_1$  singolare per  $F$  non appartenente a  $G$ , oppure appartenente a  $G$  ma con singolarità diversa da quella ora trovata <sup>(2)</sup>.

3. IL PUNTO  $P_1$  NON APPARTIENE A  $G$ . — Il punto  $P_1(0, \dots, 0, 1, 0)$  appartenendo ad  $F$ , proviene da un punto  $P$  di  $V_{r-1}^n$  in cui la  $OP$  ( $x_i = 0$ ) risulta tangente. Fatto coincidere, come si può ( $n \cdot 1$ ),  $P$  con  $P_1$ , questa condizione dà  $\psi_0 = \chi_0 = 0$ ; e  $\theta_0 \neq 0$  poichè  $P_1$  non sta su  $G$ ; facciamo  $\theta_0 = 1$ , come si può.

L'equazione di  $F$ , nell'intorno di  $P_1$ , posto  $\chi = 1$ , è, riferendosi alle posizioni (2.1):

$$-\chi_1 + \psi_1^2 - \theta_1 \chi_1 - \chi_2 + \dots = 0.$$

Se  $P_1$  è doppio per  $F$  deve essere  $\chi_1 \equiv 0$ ; il cono  $\Gamma_{P_1}$  delle tangenti tripunte (che in generale non è spezzato e non manca) è  $\psi_1^2 = \chi_2$  (cfr. I (3.3)). Ma se  $\chi_1 \equiv 0$ , la  $V_{r-1}^n$ , nell'intorno di  $P$  si scrive (posto sempre  $\chi = 1$ ):

$$t^2 + 2t\psi_1 + \chi_2 + (t^2\theta_1 + 2t\psi_1 + \chi_3) + \dots = 0$$

pertanto il punto  $P$  è doppio per  $V_{r-1}^n$  e se non si presentano oltre circostanze particolari, esso è conico (col cono tangente I (3.1)).

Se si esamina, parallelamente a quanto si è fatto nella Nota I, che cosa accade quando  $\Gamma_{P_1}$  è di specie  $> 1$ , si trova che il cono  $\Gamma_P$  delle tangenti in  $P$  a  $V_{r-1}^n$  è della stessa specie. Quindi (cfr. I (3)).

I. Ad un punto doppio di  $F$ , non appartenente a  $G$ , con cono tangente  $\Gamma_{P_1}$  di specie  $s$ , corrisponde un punto doppio di  $V_{r-1}^n$  con cono tangente  $\Gamma_P$  della stessa specie e viceversa.

In particolare, per  $\Gamma_{P_1}$  di specie  $r-1$ ,  $P_1$  è uniplanare (cfr. I, caso I c): se, come si può, si fa  $\psi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  e  $\psi_1^2 - \chi_2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2$  si ha

(2) Seguo, nell'esame delle singolarità, almeno fino a che possibile, lo stesso ordine usato nella Nota I (alla quale il lettore è pregato di riferirsi); in modo che dal confronto dei casi indicati con lo stesso numero risulti quando la singolarità supposta in  $P_1$  determini quella in  $P$ , e viceversa.

$\chi_2 = x_1 x_2$ ; e perciò il cono  $\Gamma_P$ , di equazione  $t^2 + t(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0$  si spezza nei due  $S_{r-1}$ ,  $x_1 + t = 0$ ,  $x_2 + t = 0$  e il loro  $S_{r-2}$  d'intersezione si proietta nello  $S_{r-2}$  doppio tangente ad  $F$  in  $P_1$ .

Più in particolare  $P_1$  può essere *tacnode* per  $F$ , nel qual caso ogni tangente in  $P_1$  è quadripunta; cioè l'equazione  $2\psi_1\psi_2 - \chi_3 - \theta_1\chi_2 = 0$  ossia  $(x_1 + x_2)\psi_2 - \chi_3 - x_1x_2\theta_1 = 0$  deve essere soddisfatta per  $x_1 = x_2 = 0$ .

La  $V_{r-1}^n$  ha, nell'intorno di  $P$ , l'equazione

$$(x_1 + t)(x_2 + t) + t^2\theta_1 + 2t\psi_2 + \chi_3 + \dots = 0;$$

la stessa condizione ora trovata esprime che ogni punto infinitamente vicino a  $P$  e nello  $S_{r-2}$  doppio ( $x_1 = x_2 = -t$ ) è pure doppio.

Se  $P_1$  è *triplo* per  $F$ , nel qual caso svanisce il cono del 2° ordine tangente, è:  $\psi_1^2 - \chi_2$  e il cono  $\Gamma_P$  ha per equazione  $(t + \psi_1)^2 = 0$ , cioè  $P$  è doppio *uniplanare* per  $V_{r-1}^n$ .

Sono così invertiti tutti i risultati ottenuti al n. 3 della Nota I.

4. IL PUNTO  $P_1$  APPARTIENE A  $G$ . - In questo caso ( $n \cdot 2$ ) è  $\theta_0 = \psi_0 = \chi_0 = 0$  e  $P_1$  è doppio per  $F$ , la cui equazione, nell'intorno di  $P_1$  è:

$$(4.1) \quad \psi_1^2 - \theta_1\chi_1 + 2\psi_1\psi_2 - \theta_1\chi_2 - \theta_2\chi_1 + \dots = 0.$$

L'equazione di  $V_{r-1}^n$  nell'intorno di  $P$  (che si è fatto coincidere con  $P_1$ ) è:

$$(4.2) \quad \chi_1 + (2t\psi_1 + \chi_2) + (2t\psi_2 + \chi_3 + t^2\theta_1) + \dots = 0.$$

Il cono  $\Gamma_{P_1}$ ,  $\psi_1^2 = \theta_1\chi_1$  è di specie almeno  $r-3$ , cioè ha per vertice lo  $S_{r-4}$  (di  $S_{r-1}^*$ )  $\psi_1 = \theta_1 = \chi_1 = 0$ , tangente a  $G$  in  $P_1$ .

Lo  $S_{r-1}$  tangente in un punto  $(0, \dots, 0, \overset{\circ}{\chi}, \overset{\circ}{i})$  della retta  $OP$  ha l'equazione:

$$\overset{\circ}{i}^2\theta_1 + 2\overset{\circ}{i}\overset{\circ}{\chi}\psi_1 + \overset{\circ}{\chi}^2\chi_1 = 0,$$

è questi  $S_{r-1}$  (passanti tutti per lo  $S_{r-3}$ ,  $\theta_1 = \psi_1 = \chi_1 = 0$ ) inviluppano un cono quadrico la cui proiezione da  $O$  sullo  $S_{r-1}^*(t=0)$  è il cono  $\Gamma_{P_1}$ .

Questo è il caso generale per un punto  $P_1$  di  $G$ . Ma possono naturalmente aversi dei casi più particolari (anche rimanendo  $P_1$  soltanto doppio per  $F$ ).

Il primo caso da esaminare è che  $\Gamma_{P_1}$  sia di specie  $r-2$ , cioè abbia un  $S_{r-3}$  doppio, il che accade se le tre forme  $\theta_1, \psi_1, \chi_1$  non sono linearmente indipendenti, o più in particolare che qualcuna di esse svanisca identicamente; è però escluso per ora che sia  $\theta_1 \equiv 0$  o  $\chi_1 \equiv 0$ , nel qual caso  $\Gamma_{P_1}$  sarebbe di specie  $r-1$ .

Se, essendo  $\chi_1 \equiv 0$ , si pone:

$$\chi_1 = \lambda\theta_1 + \mu\psi_1,$$

l'iperpiano  $S_{r-1}$  tangente a  $V_{r-1}^n$  nel punto  $(0; 0 \dots 0, \overset{\circ}{\chi}, \overset{\circ}{i})$  si scrive:

$$(\overset{\circ}{i}^2 + \lambda\overset{\circ}{\chi}^2)\theta_1 + \overset{\circ}{\chi}(\overset{\circ}{i} + \overset{\circ}{\chi}\mu)\psi_1 = 0.$$

e perciò quegli  $S_{r-1}$  sono contenuti nel fascio individuato dai due iperpiani  $\theta_1 \equiv 0$  e  $\psi_1 \equiv 0$ , ed ogni iperpiano  $k\theta_1 + h\psi_1 = 0$  di tale fascio è tangente alla  $V_{r-1}''$  nei punti della OP per i quali sono soddisfatte le due equazioni:

$$\overset{\circ}{i}^2 + \lambda \overset{\circ}{\chi}^2 = \rho k \quad ; \quad \overset{\circ}{\chi} \overset{\circ}{i} + \overset{\circ}{\chi}^2 \mu + \rho h,$$

ossia l'equazione:

$$(4.3) \quad \frac{\overset{\circ}{i}^2 + \lambda \overset{\circ}{i}^2}{k} = \frac{\overset{\circ}{\chi} \overset{\circ}{i} + \overset{\circ}{\chi}^2 \mu}{h}$$

e quindi in due punti.

La (4.3) rappresenta una involuzione di gruppi di punti J sopra la  $OP_1$ . Se questa involuzione ha un punto unito diverso da O, si può prendere come punto P ( $\equiv P_1$ ) ed allora la (4.3) dovendo essere soddisfatta per  $\overset{\circ}{i} = 0$   $\overset{\circ}{\chi} = 1$ , si scrive:

$$h \overset{\circ}{i}^2 - k \overset{\circ}{i} + h\lambda - k\mu = 0$$

e perchè la radice  $\overset{\circ}{i} = 0$  sia doppia deve essere:  $k = 0$ ,  $\lambda = 0$  e allora risulta:

$$\chi_1 = \mu \psi_1 \quad , \quad \mu \neq 0.$$

Si osserva facilmente che i due punti uniti della J non possono coincidere con O finchè  $P_1$  rimane doppio.

Poichè  $\Gamma_{P_1}$  ha l'equazione  $\psi_1(\psi_1 - \mu\theta_1) = 0$ , si vede che gli  $S_{r-2}$  in cui esso si spezza sono le traccie, su  $l = 0$ , degli  $S_{r-1}$  tangenti a  $V_{r-1}''$  nei punti doppi della involuzione precedente sulla retta  $OP_1$ .

Nel caso che fosse  $\psi_1 \equiv 0$ , uno dei due punti doppi dell'involuzione precedente sarebbe in O.

Così è esaurito l'esame di  $\Gamma_{P_1}$  di specie  $r-2$ .

5. IL PUNTO  $P_1$  SU G È UNIPLANARE. — Esaminiamo il caso in cui  $P_1$ , sempre su G sia unipolare, cioè  $\Gamma_{P_1}$  di specie  $r-1$ . Ciò può accadere come si verifica facilmente, o per  $\theta_1 \equiv 0$  o per  $\chi_1 \equiv 0$ , o per  $\chi_1 = \lambda\theta_1 + \mu\psi_1$  con  $\mu^2 + 4\lambda = 0$ , o infine quando  $\theta_1 \equiv h\psi_1$ ,  $\chi_1 \equiv k\psi_1$ .

Se  $\theta_1 \equiv 0$ , il cono  $\Gamma_0$  delle tangenti  $(n-1)$ -punte in O a  $V_{r-1}''$  è:

$$\overset{\circ}{\chi}^{n-4} \theta_2 + \overset{\circ}{\chi}^{n-5} \theta_3 + \dots + \theta_{n-2} = 0$$

la retta  $OP_1$  è doppia per  $\Gamma_0$  ma non per  $V_{r-1}''$ . Gli  $S_{r-1}$  tangenti a  $V_{r-1}''$  nei punti di  $OP_1$  descrivono un fascio proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto; l'involuzione J del numero precedente è degenera (coppia con punto fisso in O) e sulla  $OP_1$  esiste un punto doppio di  $V_{r-1}''$ , infinitamente vicino ad O.

Se  $\chi_1 \equiv 0$  (ma  $\theta_1 \not\equiv 0$ ) si ha un punto doppio in P: l'involuzione J è degenera con P fisso (quindi il caso  $\theta_1 \equiv 0$  è particolare di questo quando P sia infinitamente vicino ad O).

Il caso  $\chi_1 = \lambda \theta_1 + \mu \psi_1$  con  $\mu^2 + 4\lambda = 0$  dà pure che la involuzione  $J$  è degenera: scelto il suo punto unito  $P \equiv P_1$  (come si può) si ritorna alla ipotesi  $\chi_1 \equiv 0$ . In questa ipotesi la  $F$  nell'intorno di  $P_1$  ha l'equazione:

$$\psi_1^2 + (2\psi_1\psi_2 - \theta_1\chi_2) + \dots = 0$$

quindi il cono delle tangenti 4-punte in  $P_1$  si spezza dentro lo  $S_{r-2}$  tangente ad  $F$  in  $P_1$ ,  $\psi_1 = 0$  in  $\theta_1 = 0$ ,  $\psi_1 = 0$  ed in  $\chi_2 = 0$ ,  $\psi_1 = 0$ , cioè in un  $S_{r-3}$  che è la traccia su  $\psi_1 = 0$  dello  $S_{r-2}$  tangente in  $P$  a  $\Gamma_0$  ed in un cono quadrico  $W_{r-3}^2$  che è la sezione con  $\psi_1 = 0$  del cono quadrico  $\Gamma_P$  delle tangenti tripunte a  $V_{r-1}^n$  nel punto doppio  $P$ , di equazione

$$(5.1) \quad 2t\psi_1 + \chi_2 = 0.$$

Ora possono verificarsi i seguenti casi:

Se  $W_{r-3}^2$  di equazione  $\chi_2 = 0$ ,  $\psi_1 = 0$  è di prima specie anche  $\Gamma_P$  è di prima specie.

Se  $W_{r-3}^2$  è di seconda specie cioè ha una retta vertice, vuol dire che il cono  $W_{r-3}^2$ ,  $\chi_2 = 0$ , deve essere di seconda specie ed inoltre lo  $S_{r-2}$   $\psi_1 = 0$  deve passare per tale retta vertice, ciò equivale a supporre, per esempio, che sia in  $\chi_2$  che in  $\psi_1$  manchi una variabile, ma allora anche il cono  $\Gamma_P$  di equazione (5.1) è di seconda specie, e la retta vertice risulta distinta dalla  $OP$ .

Lo stesso ragionamento si estende al caso in cui  $W_{r-3}^2$  sia di specie  $s+1$ , concludendo che anche  $\Gamma_P$  è di specie  $s+1$  e lo  $S_s$  vertice non passa per  $O$ .

Se in particolare  $W_{r-3}^2$  è di specie  $r-1$ , cioè spezzato in due  $S_{r-3}$  coincidenti,  $\chi_2$  deve essere divisibile per  $\psi_1$  e quindi  $P_1$  diventa un *tacnodo*, giacchè ogni tangente in  $P_1$  ad  $F$  è quadripunta. Il cono  $\Gamma_P$  si spezza in due  $S_{r-1}$ ,  $\psi_1 = 0$ ,  $2t + \frac{\chi_2}{\psi_1} = 0$  e il suo  $S_{r-2}$  doppio non passa per  $O$ .

Poichè le ipotesi che rimangono da esaminare nel caso di  $P_1$  uniplanare ( $\theta_1 \equiv 0$ ,  $\chi_1 \equiv 0$  ovvero  $\theta_1 \equiv h\psi_1$ ,  $\chi_1 \equiv k\psi_1$ ) conducono, come si vedrà nel numero successivo al tacnodo in  $P_1$ , possiamo concludere: (Cfr. I (4)).

*Se  $P_1$  è uniplanare per  $F$  ed appartiene a  $G$  il cono delle tangenti 4-punte ad  $F$  in  $P_1$  dentro lo  $S_{r-2}$  tangente (doppio) è sempre spezzato in un  $S_{r-3}$  ed in un cono  $W_{r-3}^2$  del secondo ordine.*

Inoltre:

*Ad un punto doppio uniplanare di  $F$  appartenente a  $G$  corrisponde sulla  $V_{r-1}^n$  un punto doppio ed il cono delle tangenti tripunte in esso è della stessa specie del cono  $W_{r-3}^2$  e viceversa.*

Si confronti questo caso con l'altro in cui  $P_1$  è pure uniplanare per  $F$  ma non appartiene a  $G$  (n. 3): in esso  $P_1$  proviene da un punto  $P$  di  $V_{r-1}^n$  biplanare; nel caso attuale invece il punto  $P$  non è in generale biplanare, ma anche nel caso che lo sia (ultimo caso esaminato)  $P_1$  risulta tacnodo e non accade (come nel caso del n. 3) che lo  $S_{r-2}$  comune ai due  $S_{r-1}$



tangenti  $\psi = 0$  e  $2t + \frac{x_2}{\psi_1}$  proiettato da O dia lo  $S_{r-2}$  tangente ad F in  $P_1$  contando due volte.

6. IL PUNTO  $P_1$  SU G È TACNODALE. — Se  $\theta_1 \equiv 0$ ,  $\chi_1 \equiv 0$ , la F nell'intorno di  $P_1$  è:

$$\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2 + 2\psi_1\psi_3 - 0_2\chi_2 + \dots = 0$$

e  $P_1$  è *tacnodo* per F; il punto P è doppio per  $V_{r-1}^n$  ed il cono  $\Gamma_0$  ha la retta  $OP_1$  come retta doppia (che è semplice per  $V_{r-1}^n$ ).

Se poi  $\theta_1 = h\psi_1$ ,  $\chi_1 = k\psi_1$ , si ha per F in  $P_1$ :

$$\psi_1^2(1 - hk) + \psi_1(2\psi_2 - h\chi_2 = k\theta_2) + \dots = 0$$

cioè  $P_1$  è ancora *tacnodo*.

Sulla  $OP_1$  i punti di  $V_{r-1}^n$  ad  $S_{r-1}$  tangente indeterminato sono dati da:

$$l^2h + 2l\tilde{\chi} + k\tilde{\chi}^2 = 0.$$

Se uno di essi (che sia diverso da O) si assumè come punto doppio P ( $\equiv P_1$ ) risulta  $k = 0$ , cioè  $\theta_1 = h\psi_1$ ,  $\chi_1 \equiv 0$  (e il caso precedente di tacnodo si ha quando l'altro punto doppio coincide con O). Se i due punti doppi coincidono ( $hk = 1$ ) la F acquista in  $P_1$  un punto triplo (con cono tangente spezzato in un  $S_{r-2}$  ed in un cono quadrico).

Confrontando il caso di tacnodo ora esaminato con l'ultimo caso esaminato nel numero precedente in cui  $P_1$  era pure tacnodo, si osserva che in questo caso, a differenza di quello, lo  $S_{r-2}$  tangente doppio ad F in  $P_1$  è anche lo  $S_{r-2}$  tangente ad  $F', F'', F'''$  per cui riassumendo:

*Ad un punto doppio tacnodale  $P_1$  di F appartenente a G corrisponde sulla  $V_{r-1}^n$  e sulla retta  $OP_1$  un punto doppio biplanare con lo  $S_{r-2}$  comune ai due  $S_{r-1}$ , non passante per O oppure due punti doppi conici a seconda che lo  $S_{r-2}$  tangente ad F in  $P_1$  non è oppure è anche tangente alle ipersuperficie  $F', F'', F'''$  e viceversa.*

Si confronti con l'altro caso di tacnodo (n. 3), quando  $P_1$  non appartiene a G; nel caso attuale si hanno due punti doppi conici distinti sulla OP, oppure un punto biplanare, nell'altro si ha un punto doppio biplanare cui sono infinitamente vicini  $\infty^{r-3}$  punti doppi appartenenti ad un  $S_{r-2}$  ed inoltre a differenza del caso attuale, come si è osservato alla fine del n. 5, lo  $S_{r-2}$  vertice proiettato da O dà lo  $S_{r-2}$  tangente doppio ad F in  $P_1$ .

I casi sono quindi nettamente distinti.

7. IL PUNTO  $P_1$  SU G È TRIPLO. — Sia ora  $P_1$  un punto triplo per F. Ciò può accadere in diversi casi che esaminiamo separatamente.

Se  $\chi_1 \equiv 0$ ,  $\psi_1 \equiv 0$  e  $\theta_1 \equiv 0$ ,  $P_1$  è triplo per F ed il cono delle tangenti 4-punte in  $P_1$  ad F è  $\theta_1\chi_2 = 0$  che è sempre spezzato nello  $S_{r-2}$   $\theta_1 = 0$  e nel cono del secondo ordine  $\chi_2 = 0$  generalmente di 1<sup>a</sup> specie.

La  $V_{r-1}^n$  nell'intorno di  $P$  è:

$$\chi_2 + (t^2 \theta_1 + 2t\psi_2 + \chi_3) + \dots = 0$$

Il cono  $\Gamma_P$  e'  $\chi_2 = 0$  ed è in generale di 2<sup>a</sup> specie con retta vertice la retta  $OP$ . Questo è il caso esaminato alla fine del numero precedente: i due punti uniti dalla  $J$  coincidono.

Se il cono quadrico  $\chi_2 = 0$  è nello  $S_{r-1}^* t = 0$  di 2<sup>a</sup> specie, sia  $x_1 = x_2 = \dots = x_{r-2} = 0$  la sua retta vertice, ciò vuol dire che nella equazione  $\chi_2 = 0$  devono mancare i termini in  $x_{r-1}$ , ma allora  $\Gamma_P$  risulta di terza specie e lo  $S_2$  vertice passa per  $O$ .

Analogamente se  $\chi_2 = 0$  è nello  $S_{r-1}^* t = 0$  di specie  $s$ ,  $\Gamma_P$  è di specie  $s+1$  e lo  $S_s$  vertice passa per  $O$ .

In particolare se  $\chi_2 = 0$  è nello  $S_{r-1}^* t = 0$  di specie  $r-2$ , cioè spezzato in due  $S_{r-2}$  distinti, con che  $P_1$  diventa un punto *triplanare*,  $\Gamma_P$  è di specie  $r-1$  cioè spezzato in due  $S_{r-1}$  distinti, ossia  $P$  è *biplanare*, e lo  $S_{r-2}$  doppio passa per  $O$ .

Più in particolare se  $\chi_2 = 0$  nello  $S_{r-1}^* t = 0$  è di specie  $r-1$ , cioè composto di un  $S_{r-2}$  doppio,  $P_1$  è ancora triplo per  $F$  con il cono delle tangenti quadripunte spezzato in due  $S_{r-2}$  di cui uno doppio, e  $\Gamma_P$  è di specie  $r$ , cioè è un  $S_{r-1}$  contato due volte.

Se  $\theta_1 \equiv 0$ ,  $\psi_1 \equiv 0$  e  $\psi_1 \not\equiv 0$  il punto  $P_1$ , risulta pure triplo per  $F$ . In questo caso il cono delle tangenti 4-punte in  $P_1$  ad  $F$  è  $\theta_2 \chi_1 = 0$  che è ancora spezzato in un  $S_{r-2} \chi_1 = 0$  e nel cono quadrico  $\theta_2 = 0$ . Valgono per il  $P$  le stesse considerazioni dei casi precedenti, ma questa volta esso è infinitamente vicino ad  $O$ .

Infine se  $\theta_1 \equiv \psi_1 \equiv \chi_1$ ,  $P_1$  è ancora triplo. I punti della retta  $OP_1$  ad  $S_{r-1}$  tangente indeterminato sono dati da

$$\tilde{\chi}^2 + 2t\tilde{\chi} + t^2 = 0$$

la quale ci dice che essi sono coincidenti. Questo caso può sempre ricondursi ad uno dei casi precedenti per cui riassumendo:

Se  $P_1$  è un punto triplo per  $F$ , il cono delle tangenti 4-punte in esso ad  $F$  è sempre spezzato in un  $S_{r-2}$  ed in un cono quadrico  $W_{r-2}^2$  e sulla  $V_{r-1}^n$  a  $P_1$  corrisponde un punto doppio il cui cono  $\Gamma_P$  delle tangenti tripunte in esso alla  $V_{r-1}^n$  è di specie  $s+1$  se  $W_{r-2}^2$  è di specie  $s$ , e lo spazio vertice di  $\Gamma_P$  passa per  $O$  e viceversa.

8. IL PUNTO  $P_1$  È QUADRUPLO. - Se  $\theta_1 \equiv \psi_1 \equiv \chi_1 \equiv 0$  il punto  $P_1$  è quadruplo per  $F$ .

Il cono delle tangenti 5-punte in esso ad  $F$  è  $\psi_2^2 - \theta_2 \chi_2 = 0$  e la  $V_{r-1}^n$  si scrive:

$$t^2 (\chi^{n-4} \theta_2 + \dots + \theta_{n-2}) + 2t (\chi^{n-3} \psi_2 + \dots + \psi_{n-1}) + \chi^{n-2} \chi_2 + \dots \chi_n = 0$$

dalla quale risulta che la retta  $OP_1$  è doppia per la  $V_{r-1}^n$ .

Se  $\psi_1 \equiv \chi_1 \equiv \chi_2 \equiv 0$ ,  $P_1$  è pure quadruplo per  $F$ , ma il cono delle tangenti 5-punte ad  $F$  in esso è:  $\psi_2^2 - \theta_1 \chi_3 = 0$ . La  $V_{r-1}''$  nell'intorno di  $P$  si scrive:

$$t^2 \theta_1 + 2t \psi_2 + \chi_3 + \dots = 0.$$

Il punto  $P$  è pertanto triplo per la  $V_{r-1}''$ .

Il caso  $\psi_1 \equiv \theta_1 \equiv \chi_2 \equiv 0$  può sempre ricondursi al caso precedente.

Infine se  $\theta_1 \equiv \psi_1 \equiv \chi_1 \equiv \chi_2 = 0$ ,  $P_1$  è ancora quadruplo per  $F$  e sulla  $V_{r-1}''$  si presentano contemporaneamente le circostanze riscontrate precedentemente cioè per  $V_{r-1}''$  la retta  $OP_1$  è doppia ed il punto  $P$  è triplo.

Il cono  $\Gamma_{P_1}$  si riduce a  $\psi_2^2 = 0$  cioè ad un cono quadrico contato due volte.

Si sono così invertiti i casi esaminati nella Nota I, alla fine del numero 4.

**Meccanica.** — *Dilatazione di una fune pesante sospesa a due estremi fissi.* Nota (\*) di U. RICHARD, presentata dal Corrisp. E. PERSICO.

1. Questa Nota contiene il seguito di un mio breve lavoro sullo stesso argomento<sup>(1)</sup>, lavoro di cui riassumo qui rapidamente i risultati.

Si consideri una fune di lunghezza  $l$  e di estremi  $O, O'$ , in equilibrio nel piano verticale passante per  $O, O'$ . Si assumano in questo piano assi  $x, y$  (orizzontale il primo e verticale diretto verso il basso il secondo) con l'origine in  $O$ , e siano  $a, b$  le coordinate di  $O'$  ( $a > 0$ ). Detta  $s$  la lunghezza dell'arco di fune contata a partire da  $O$ , siano  $P(s), Q(s)$  le componenti del carico distribuito sull'arco  $s$ ,  $c_1, c_2$  le componenti della reazione vincolare in  $O$ .

Sussiste allora in ogni punto la condizione di equilibrio

$$\frac{P(s) + c_1}{Q(s) + c_2} = \frac{dx/ds}{dy/ds}$$

da cui si deducono facilmente le relazioni

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \int_0^l \frac{P(s) + c_1}{\sqrt{[P(s) + c_1]^2 + [Q(s) + c_2]^2}} \cdot ds \\ b &= \int_0^l \frac{Q(s) + c_2}{\sqrt{[P(s) + c_1]^2 + [Q(s) + c_2]^2}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Queste sono atte a determinare le  $c_1, c_2$ , risultando sempre positivo il jacobiano di  $a, b$  rispetto a  $c_1, c_2$ .

(\*) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1947.

(1) *Dilatazione di una fune sospesa a due estremi fissi.* Torino, «Atti dell'Accademia delle Scienze», vol. 81 (1946-47).

Se ora una dilatazione muta l'arco  $s$  nell'arco  $s(1+h)$  (dove  $h$  è una costante assai piccola rispetto all'unità), le variazioni di  $c_1, c_2$  si trovano con le formole

$$(2) \quad \begin{cases} \delta c_1 = -\frac{h}{\frac{d(a,b)}{d(c_1, c_2)}} \cdot \left[ a \frac{\partial b}{\partial c_2} - b \frac{\partial a}{\partial c_2} \right] \\ \delta c_2 = -\frac{h}{\frac{d(a,b)}{d(c_1, c_2)}} \cdot \left[ -a \frac{\partial b}{\partial c_1} + b \frac{\partial a}{\partial c_1} \right] \end{cases}$$

ottenute considerando  $h, \delta c_1, \delta c_2$  come quantità piccole del 1° ordine e trascurandone potenze e prodotti.

2. Utilizzando le formole (1), (2) sviluppo ora i calcoli nell'ipotesi  $P(s) = 0, Q(s) = ks$  (carico proporzionale all'arco e diretto verso il basso).

In queste ipotesi gli integrali (1) si calcolano elementarmemente, e si trova

$$(3) \quad \begin{cases} a = -\frac{c_1}{k} \log \frac{kl + c_2 + \sqrt{c_1^2 + (kl + c_2)^2}}{c_2 + \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \\ b = -\frac{1}{k} [\sqrt{c_1^2 + (kl + c_2)^2} - \sqrt{c_1^2 + c_2^2}] \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si deducono subito le seguenti espressioni razionali dei due radicali quadratici<sup>(2)</sup>

$$\begin{cases} \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = -\frac{k(l^2 - b^2) + 2lc_2}{2b} \\ \sqrt{c_1^2 + (kl + c_2)^2} = -\frac{k(l^2 + b^2) + 2lc_2}{2b} \end{cases}$$

Sostituendole nella prima delle (3) si trova

$$(4) \quad c_2 = \frac{k}{2} \left[ b \operatorname{cotgh} \frac{ak}{2c_1} - l \right]$$

mentre rivolgendone una<sup>(3)</sup> rispetto a  $c_2$  si ha

$$(4') \quad c_2 = \frac{k}{2} \left[ -b \sqrt{1 + \frac{4c_1^2}{k^2(l^2 - b^2)}} - l \right]$$

L'eliminazione di  $c_2$  tra queste ultime porta all'equazione in  $c_1$

$$(5) \quad c_1 \sinh \frac{ak}{2c_1} = \frac{k}{2} \sqrt{l^2 - b^2}$$

(2) La somma dei due radicali vale  $-\frac{l}{b} (kl + 2c_2)$ ; se ne deduce in particolare che il segno di  $b$  è contrario al segno di  $kl + 2c_2$

(3) La scelta del segno davanti al radicale è dovuta all'osservazione contenuta nella nota precedente sul segno di  $b$ .



Se in questa si pone, per maggiore comodità,  $\frac{ak}{2c_1} = \xi$ , si è ridotti alla risoluzione dell'equazione trascendente

$$(6) \quad \frac{\sinh \xi}{\xi} = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a}.$$

Poichè evidentemente  $l^2 > a^2 + b^2$  il 2° membro della (6) è maggiore di uno e l'equazione ammette due soluzioni reali ed opposte. Noi prenderemo la soluzione negativa, dovendo essere  $c_1 < 0$ . Osservo esplicitamente che le (4), (5), (6) valgono anche per  $b = 0$ , nonostante la loro deduzione vada modificata.

L'equazione trascendente (6) si risolve in pratica molto agevolmente disponendo di una tavola della funzione  $\frac{\sinh \xi}{\xi}$ , quale per esempio si trova in Hayashi (4).

Del resto, si può invertire la serie di potenze

$$\frac{\sinh \xi}{\xi} = 1 + \frac{\xi^2}{3!} + \frac{\xi^4}{5!} + \dots$$

Posto, per comodità,

$$\eta = 6 \left[ \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} - 1 \right]$$

si può determinare uno sviluppo della forma

$$\xi = -\sqrt{\eta} [a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots]$$

oppure, dato che interessa  $c_1 = \frac{ak}{2\xi}$ , si può calcolare direttamente

$$\frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} [b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots].$$

I coefficienti di questi sviluppi si determinano per formale sostituzione nell'equazione, ottenendo così le formole risolutive

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\sqrt{\eta} \left[ 1 - \frac{1}{40} \eta + \frac{107}{67200} \eta^2 + \dots \right] \\ \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[ 1 + \frac{1}{40} \eta - \frac{13}{13400} \eta^2 + \dots \right] \end{array} \right.$$

Se si tiene conto dei termini effettivamente scritti e si confronta con le tavole dell'Hayashi, si trova che l'errore non raggiunge l'uno per cento per  $\eta < 4$ , ciò che corrisponde (5) ad un rapporto tra lunghezza della fune  $l$

(4) KEIICHI HAYASHI, *Fünfstellige Funktionentafeln*, Berlino, Springer, 1930, p. 47 e sgg.

(5)  $\eta \leq 4$  corrisponde a  $\frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} \leq \frac{5}{3}$ , ma, essendo  $\frac{l}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 1$ , si ha pure

$$\frac{l}{\sqrt{a^2 + b^2}} < \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} \leq \frac{5}{3}.$$

e distanza degli estremi  $\sqrt{a^2 + b^2}$  minore di  $5/3$ . In tale campo la convergenza degli sviluppi (7) può stabilirsi direttamente utilizzando noti procedimenti del calcolo delle serie.

Infatti si ha

$$\eta = \xi^2 + \frac{6\xi^4}{5!} + \frac{6\xi^6}{7!} + \dots$$

e, detto  $\rho$  il massimo di  $\xi^2$ ,  $\sigma$  il massimo termine della serie, la convergenza della serie inversa che dà  $\xi^2$  in funzione di  $\eta$  è assicurata almeno<sup>(6)</sup> per  $|\xi^2| < 2\sigma + \rho - 2\sqrt{\sigma(\sigma + \rho)}$ .

Se prendiamo  $\rho = 42$ , abbiamo  $\sigma = 88,2$  ottenendo un raggio di convergenza non minore di 4,08. D'altra parte  $\xi^2 < \eta$ , sicchè  $\left| \frac{\xi^2}{\eta} - 1 \right| < 1$  e si può senz'altro scrivere  $\xi = -\sqrt{\eta} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\xi^2}{\eta} - 1 \right)}$  come pure  $\frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\xi^2}{\eta} - 1 \right)}}$  sviluppando poi i radicali in serie binomiale, ecc.

3. - Si è visto ora come si procede al calcolo effettivo di  $c_1, c_2$ , e non resta che condurre a termine il calcolo di  $\delta c_1, \delta c_2$ . A questo scopo conviene semplificare le (2) considerando che sappiamo calcolare  $c_1, c_2$  e le loro derivate rispetto ad  $a, b$ .

Si ottengono così le

$$(8) \quad \begin{cases} \delta c_1 = -b \left[ a \frac{\partial c_1}{\partial a} + b \frac{\partial c_1}{\partial b} \right] \\ \delta c_2 = -b \left[ a \frac{\partial c_2}{\partial a} + b \frac{\partial c_2}{\partial b} \right] \end{cases}$$

Queste possono ancora semplificarsi osservando che  $c_1, c_2$  sono funzioni omogenee di 1° grado nelle variabili  $a, b, l$ ; allora, per il teorema di Eulero, si hanno le

$$(8') \quad \begin{cases} \delta c_1 = b \left[ l \frac{\partial c_1}{\partial l} - c_1 \right] \\ \delta c_2 = b \left[ l \frac{\partial c_2}{\partial l} - c_2 \right] \end{cases}$$

Non restano che due derivate da calcolare. Servendosi della (4) e della (6) si ha

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 6 \frac{\sinh \xi}{\xi} \left[ \coth \xi - \frac{1}{\xi} \right] = 6 \cdot \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} \left[ \frac{2c_2 + kl}{kb} - \frac{2c_1}{ka} \right]$$

(6) KONRAD KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlino, Springer, 1931, cap. V, p. 189.

Se ne deduce

$$\frac{\partial \xi}{\partial l} = - \frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial l} = \frac{klab}{(l^2 - b^2)[a(2c_2 + kl) - 2bc_1]}$$

e perciò

$$\left\{ \begin{aligned} l \frac{\partial c_1}{\partial l} &= - \frac{2l}{ak} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial l} = - \frac{l^2 c_1^2 b}{(l^2 - b^2) \left[ a \left( c_2 + \frac{kl}{2} \right) - bc_1 \right]} \\ l \frac{\partial c_2}{\partial l} &= - \frac{klb}{2} \cdot \frac{1}{\sinh^2 \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial l} - \frac{kl}{2} = - \frac{l^2 c_1^2 b^2 a}{(l^2 - b^2)^2 \left[ a \left( c_2 + \frac{kl}{2} \right) - bc_1 \right]} - \frac{kl}{2} \end{aligned} \right.$$

valori che, sostituiti nelle (8'), risolvono il nostro problema.

Questi valori si presentano però sotto forma indeterminata per  $b = 0$ ; l'inconveniente si supera ricordando che

$$c_2 + \frac{kl}{2} = \frac{b}{l} \left[ \sqrt{c_1^2 + c_2^2} - \frac{kb}{2} \right]$$

e quindi valgono in ogni caso le

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta c_1 &= -b \left[ \frac{l^2 c_1^2}{(l^2 - b^2) \left[ a \left( \sqrt{c_1^2 + c_2^2} - \frac{kb}{2} \right) - bc_1 \right]} + c_1 \right] \\ \delta c_2 &= -b \left[ \frac{l^2 c_1^2 ab}{(l^2 - b^2)^2 \left[ a \left( \sqrt{c_1^2 + c_2^2} - \frac{kb}{2} \right) - bc_1 \right]} + \frac{kl}{2} + c_2 \right] \end{aligned} \right.$$

**Meccanica.** — *Sull'analisi delle piccole deformazioni nel campo elastoplastico.* Nota (\*) di P. CICALA, presentata dal Socio M. PANETTI.

1. L'esame della stabilità di una assegnata configurazione A di sforzi e spostamenti implica la conoscenza delle tensioni corrispondenti ad un generico stato di deformazione B prossimo ad A. Poichè costruzioni in parete sottile sono di frequente realizzate in materiali (leghe d'alluminio o acciai inossidabili) i quali presentano un limite di elasticità notevolmente inferiore al carico di rottura, l'indagine anzidetta deve essere condotta anche fuori del campo elastico. Allora, per quanto siano da considerare infinitesimi gli spostamenti che da A portano a B, la determinazione delle corrispondenti variazioni di tensioni è tuttora incerta. Si raffrontano qui i risultati a cui le teorie della deformazione elastoplastica conducono a proposito dell'accennato quesito e si fa cenno di qualcuna delle più semplici possibili esperienze discriminative.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1947.

Qualora l'esperimento confermasse una di queste teorie e giustificasse le posizioni che in questa Nota son fatte nell'intento di estendere il campo di applicabilità ai corpi per i quali non si può supporre  $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = 0$  nel campo plastico, basterebbe effettuare una sola misurazione (ad esempio determinare la relazione fra  $\tau$  e  $\gamma$ ) per definire interamente le relazioni fra tensioni e deformazioni e, con queste, l'anisotropia conseguente alla deformazione plastica.

2. *Definizioni.* - Per le componenti di tensione e deformazione riferite alla terna ortogonale  $xyz$  si adottano le consuete notazioni: si scrive inoltre

$$\begin{aligned}
 3 \bar{\varepsilon} &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z & 3 \bar{\sigma} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
 \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \bar{\varepsilon} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \bar{\varepsilon} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \bar{\varepsilon} \end{pmatrix} & \mathbf{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Il tensore  $\mathbf{E}$  rappresenta la differenza fra il tensore di deformazione e  $\varepsilon \mathbf{U}$ : il tensore  $\mathbf{\Sigma}$  la differenza fra il tensore delle  $\sigma$  e  $\bar{\sigma} \mathbf{U}$ . Si indicano con  $e_{11}^2, s_{11}^2$  gli invarianti secondi (somma dei quadrati delle componenti) dei tensori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{\Sigma}$  rispettivamente:  $e_{11}, s_{11}$  sono quantità positive.

3. *Relazioni scalari.* - In base ai dati sperimentali sinora noti viene ammesso<sup>(1)</sup> che il coefficiente di dilatazione cubica  $3 \bar{\varepsilon}$  sia, oltre il limite elastico come al di sotto di esso, legato a  $\bar{\sigma}$  dalla relazione:

$$(1) \quad \varepsilon = \bar{\sigma} / 2 G_1.$$

Mentre nella relazione fra  $\bar{\varepsilon} \mathbf{U}$  e  $\bar{\sigma} \mathbf{U}$  non intervengono le condizioni di plasticità, le caratteristiche del materiale si manifestano nei rapporti fra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{\Sigma}$ , stabilendo fra gli invarianti dei due tensori una relazione nella quale il limite elastico interviene. Nel campo elastico è  $s_{11} = 2 G e_{11}$ : nel campo plastico per molti materiali può ammettersi che sia  $s_{11}$  costante (condizione di v. Mises)<sup>(2)</sup>. Per materiali per i quali non è lecito ammettere che sia  $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = 0$

(1) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*. Ed. Einaudi, p. 435, 1941.

(2) Ciò concorda con l'assunzione  $\sigma = \text{costante}$ , per tensione uniassica, adottata nel testo citato del prof. COLONNETTI, Parte IV.



oltre il limite elastico, l'assunzione che si presenta più immediata è che sia <sup>(3)</sup>

$$(2) \quad s_{11} = f(e_{11})$$

essendo  $f$  funzione da determinare sperimentalmente.

4. *Relazioni tensoriali.* — Se durante la deformazione il tensore  $\mathbf{E}/e_{11}$  si mantiene costante, viene concordemente ammesso che sia

$$(3) \quad \mathbf{E} = c \mathbf{\Sigma}$$

il fattore  $c$  essendo individuato dalla (2).

Secondo Hencky <sup>(4)</sup> la (3) vale in ogni caso. Perciò fra gli incrementi  $d\mathbf{E}$  e  $d\mathbf{\Sigma}$  corrispondenti ad una piccola deformazione, deve sussistere la relazione

$$(4) \quad \delta\mathbf{E} = c \delta\mathbf{\Sigma} + \delta c \mathbf{\Sigma}.$$

Le equazioni che vengono poste da Reuss <sup>(5)</sup> possono essere anche espresse nella forma (4) quando si dia al coefficiente  $c$  del tensore  $\delta\mathbf{\Sigma}$  il valore  $1/2 G$ .

Nella teoria di de St. Venant-Mises <sup>(6)</sup> manca il termine in  $\delta\mathbf{\Sigma}$ .

5. *Il sistema risultante.* — Fra gli incrementi di tensione e deformazione sussistono:

$$a) \text{ la (1) che dà } 2 G_1 \delta \bar{\epsilon} = \delta \bar{\sigma}$$

$$b) \text{ la (2) che dà } f' \delta e_{11} = \delta s_{11}$$

essendo per  $\delta e_{11} > 0$ ,  $f'$  il valore sperimentalmente determinato di  $ds_{11}/de_{11}$  mentre per  $\delta e_{11} < 0$  si deve porre  $f' = 2 G$ .

c) la (4) che, dopo eliminazione del parametro incognito  $\delta c$  si traduce in quattro equazioni scalari fra gli incrementi delle  $\sigma$  e  $\epsilon$ . Qui si differenziano le teorie citate, dovendosi nei tre casi scrivere rispettivamente  $c = e_{11}/s_{11}$  ovvero  $c = 1/2 G$  ovvero  $c = 0$ .

Si ottengono in ogni caso le sei relazioni lineari ricercate fra gli incrementi di tensione  $\delta\sigma$  e di deformazione  $\delta\epsilon$ , con coefficienti dipendenti dallo stato iniziale.

(3) Una relazione fra  $s_{11}$  e  $e_{11}$  è postulata anche da HOHENEMSER e PRAGER («Z. a. M. M.», p. 216, 1932). L'esperimento dovrebbe provare che sia trascurabile l'influenza degli invarianti terzi (l'invariante primo di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{\Sigma}$  è nullo) e l'influenza delle deformazioni precedentemente susseguites.

(4) «Z. a. M. M.», p. 323, 1924. La deduzione, alquanto criticata, è ivi svolta per la ipotesi  $s_{11} = \text{costante}$ .

(5) «Z. a. M. M.», p. 266, 1930. Il primo addendo a secondo membro della (4) rappresenta qui la deformazione elastica, il secondo la deformazione plastica in conformità alla ipotesi dei piani di slittamento.

(6) v. MISES, «Götting. Nachr. math. Phys. Kl.», p. 913, 1913.

Ad esempio se nello stato A di partenza solo la  $\sigma_x$  ha valore  $\sigma_0$  non nullo e si indica con  $\sigma_0/E_s$  la relativa  $\varepsilon$  e con  $E_t = d\sigma/d\varepsilon$  il valore del modulo tangente ricavato dalla prova di estensione, risulta secondo Hencky:

$$(5) \quad \begin{cases} E_t \varepsilon_x = \sigma_x - \nu' \sigma_y - \nu' \sigma_z & G' \gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ E_t \varepsilon_y = -\nu' \sigma_x + a \sigma_y - \nu'' \sigma_z & G' \gamma_{yz} = \tau_{yz} \\ E_t \varepsilon_z = -\nu' \sigma_y - \nu'' \sigma_y + a \sigma_z & G' \gamma_{xz} = \tau_{xz} \end{cases}$$

essendo qui indicate con  $\varepsilon_x, \dots, \tau_{xz}$  le variazioni  $\delta\varepsilon_x, \dots, \delta\tau_{xz}$  e posto

$$(6) \quad \nu' = \frac{1}{2} - \frac{E_t}{4 G_t} \quad 1 - a = \nu' - \nu'' = \frac{3 E_s - 3 E_t}{4 E_s} \quad \frac{1}{G'} = \frac{3}{E_s} - \frac{1}{2 G_t}$$

Le relazioni a cui conduce la teoria di Reuss sono ricavabili dalle (5) e (6) mediante sostituzione di  $E$  (modulo tangente per  $\sigma \rightarrow 0$ ) ad  $E_s$ . In entrambi i casi le relazioni valgono se è  $\sigma_0 (2 \varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z) > 0$ . In caso contrario sussistono le relazioni dell'ordinaria teoria ( $\nu' = \nu'' = 1/m$ ;  $a = 1$ ;  $E_t = E$ ,  $G' = G$ ).

6. *Controlli sperimentali.* - Si indicano due prove atte a fornire elementi di confronto sul valore relativo delle varie teorie.

6. 1. Due tubi uguali di piccolo spessore, sezione circolare, vengano disposti paralleli e bloccati alle estremità dopo essere stati torti in verso opposto oltre il limite elastico. Si determini la rigidezza della coppia di tubi per le inflessioni in direzione normale al piano dei due assi. Diciamo  $E_r J$  il rapporto fra il momento applicato  $M$  e la corrispondente curvatura per  $M \rightarrow 0$  ( $J$  momento d'inerzia rispetto all'asse neutro). Secondo la teoria di Hencky sarebbe

$$3/E_r = 1/G_s + 1/2 G_t$$

essendo  $G_s = \tau/\gamma$  (modulo secante per la deformazione di torsione preventivamente impressa). Secondo Reuss va sostituito  $G$  a  $G_s$ : secondo la teoria di St. Venant-Mises l'addendo  $1/G_s$  manca (7).

6. 2. Si sottoponga a trazione oltre il limite elastico un tubo di piccolo spessore, cilindrico circolare e si determini la relazione fra la tensione assiale  $\sigma$  e le dilatazioni assiale  $\varepsilon_a$  e circonferenziale  $\varepsilon_c$  e quindi i moduli secante  $G_s$  e tangente  $G_t$

$$G_s = \frac{\sigma}{2(\varepsilon_a - \varepsilon_c)} \quad G_t = \frac{d\sigma}{2 d(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}$$

Bloccate le estremità del tubo in modo che la dilatazione assiale non abbia a variare, si eserciti una pressione interna e si misuri la corrispondente

(7) Prove di torsione e successiva trazione vennero effettuate da Hohenemser: le conclusioni, favorevoli alla teoria di Hencky, vennero però messe in dubbio (v. MISES, *Ueber die bisherigen Ansätze*, u. s. w. III Congr. Intern. Mecc. Appl., 1930).

tazione circonferenziale nel tratto centrale del tubo: sia  $E_r$  il rapporto della tensione circonferenziale creata dalla pressione interna e' la corrispondente  $\varepsilon_c$ . Secondo la teoria di Hencky è

$$4/E_r = 1/G_s + 3/(2 G_t + G_l)$$

tre secondo de St. Venant-Mises il termine  $1/G_s$  manca e secondo Reuss è sostituito da  $1/G$ .

Dato il notevole divario esistente fra i risultati delle citate teorie, le prove poste presentano possibilità di netta discriminazione.

**Meccanica (Dinamica).** — *Il Principio di Hamilton per sistemi dinamici a vincoli anolonomi generali.* Nota<sup>(\*)</sup> di L. CASTOLDI, presentata dal Socio L. BERZOLARI.

1. Il Principio di Hamilton, valido con notazioni ben consuete, sotto forma generale

$$\int_0^{t_1} \left( \delta \mathcal{E} + \sum_{b=1}^n Q_b \delta q_b \right) dt = 0,$$

energia cinetica,  $q_b$  coordinate lagrangiane,  $Q_b$  corrispondenti componenti lagrangiane delle forze attive) per sistemi olonomi anche non conservativi, notoriamente<sup>(1)</sup>, estensibile a sistemi soggetti a vincoli anolonomi lineari e velocità.

Una ulteriore estensione a sistemi con vincoli cinematici anche non vari non è senz'altro possibile, mancando per questi ultimi, come siamo recentemente rilevato<sup>(2)</sup>, una conveniente definizione degli spostamenti virtuali.

Ci è stato peraltro possibile, in altra parte<sup>(3)</sup>, constatare che ad una definizione si può pervenire in modo soddisfacente, guidati dall'intento unificare il contenuto logico dei Principi di D'Alembert e di Gauss. Precisamente, se

$$f_r(q_b, \dot{q}_b, t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, l)$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1947.

(1) Vedasi, per esempio, E. T. WHITTAKER, *Analytische Dynamik* (traduz. tedesca 1924), 54. Contributi notevoli alla teoria dei sistemi anolonomi sono stati dati recentemente professor G. LAMPARIELLO, *Generalizzazione del Teorema di Jacobi alla meccanica analitica dei sistemi anolonomi*. « Atti della Acc. d'Italia », ser. 7<sup>a</sup>, vol. III (1942), pp. 734-740; e: *Generalizzazione del metodo di Jacobi alla dinamica dei sistemi anolonomi*. Ibidem, vol. IV (1942-43), pp. 12-19.

(2) L. CASTOLDI, *Sopra una definizione di spostamento virtuale ecc.* « Ist. Lombardo Scienze e Lettere », vol. LXXIX, fasc. 1<sup>o</sup> (1945-46).

(3) L. CASTOLDI, loco citato alla nota (2).

sono le equazioni di  $l$  vincoli generali di mobilità, non contenenti peraltro derivate delle  $q_h$  di ordine superiore al primo - ci limitiamo a questo caso come il solo che presenti interesse in qualche applicazione - abbiamo definito come spostamenti virtuali del sistema, compatibili coi vincoli (2), quelli caratterizzati dalle equazioni

$$(3) \quad \sum_{h=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, l).$$

2. Sia allora  $\mathcal{C}$ , nello spazio  $\Sigma_n$  delle configurazioni, l'arco di traiettoria effettivamente percorso dal punto rappresentativo  $P$  del sistema tra due istanti  $t_0$  e  $t_1$  ( $t_0 < t_1$ ), rappresentabile quindi parametricamente nella forma

$$(4) \quad q_h = q_h(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

In particolare designeremo rispettivamente con  $P_0$  e  $P_1$  le posizioni assunte da  $P$  negli istanti  $t_0$  e  $t_1$ .

Siano poi

$$(5) \quad \delta q_h(t) = \varepsilon_h(t)$$

$n$  funzioni di  $t$  definite nell'intervallo  $(t_0, t_1)$ , ivi continue insieme alle loro derivate prime, e i cui valori in tutto  $(t_0, t_1)$  concepiamo trattabili come grandezze piccole del primo ordine. Supponiamo ancora che tali funzioni si annullino tutte per  $t = t_0$  e  $t = t_1$ , e soddisfino, per ogni  $t$  di  $(t_0, t_1)$ , alle condizioni (3) imposte agli spostamenti virtuali.

Le (5) rappresentano allora ovviamente una *variazione virtuale* della traiettoria  $\mathcal{C}$ , trasformante quest'ultima in un arco di curva  $\mathcal{C}'$  a tangente continua infinitamente vicino a  $\mathcal{C}$  ed avente gli estremi  $P_0$  e  $P_1$  in comune con  $\mathcal{C}$ . Chiameremo  $\mathcal{C}'$ , per una ragione che apparirà chiarita dal seguito, una *pseudotraiettoria variata*.

3. Importa qui rilevare che, in generale,  $\mathcal{C}'$  non può concepirsi come una possibile traiettoria del sistema, compatibilmente coi vincoli cinematici (2).

Per mostrar ciò, cerchiamo, inversamente, a quali necessarie condizioni debbano soddisfare le funzioni  $\varepsilon_h(t)$  affinché  $\mathcal{C}'$  riesca una traiettoria cinematicamente possibile pel sistema. Sostituendo i secondi membri di (5) in luogo delle  $\delta q_h$  nei primi membri delle (3), indi derivando le identità ottenute rispetto a  $t$ , otteniamo dapprima

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_h} \varepsilon_h(t) = 0,$$

e poi,

$$(6) \quad \sum_{h=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_h} \right) \varepsilon_h(t) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial q_h} \varepsilon_h(t) = 0.$$

D'altra parte, affinché  $\mathcal{C}'$ , di equazioni parametriche

$$(4') \quad \dot{q}_h = \dot{q}_h(t) + \varepsilon_h(t),$$



risulti traiettoria compatibile colle (2), occorre che sia:

$$(2') \quad f_r [q_b + \varepsilon_b(t); \dot{q}_b + \dot{\varepsilon}_b(t); t] = 0,$$

ovvero, a meno di grandezze di ordine superiore al primo e in virtù delle (2) stesse,

$$(7) \quad \sum_{b=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial q_b} \varepsilon_b(t) + \sum_{b=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_b} \dot{\varepsilon}_b(t) = 0.$$

Dal confronto di (6) e (7) si trae:

$$(8) \quad \sum_{b=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial f_r}{\partial q_b} \right] \varepsilon_b(t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, l),$$

le quali, ove non siano conseguenze algebriche delle

$$(3') \quad \sum_{b=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_b} \varepsilon_b(t) = 0,$$

o non si riducano a identità per l'eventuale annullarsi dei coefficienti delle  $\varepsilon_b(t)$  - circostanze entrambe il cui verificarsi richiede l'esistenza di  $l^2$  funzioni  $\lambda_{rs}(t)$ , eventualmente tutte nulle, per cui sia

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial f_r}{\partial q_b} = \sum_{s=1}^l \lambda_{rs} \frac{\partial f_s}{\partial \dot{q}_b} \quad \left( \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, l \\ b = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right) -$$

non sono generalmente soddisfatte dalle assegnate funzioni  $\varepsilon_b(t)$ . Ciò prova l'asserita inconcepibilità di  $\mathcal{Q}'$  come possibile traiettoria e giustifica la denominazione adottata per essa.

Tornando, per un momento, alla (9), notiamo che l'esistenza di funzioni  $\lambda_{rs}(t)$ , eventualmente nulle, per cui le (9) stesse sussistano, costituisce in ogni caso una condizione restrittiva della generalità dei vincoli (2). Infatti se le (9) sono soddisfatte da  $\lambda_{rs}$  non tutte nulle, ne segue che in tutto l'intervallo  $(t_0, t_1)$  le due matrici

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_n} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_n} \end{matrix} \right\| \quad \text{e} \quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_1} & \frac{d}{dt} \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_1} & - \frac{\partial f_r}{\partial q_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_n} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_n} & \frac{d}{dt} \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_n} & - \frac{\partial f_r}{\partial q_n} \end{matrix} \right\|$$

hanno, per uno stesso e qualunque valore di  $r$ , uguale caratteristica. Se invece le (9) sussistono colle  $\lambda_{rs}$  tutte nulle, le (9) stesse costituiscono altrettante condizioni direttamente imposte ai vincoli (2).

Notiamo ancora che, nel caso più consueto di vincoli olonomi lineari nelle velocità, cioè del tipo

$$(2^*) \quad \sum_{k=1}^n a_{rk}(q_k, t) \dot{q}_k + a_{r0}(q_k, t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, l),$$

le (9) diventano

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial a_{rk}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{rk}}{\partial q_h} \right) \dot{q}_k + \left( \frac{\partial a_{rk}}{\partial t} - \frac{\partial a_{rk}}{\partial q_h} \right) = \sum_{s=1}^l \lambda_{rs} a_{hs} \quad \left( \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, l \\ h = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right),$$

e sono soddisfatte, come subito si verifica, da  $\lambda_{rs}$  tutte nulle, sia nel caso che i vincoli, supposti *a priori* di mobilità, degenerino in vincoli olonomi indipendenti dal tempo, sia nel caso di vincoli olonomi reonomi, rappresentati da equazioni della forma

$$(10) \quad \varphi_r(q_k, t) = \sum_{k=1}^n a_{rk}(t) q_k = 0,$$

colle  $a_{rk}(t)$  funzioni derivabili dell'unico argomento indicato.

4. Le conclusioni del numero precedente, risultano, del resto, prevedibili per via intuitiva in base alle seguenti considerazioni: La presenza degli  $l$  vincoli cinematici (2) ha per effetto che le direzioni degli spostamenti effettuabili dal punto rappresentativo del sistema nello spazio delle configurazioni a partire da una sua generica posizione P, riempiono uno spazio vettoriale ad  $n - l$  dimensioni con origine nel punto P. Avendo denominato altrove il numero  $n - l$  *grado di mobilità* del sistema, designeremo qui, conformemente, il considerato spazio vettoriale come *spazio di mobilità* del punto rappresentativo, appartenente alla sua posizione P. Ed è ovvio, in base alle (2), che tale spazio di mobilità dipende generalmente da P e da  $t$ . Ne segue che lungo una traiettoria effettiva, la tangente ad essa nel suo punto generico P, certo appartiene al relativo spazio vettoriale di mobilità. Attribuendo, d'altra parte, ai singoli punti della traiettoria i considerati spostamenti virtuali, e passando in tal modo alla pseudotraiettoria variata  $\mathcal{C}'$ , a ciascun punto P' di questa corrisponderà uno spazio vettoriale di mobilità, ma nulla assicura *a priori* (e le considerazioni precedenti generalmente lo escludono) che la tangente a  $\mathcal{C}'$  in P' appartenga a tale spazio.

5. Premesso queste considerazioni sul significato delle pseudotraiettorie variate, ritorniamo al Principio di Hamilton (1) per dimostrarne la validità nel caso dei sistemi anolonomi generali qui considerati.

Riferiamoci perciò alle equazioni generalizzate di Ferrers (4)

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_h} = Q_h + \sum_{r=1}^l \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

e calcoliamo la variazione subita dall'integrale  $\mathcal{J} = \int_{P_0}^{P_1} \mathcal{E} dt$ , allorchè esso si

valuti, anzichè lungo la traiettoria effettiva  $\mathcal{C}$ , lungo una pseudotraiettoria variata  $\mathcal{C}'$  congiungente i medesimi estremi. Si ha allora, con ovvio significato delle notazioni, e avendo presenti le (11):

(4) L. CASTOLDI, *Equazioni Lagrangiane per i sistemi a vincoli anolonomi ecc.* « Rendiconti dell'Ist. Lombardo di Scienze e Lettere ». (In corso di pubblicazione).

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{J} &= {}^{(C)}\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{T} dt - {}^{(C)}\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{T} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h} \delta q_h \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^n \left\{ \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} \right) \delta q_h - Q_h \delta q_h - \sum_{r=1}^l \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \right\} dt.\end{aligned}$$

Facendo poi uso delle (3) facilmente si ottiene:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{J} &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \right) - Q_h \delta q_h \right\} dt = \\ &= \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \right)_{P_1} - \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \right)_{P_0} - \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{h=1}^n Q_h \delta q_h \right) dt,\end{aligned}$$

ossia, per l'annullarsi in  $P_0$  e in  $P_1$  delle  $\delta q_h$ :

$$\delta\mathfrak{J} = - \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{h=1}^n Q_h \delta q_h \right) dt,$$

e infine

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta \mathfrak{T} + \sum_{h=1}^n Q_h \delta q_h \right) dt = 0,$$

che coincide colla (1) e prova l'asserita validità del Principio di Hamilton, purchè si mettano a raffronto colla traiettoria naturale non già traiettorie naturali vicine, ma pseudotraiettorie variate, come definite nei numeri precedenti.

**Meccanica** (Idromeccanica). — *Sopra una proprietà dei moti permanenti di fluidi incompressibili in cui le linee di corrente formano una congruenza normale di linee isotache.* Nota (\*) di L. CASTOLDI, presentata dal Socio L. BERZOLARI.

1. È dovuto al prof. F. Sbrana (1) il riconoscimento del fatto notevole che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè in un moto piano permanente di un fluido incompressibile le linee di corrente siano isotache è che queste risultino traiettorie ortogonali di una semplice infinità di rette.*

Tentando di generalizzare questa proposizione al caso di moti permanenti nello spazio ordinario, si riconosce facilmente che le sole ipotesi di incompressibilità e di isotachia delle linee di corrente non permettono di giungere a un risultato analogo a quello citato.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1947.

(1) F. SBRANA, *Sui moti piani di un fluido incompressibile nei quali le linee di corrente sono isotache.* « Rendiconti Lincei », vol. VII, ser. 6<sup>a</sup> (1928), p. 64.

La generalizzazione accennata risulta invece possibile se si aggiunge l'ipotesi - automaticamente soddisfatta nel caso piano - che le linee di corrente costituiscano una congruenza normale.

Precisamente, è possibile dimostrare che: *Condizione necessaria e sufficiente affinché nel moto permanente spaziale di un fluido incompressibile, le linee di corrente, supposte traiettorie ortogonali di una semplice infinità di superficie  $\Sigma$ , siano isotache, è che  $\Sigma$  sia una famiglia di superficie di area minima.*

Ecco, in breve, la dimostrazione: Partiamo dalle ipotesi relative alla velocità  $\bar{v}$

$$(1) \quad \text{div } \bar{v} = 0 \quad ; \quad (2) \quad \bar{v} = k \text{ grad } \varphi \quad ; \quad (3) \quad \text{grad } \bar{v} \times \bar{v} = 0$$

l'ultima delle quali esprime l'isotachia delle linee di corrente, mentre, nella seconda,  $k$  e  $\varphi$  sono convenienti funzioni del posto nel campo occupato dal fluido.

Assunte le superficie  $\varphi = \text{cost.}$  costituenti la accennata famiglia  $\Sigma$  come superficie  $x^1 = \text{cost.}$ , e introdotto su ciascuna di esse un sistema di coordinate  $x^2, x^3$  in modo che a tutti i punti di una medesima linea di corrente competano i medesimi valori di  $x^2$  e di  $x^3$ , si riconosce immediatamente che la forma differenziale quadratica caratterizzante il quadrato dell'elemento lineare nello spazio ambiente, assume l'aspetto:

$$(4) \quad ds^2 = a_{11} (dx^1)^2 + a_{ij} dx^i dx^j = dl^2 + d\sigma^2 \quad (2),$$

dove gli indici  $i$  e  $j$  percorrono i valori 2 e 3, mentre  $dl$  e  $d\sigma$  sono rispettivamente l'elemento d'arco sulla generica linea di corrente e l'elemento lineare sulle superficie di  $\Sigma$ . Dato il carattere definito positivo della forma (4), è anche possibile scrivere:

$$(4') \quad ds^2 = H_1^2 (dx^1)^2 + a_{ij} dx^i dx^j,$$

dove  $a_{ij} dx^i dx^j$  è, a sua volta, forma quadratica binaria definita positiva.

Indicando, come già in (3), con  $v$  il modulo della velocità, costante lungo ogni singola traiettoria, si ha:  $v^2 = H_1^2 (v^1)^2$ , dal che segue che  $H_1 v^1$  è quantità indipendente da  $x^1$ .

Si ha poi, per (2),

$$(5) \quad \text{div } \bar{v} = \frac{1}{H_1 \sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^1} (H_1 \sqrt{a} v^1) = 0,$$

dove con  $a$  abbiamo indicato il discriminante, necessariamente positivo, della forma quadratica  $d\sigma^2$ . Da (5), in virtù della rilevata indipendenza di  $H_1 v^1$  da  $x^1$ , segue subito

$$(5') \quad \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^1} = 0,$$

(2) Conformemente alle notazioni del Calcolo tensoriale, adottiamo qui e nel seguito la convenzione di soppressione degli indici di sommatoria.



la quale, per cose note dalla Geometria differenziale<sup>(3)</sup>, esprime appunto che le superficie  $x^1 = \text{cost.}$  formano una famiglia  $\infty^1$  di superficie di area minima, e dimostra la parte diretta del teorema enunciato.

La parte inversa risulta immediatamente dall'osservare che da (5') e da (5) segue la costanza lungo ogni linea di corrente di  $H_1 v^1 = v$ , cioè l'asserita isotachia delle linee di corrente.

2. Risolta così la parte puramente cinematica del problema posto, sorge spontanea la ricerca della natura delle forze atte a produrre un moto del tipo descritto, e, particolarmente, delle circostanze in cui tali forze riescono conservative.

A tale proposito ricordiamo l'equazione indefinita del moto di un fluido incomprimibile

$$(6) \quad \bar{\omega} \wedge \bar{v} = \bar{F} - \text{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right),$$

dove si è posto

$$(7) \quad \bar{\omega} = \text{rot } \bar{v}$$

e si sono indicate rispettivamente con  $\bar{F}$  la forza esterna unitaria (agente cioè sull'unità di massa del fluido), con  $p$  la pressione, e con  $\rho$  la densità (costante) del fluido.

Supposta la forza  $\bar{F}$  conservativa, è

$$(8) \quad \bar{F} = \text{grad } U,$$

e da (6) segue, in questa ipotesi,

$$(9) \quad \text{rot} (\bar{\omega} \wedge \bar{v}) = 0.$$

Per dar forma esplicita a quest'ultima relazione, osserviamo che, sotto forma invariante, indicando con  $\nabla_j$  il simbolo di derivazione covariante e con  $\varepsilon^{ijk}$  le componenti controvarianti del noto tensore emisotropo<sup>(4)</sup>  $\varepsilon$ , si ha:

$$\omega^i = \varepsilon^{ijk} \nabla_j v_k,$$

ossia, distesamente,

$$\omega^1 = 0 \quad ; \quad \omega^2 = \frac{\partial H_1}{\partial x^3} \frac{v}{H_1 \sqrt{a}} \quad ; \quad \omega^3 = - \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \frac{v}{H_1 \sqrt{a}}.$$

Si ha poi

$$\Omega_i = (\bar{\omega} \wedge \bar{v})_i = \varepsilon_{ijk} \omega^j v^k,$$

e, sotto forma esplicita,

$$\Omega_1 = 0$$

$$\Omega_2 = \frac{v^1 \omega^3}{H_1 \sqrt{a}} = - (v)^2 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x^2}$$

$$\Omega_3 = - \frac{v^1 \omega^2}{H_1 \sqrt{a}} = - (v)^2 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x^3}.$$

(3) Si confronti, per esempio, L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, p. 179.

(4) Si confronti, per esempio U. CISOTTI, *Meccanica razionale*, 4<sup>a</sup> ed., p. 354.

Di qui, per le componenti controvarianti del vettore

$$\bar{R} = \text{rot}(\bar{\omega} \wedge \bar{v}) = \varepsilon^{ijk} \nabla_j \Omega_k,$$

si ottengono infine le espressioni seguenti:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} R^1 &= \frac{(v)^2}{H_1 \sqrt{a}} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^3} \log H_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^2} \log H_1 \right] = 0 \\ R^2 &= \frac{(v)^2}{H_1 \sqrt{a}} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} \log H_1 \\ R^3 &= -\frac{(v)^2}{H_1 \sqrt{a}} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} \log H_1 \end{aligned} \right.$$

L'annullarsi, secondo (9), delle componenti di  $\bar{R}$ , implica allora che sia

$$\frac{\partial \log H_1}{\partial x^1} = f(x^1),$$

e quindi

$$(11) \quad a_{11} = H_1^2 = F(x^1) \cdot G(x^2, x^3),$$

dove si è posto

$$F(x^1) = e^{2 \int f(x^1) dx^1}$$

e indicato con  $G(x^2, x^3)$  una funzione positiva arbitraria degli argomenti indicati. Se si applica poi al parametro  $x^1$  la trasformazione definita a meno di una costante arbitraria

$$dx'^1 = \sqrt{F(x^1)} dx^1,$$

e si denota ancora con  $x'$  la variabile nuovamente introdotta, la forma differenziale (3') assume l'aspetto

$$(3'') \quad ds^2 = G(x^2, x^3) (dx'^1)^2 + a_{ij} dx^i dx^j.$$

Il significato geometrico della (3'') è che le superficie di area minima della famiglia  $\Sigma$ , di cui al numero precedente, staccano sulle linee di corrente archi di lunghezze proporzionali.

Inversamente, se la forma (3') è tale che  $H_1^2$ , possa farsi dipendere soltanto da  $x^2$  ed  $x^3$ , i secondi membri delle (10) si annullano identicamente, la (9) risulta soddisfatta, e da ciò segue, attraverso (6),

$$\text{rot } \bar{F} = 0, \quad \text{ossia } \bar{F} = \text{grad } U.$$

Chiamando, per brevità *fascio di superficie* una famiglia  $\infty^1$  di superficie aventi la proprietà di staccare archi proporzionali sulle  $\infty^2$  traiettorie ortogonali, possiamo enunciare il risultato ottenuto affermando che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il moto del fluido incompressibile considerato nel numero I, sia realizzabile per effetto di forze conservative, è che le linee di corrente siano traiettorie ortogonali di un fascio di superficie minime.*

3. a) Un caso particolarissimo delle circostanze testè enunciate si presenta allorchè il fluido in questione si muove di moto rigido rotatorio attorno ad un asse fisso  $a$ . Allora infatti le linee di corrente sono le circonferenze centrate su  $a$  e giacenti nei piani normali ad  $a$ . Il fascio  $\Sigma$  di superficie minime si riduce qui all'effettivo fascio di piani uscenti da  $a$ ; la velocità del fluido lungo la generica linea di corrente di raggio  $r$  è costante, uguale ad  $\omega r$ ; infine, le forze atte a produrre il moto considerato derivano dal potenziale  $U = -\omega^2 r^2$ .

b) Non rientra invece nel tipo di moti contemplato nel numero 2 un moto rigido elicoidale, benchè anche in esso, come nel caso a) le linee di corrente siano isotache e le forze atte a produrre il moto derivino dallo stesso potenziale  $U = -\omega^2 r^2$ , dove ora  $r$  denota il raggio dell'elica cilindrica con cui si identifica la generica linea di corrente. Va notato peraltro che, nel caso attuale, le linee di corrente non possono concepirsi come traiettorie ortogonali di una famiglia  $\infty^1$  di superficie, come risulta osservando che non è ora, in alcun punto al finito del campo (limitato o no)  $\bar{\omega} \times \bar{v} = 0$ , e ricordando che il verificarsi di quest'ultima relazione è condizione necessaria e sufficiente perchè sia  $\bar{v} = k \text{ grad } \varphi$ .

**Astronomia.** — *Sulle variazioni di latitudine anteriori al 1890.*  
Nota di T. NICOLINI, presentata (\*) dal Socio L. CARNERA.

1. Anteriormente al 1890 esistono varie serie di determinazioni di latitudini, e la loro discussione culmina nelle classiche ricerche del Chandler, la cui Memoria conclusiva <sup>(1)</sup> è del 1892. Altri contributi importanti sono di Thackeray <sup>(2)</sup> per la serie al cerchio dei passaggi di Greenwich, 1851-91; e di Ivanof <sup>(3)</sup>, Nyrèn <sup>(4)</sup>, Wanach <sup>(5)</sup> per la serie di Pulkova 1842-49 e 1864-91. Le ricerche del Chandler costituiscono un modello di elaborazione dettagliata di una massa di materiale eterogeneo (45 serie, elencate in «A. J.», 272 e 273), e spesso al limite della utilizzabilità; e la decisiva scoperta del periodo di 14 mesi, che porta il suo nome, compensò l'arduo lavoro.

Ma a parte il valor medio approssimato di tale periodo ( $428,6 \pm 0,2$  giorni, in «A. J.», 320), i risultati particolari del Chandler non possono presumere lo stesso affidamento, nè essere paragonabili coi recenti. Le vecchie serie sono difatti intaccate da notevoli errori di posizioni stellari, interferenti in programmi svariati ed irregolari, con diversità di metodi, strumenti

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) *On the variation of Latitude*, VII, «A. J.», 277; lo stesso A. discute le osservazioni al cerchio murale di Greenwich (1825-51) in «A. J.», 315 e 320.

(2) «M. N.», 53, p. 120.

(3) «A. J.», 335.

(4) «A. N.», 3166; e «Publ. Obs. Central Nicolas», serie 2, vol. 2.

(5) *Resultate des internationalen Breitendienstes*, Bd. V. pp. 207-9, e bibliogr. citata

ed osservatori, ed in condizioni spesso tutt'altro che propizie alla eliminazione di forti rifrazioni di ambiente.

Indubbiamente le conoscenze oggi acquisite, permettono di discriminare meglio l'imperfetto e difficile materiale del secolo scorso, e di ottenere i rispettivi elementi della oscillazione libera (chandleriana) dell'asse terrestre evitando conclusioni illusorie meno evitabili al tempo di Chandler e degli altri vecchi ricercatori.

In un'altra ricerca <sup>(6)</sup> si è analizzato il moto polare dal 1890 al 1940, basandosi sulla accentuata analogia col fenomeno dei battimenti per la più opportuna disposizione e discussione del materiale. Le componenti della polodia sono risultate in modo nitido; l'oscillazione di Chandler non solo è risultata variabile fortemente in ampiezza, ma anche la durata del periodo, intorno al 1923-25, ha subita una caduta piuttosto brusca da 1.189 ad 1.144 anni. Si è anche ivi proposta, in luogo della analogia del « pendolo bombardato » di Yule, quella più adeguata di un pendolo a lunghezza perturbata, o non compensato; la relativa discussione servirà qui di guida, come di controllo dei risultati.

2. Si procede anzitutto all'identificazione dei successivi periodi d'oscillazione complessiva del polo (oscillazione sull'asse X). Oltre ai dati delle fonti citate, alcuni altri sono presi da due ricerche di E. F. Van de Sande Bakhuizen <sup>(7)</sup>, e la data 1880.84 per Pulkova da una di Vocca <sup>(8)</sup>. È sufficiente considerare i soli massimi di latitudine (passaggi della polodia al meridiano + X), notando quanto segue relativamente alle serie usate.

Per la serie di Chandler si sono preferiti i valori grafici diretti di « A. J. », 277, senza perequazione o quasi, anziché quelli riportati dall'autore stesso dopo il suo trattamento numerico; la differenza del resto è senza conseguenze. A tutte le date di Pulkova si è tolto 0.1 anni, per la presumibile riduzione alla fase di Greenwich. Fino al 1848 si sono riportati per questa serie i dati del riferimento <sup>(3)</sup>, le cui incertezze non sembrano superate nelle successive riduzioni, fino alla definitiva di « Bull. Ac. Imp. des Sc. de St. Petersburg », V serie, 2, 1895. Si osservi che in simili incertezze può servire di controllo una proprietà della composizione delle oscillazioni armoniche: il numero di oscillazioni risultanti in un intervallo, è usualmente il numero stesso di oscillazioni della componente predominante. La prima ricerca citata di V. de S. Bakhuizen dà già le date corrette per simile riduzione; non così quelle della seconda, le quali quindi sono state diminuite di 0,04 anni per ridurle dalla fase di Berlino a quella di Greenwich. Dello stesso Autore non vengono naturalmente considerate le date che egli riferiva dalle serie di Greenwich, Pulkova o Chandler. Si ha così la Tabella I, esclusa la serie Pond-Airy di Greenwich 1825-40, che sarà riportata direttamente alla Tabella II. In questa

(6) « Contr. Astron. Capodimonte », serie II, vol. III, n. 8.

(7) « Koninklijke Acad. Wetensch. Amsterdam », 1898; ed « A. N. », 3261.

(8) « Contr. Astron. Capodimonte », serie II, vol. II n. 11.



Tabella I, per economia di spazio, l'anno intero è riportato per la sola serie di Chandler; per le altre sono riportati i soli centesimi, essendo evidenti le variazioni di intero dove occorrono; al 73.75 corrispondono 74.18 e 74.29. Gli interrogativi indicano punti dubbi.

TABELLA I.

*Passaggi della polodia al meridiano di Greenwich (+ X)  
per varie determinazioni.*

CHAN.	Pulk.	Green.	CHAN.	Pulk.	Green.	BAKH.	CHAN.	Pulk.	Green.	BAKH.
1839.		.70	1856.42		.42		1875.10?	.32	.33	
40.58		75	57.42		33		76.50	60	33	
41.58		84	58.63		33		77.67	54	58	
42.63	.60	75?	59.67		84		78.80	80?	71?	
43.53	62	71	60.84?		21?		79.92	87?	60	
44.58	44	37	61.84		08		81.10?	84?	29?	
45.58	61	71	62.54?		84		82.50?	36	25?	
46.67	70	92	63.58		58		83.58	50	37	
47.96	62	84	64.75	.66	63		84.67	73	35	
48.		50?	65.89	79	84	.75	85.	86	84	
49.		71	67.04	98	00	00	87.	05	21??	
50.		63	68.16	30	29	12	88.	25	29	.18
51.		33	69.54	42	50		89.58	53	50	42
52.67		46	70.71	60	33		90.75	65	71	58
53.75		58	71.80	85	58		91.75	70	63	
54.58?		58?	72.85?	00	00?					
55.37?		25?	73.75	18	29?					

La Tabella I presenta nelle date più punti dubbi, generalmente in corrispondenza alle minime ampiezze prodotte dalla interferenza delle componenti annua e chandleriana. Nonostante l'esame accurato, la interpretazione delle incerte ondulazioni in tali nodi, e persino il decidere se si tratti di una o di due oscillazioni, è difficile. Ciò avviene particolarmente intorno al 1873, 1881, e 1887; quest'ultima data (situata in una lacuna della serie di Chandler), normale per Pulkova, è critica per Greenwich, a causa di un massimo anormale superfluo verso il 1886.50, le cui cause devono essere quelle accen-

nate all'inizio, estranee alla effettiva variazione delle latitudini. Il criterio seguito in queste incertezze, è che la somma di due intervalli consecutivi superi i minimi intervalli effettivi sicuramente osservati, altrimenti deve considerarsi una sola oscillazione. In ogni caso è da tener presente che questi preliminari hanno scopo principalmente indicativo, per determinare con miglior criterio il termine annuo da dati razionalmente classificati; e questa determinazione non è molto sensibile alle incertezze predette.

Il numero di serie per anno adoperato in media da Chandler è 3.6; tenuto anche conto della omogeneità delle serie di Pulkova e Greenwich, si possono attribuire alle date i pesi seguenti: Ch. 2, P. 1, Gr. 1, B. 1. Si ottengono così, per le date concluse dei passaggi i risultati della Tabella II, in cui le differenze  $\bar{\Delta}$  sono perequate di 3 in 3 valori.

TABELLA II.

*Passaggi della polodia al meridiano + X.*

Data	$\bar{\Delta}$	Data	$\bar{\Delta}$	Data	$\bar{\Delta}$	Data	$\bar{\Delta}$
1825.8		1841.67	0.99	1857.39	1.10	1875.21	1.20
26.7	1.00	42.65?	0.94	58.53	1.19	76.48	1.19
27.7	0.97	43.63	0.99	59.73	1.13	77.61	1.15
28.8?	1.00	44.69	1.05	60.96	0.97	78.78	1.16
29.6	1.00	45.62	1.12	61.93	0.87	79.93	1.21
30.7	1.10	46.74	0.96	62.64?	0.92	81.08	1.19
31.8	1.00	47.84	0.99	63.58	1.06	82.40	1.17
32.9	0.97	48.50?	0.93	64.70	1.14	83.51	1.15
33.7?	0.93	49.71?	0.94	65.83	1.17	84.60	1.21
34.7	1.00	50.63?	0.96	67.01	1.23	85.85	1.21
35.7	1.07	51.33?	1.02	68.21?	1.19	87.13	1.22
36.7	1.03	52.60	1.08	69.50	1.18	88.24	1.19
37.9	1.00	53.69	0.91	70.59	1.14	89.52	1.16
38.8	0.91	54.58?	0.91	71.76	1.14	90.69	1.10
39.7?	0.96	55.33?	0.94	72.93?	1.15	91.71	
40.64	0.98	56.42	1.07	74.01?	1.18	92.82	

L'andamento dei valori  $\bar{\Delta}$  è riprodotto alla fig. 1, gli asterischi indicano le epoche in cui l'interferenza dà sul grafico la minima ampiezza evidente alla oscillazione somma. Analogamente al riferimento <sup>(6)</sup>, si osserva

che l'andamento è notevole, e caratteristico della composizione di due moti armonici ricorrenti approssimativamente nella stessa fase reciproca ogni 6 o 7 anni circa. L'interpretazione del diagramma suggerita dalla teoria dei battimenti, indica che verso il 1864 si è avuta una discontinuità, nel senso che si è alterato notevolmente il rapporto in ampiezza dei due moti componenti. Infatti, applicando le conclusioni della teoria, ricordate al § 3 del riferimento <sup>(6)</sup>, risulta:

Fino al 1864 circa, in corrispondenza ai massimi d'ampiezza, periodo massimo e compreso tra quello delle componenti; dunque predomina la componente annua.

Successivamente, in corrispondenza ai minimi d'ampiezza, periodo massimo e maggiore del chandleriano, dunque è più intensa la componente di Chandler. Quest'ultimo risultato si ricollega esattamente con l'analogo posteriore al 1890, ciò che può ritenersi un utile controllo.

3. Ora si possono ricavare alcune deduzioni dalla fig. 1. Si osserva anzi tutto intorno al 1864 la discontinuità detta, che usata come epoca di separazione dà due successioni di massimi e minimi:

max.	31.2	36.2	41.2	46.2	52.7	59.2	
min.	1828.2	34.2	39.2	43.2	49.3	55.3	62.3
max.	1867.6	75.8	80.5	87.7			
min.	71.8	78.2	84.0	91.2			

Per dedurre il termine annuo, occorre tener conto di queste divisioni approssimate, e nel medesimo tempo delle estensioni e lacune delle serie disponibili. Occorre fin dall'inizio non presumere molto; le cause di errore

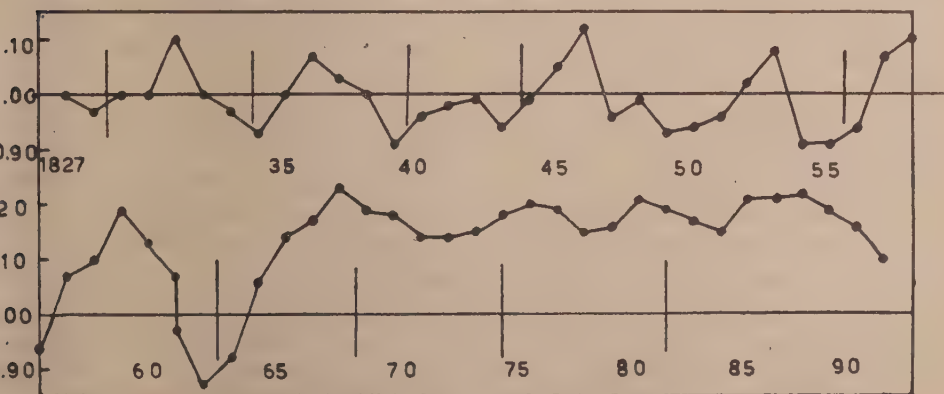


Fig. 1. - Andamento delle  $\bar{\Delta}$  (Tabella II).

già accennate si riflettono interamente sul termine annuo, e confondono le effettive più minute oscillazioni; quindi risulteranno indicazioni grossolane anzichè termini ben delineati.

Nell'intervallo 1828-43, il più incerto, si osservano tre periodi di battimenti alquanto diversi, in media ciascuno di 5 anni in corrispondenza a 4 cicli di Chandler, che risultano così sulla media di anni 1.25. Le componenti sono in fase uguale alle date dei massimi. Dal minimo prossimo al 1843 al seguente vi è un intervallo di 6 anni, con periodo chandleriano quindi prossimo ad 1.20; ma riguardando i massimi antecedente e seguente, si vede che questo periodo appare dapprima maggiore per cadere poi.

Nell'intervallo 1846-59 (o 49-62) si hanno due intervalli di battimenti di anni 6.5 ciascuno, che indicano un periodo medio chandleriano 1.18.

Dopo la discontinuità, dal 1867 circa, sono indicati tre periodi di battimenti di circa 7 e 6 anni, con periodo di Chandler prossimo ad 1.18 o 1.20.

Adattandosi più o meno alle suddette intervallazioni, tenuto conto della discontinuità riscontrata e dell'estensione e lacune delle serie, si può effettuare la valutazione del termine annuo per gli intervalli seguenti:

a) Serie di Chandler: 1°, 1841.0-45.0; 2°, 45.0-49.0 (per questo intervallo, si adotta la media 43.0-49.0); 3°, 52.0-58.0; 4°, 58.0-64.0; 5°, 67.0-74.0; 6°, 74.0-84.0 (si adotta la media degli intervalli concatenati 74.0-80.0 e 78.0-84.0).

b) Serie di Greenwich: cerchio murale, 1°, dall'inizio fino al 1843.2, adottata la media dei risultati concatenati 1825.4-40.4 e 28.2-43.2, molto simili tra loro e simili ad altre combinazioni provate; 2°, dal 43.2 al 51.2, media dei risultati concatenati 43.2-49.2 e 45.2-51.2. Segue la serie del cerchio dei passaggi: 3° 1851.0-57.0; 4° 57.0-64.0; 5° 67.0-74.0; 6° 74.0-80.0; 7° 80.0-87.0.

c) Per la serie di Pulkova: non si riportano valutazioni del termine annuo, per cui si rinvia alla Memoria dell'Ivanof in « Bull. Imp. Ac. ... », citata nel testo del § 2, per i periodi 1843-49 e 64-75; per questi la semi-ampiezza d'oscillazione annua risulta 0".14 e 0".06 rispettivamente; per il periodo seguente si rinvia alla seconda citazione del riferimento (4). Del resto l'oscillazione chandleriana, che qui direttamente interessa, è data già elaborata dal Wanach al riferimento (5).

I risultati per le serie di Chandler e Greenwich sono riportati alla Tabella III, per mesi successivi o per decimi di anno. I calcoli numerici furono anche ripetuti con intervallazioni diverse, con conferma dei risultati.

Come vedesi, si hanno differenze accentuate da un periodo all'altro; le più notevoli riguardano la serie di Greenwich in alcuni intervalli; ciò sembra corrispondere principalmente (come accennato) a diverse combinazioni di errori di declinazioni stellari e di rifrazione ambientale. Inoltre il termine annuo è spesso di ampiezza circa doppia di quella risultante dalle osservazioni più accurate posteriori, ciò che conferma trattarsi di deviazioni estranee alla variazione delle latitudini.



## TABELLA III.

*Termine annuo delle serie di Chandler e Greenwich.*

## a): CHANDLER.

1°:	— 14	— 8	— 4	— 2	0	+ 10	+ 19	+ 19	+ 10	— 1	— 1	0
2°:	— 13	— 23	— 23	— 21	— 4	+ 6	+ 12	+ 11	+ 2	— 4	— 6	— 6
3°:	— 20	— 18	— 2	+ 4	+ 8	+ 3	+ 3	+ 2	+ 1	— 7	— 19	— 22
4°:	— 5	— 7	— 4	— 1	+ 2	+ 9	+ 12	+ 11	+ 11	+ 6	+ 2	+ 2
5°:	— 2	— 2	— 3	— 1	+ 2	+ 2	+ 4	+ 3	+ 5	+ 1	— 2	0
6°:	— 4	— 4	— 1	— 1	— 2	0	+ 5	+ 3	— 2	— 2	+ 2	— 2

## b): Greenwich

1°:	— 4	— 11	— 10	— 8	— 6	— 3	— 2	+ 4	+ 13	+ 16	+ 12	+ 8
2°:	+ 3	— 3	— 3	— 6	— 3	0	+ 5	+ 6	+ 12	+ 19	+ 20	+ 11
3°:	— 29	— 15	— 6	— 3	— 4	— 5	0	+ 3	+ 1	— 17	— 27	— 30
4°:	+ 16	+ 20	+ 31	+ 31	+ 36	+ 28	+ 30	+ 26	+ 28	+ 29	+ 26	+ 19
5°:	— 25	— 25	+ 17	0	+ 10	+ 12	+ 1	+ 1	— 5	— 5	— 17	— 22
6°:	— 2	+ 1	+ 17	+ 20	+ 26	+ 28	+ 29	+ 24	+ 17	+ 12	+ 5	— 1
7°:	— 7	— 9	+ 8	+ 19	+ 24	+ 20	+ 18	+ 17	+ 14	+ 13	+ 11	0

4. In riguardo al termine chandleriano, vediamo di fissare meglio, nei particolari le indicazioni date in blocco in base alla teoria dei battimenti; certamente sono da attendersi gravi difficoltà locali a causa delle preponderanti apparenze annue esaminate e degli errori. Per ottenerlo, non v'è che da sottrarre l'annuale dai dati di partenza, periodo per periodo e serie per serie. Ancora qui per economia di spazio e per le fluttuazioni risultanti, spesso visibilmente erratiche, si preferisce non riportare dettagliatamente i risultati diretti. Ricercate sul diagramma residuo le date dei massimi (passaggi al meridiano + X), si riportano alla 1<sup>a</sup> colonna della Tabella IV (medie delle serie, ottenute attribuendo come al § 2 peso doppio a quella di Chandler). Un interrogativo indica punto dubbio, in cui il diagramma empirico potrebbe interpretarsi anche diversamente, o in cui le serie discordano; doppio interrogativo indica andamento locale visibilmente anormale e con fluttuazione locale contraria alla presunta; un esclamativo indica solo che la posizione del massimo è grossolanamente approssimata per indecisione grafica. Alle date seguono le differenze prime  $\Delta_1$ , e quindi le differenze seconde accumulate  $\Sigma\Delta_2$  (somme volta per volta di tutte le differenze seconde precedenti).  $\Delta_1$  è in anni,  $\Sigma\Delta_2$  in centesimi di anno.

TABELLA IV.

*Passaggi del polo componente (fittizio) chandleriano  
al meridiano di Greenwich (+ X).*

Data	$\Delta_1$	$\Sigma\Delta_2$	Data	$\Delta_1$	$\Sigma\Delta_2$	Data	$\Delta_1$	$\Sigma\Delta_2$
1826.0	1.2		? ?	1.14 ?	— 6	1871.78	1.20	0
27.2	1.1	— 10	1850.20 ?	1.10 ?	— 10	72.98	1.13	— 7
28.3	1.0	— 20	51.30 !	1.20	0	74.11	1.09	— 11
29.3 !	1.4	+ 20	52.50 !	1.10	— 10	75.20	1.15	— 5
30.7	1.1	— 10	53.60	1.37	+ 17	76.35	1.22	+ 2
31.8 !	1.4	+ 20	54.97	1.20	0	77.57	1.18	— 2
33.2	1.4	+ 20	56.17	1.13	— 7	78.75	1.23	+ 3
34.6 ?	1.2 ?	0	57.30	1.23	+ 3	79.98	1.10	— 10
35.8 ?	1.1 ?	— 10	58.53	1.14	— 6	81.08	1.14	— 6
? ?	1.1 ?	— 10	59.67	1.26	+ 6	82.22	1.13	— 7
38.0 ?	1.1 ?	— 10	60.93	1.17	— 3	83.35	1.30	+ 10
39.1 ?	1.3 ?	+ 10	62.10	1.40	+ 20	84.65	1.25	+ 5
40.4 ?	1.4 ?	+ 20	63.50 !	1.22	+ 2	85.90	1.17	— 3
41.8 ?	1.5 ?	+ 30	64.72	1.16	— 4	87.07	1.23	+ 3
43.3 ?	1.06	— 14	65.88	1.05	— 15	88.30	1.25	+ 5
44.36	1.26	+ 6	66.89	1.27	+ 7	89.55	1.15	— 5
45.62	1.23	+ 3	68.20	1.30	+ 10	90.70		
46.85	1.07	— 13	69.50	1.15	— 5			
47.92	1.14 ?	— 6	70.65	1.13	— 7			

I periodi si accordano a gruppi con quelli conclusi al § 3; ed anche il rapporto d'ampiezza delle due componenti è nel senso concluso al § 2, dovendo tuttavia tener presente che la componente annua effettiva è incognita.

Fino al 1843 circa permangono in ogni caso dubbi notevoli. Non avendo riportati dettagliati sviluppi numerici e per obiettività, diciamo che la interpretazione delle oscillazioni grafiche del residuo chandleriano si può forzare in un senso o nell'altro nell'incerto intervallo iniziale. Modificando di poco alcune date riportate (ciò che si accorda con varie indecisioni di esse), si potrebbero inserirne delle altre (30.0, 33.8, 36.2), ottenendo una oscillazione media di anni 0.94; o toglierne alcune (28.3, ?? = circa 36.9, 41.2) ottenendo

un periodo chandleriano medio di anni 1.44. Contro queste soluzioni, non solo è il fatto che l'interpretazione del grafico residuo appare più arbitraria, ma ancora che gli scarti degli intervalli singoli dal valor medio fanno apparire vantaggiosa la soluzione adottata nella Tabella IV. Ad ogni modo i risultati nell'intervallo 1826-43 possono ritenersi solo con grande riserva, e qualche considerazione di essi è piuttosto dovuta alla loro consistenza con le prime tre ondulazioni della fig. 1, le quali a loro volta corrispondono bene alla teoria dell'interferenza dei moti armonici.

Posteriormente i dubbi sono assai attenuati; il più grave si ha nell'intervallo 47.9-50.2, epoca di controfase delle componenti, in cui si dispone della sola serie di Greenwich, che dà una caduta locale, visibilmente anormale dei valori; però l'anomalia è del tutto isolata, e si può superare senz'altro ammettendo un massimo (perduto dalle osservazioni) intorno al 1850.0. Successivamente, l'andamento dell'oscillazione è sempre inequivocabile, e qualche dubbio può riguardare solo la localizzazione esatta delle date.

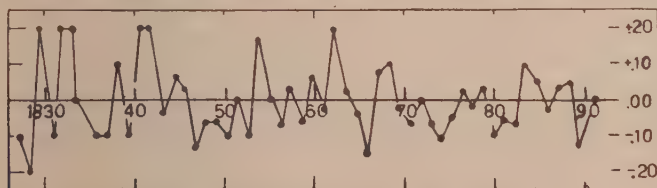


Fig. 2. - Andamento delle  $\Sigma\Delta_2$  (Tabella IV).

5. Come è stato detto al § 6 del riferimento <sup>(6)</sup>,  $\Sigma\Delta_2$  (il cui andamento è dato dalla fig. 2 in una 2<sup>a</sup> approssimazione non riportata), è un indice sensibile ed efficiente di variazioni e perturbazioni di periodicità, in periodo e fase. Osservando i tratti del diagramma all'incirca tra le date 1826-43-50-63-75-90 si rilevano piccole differenze di ordinate medie, e quindi di periodo, sommariamente in accordo con le indicazioni dedotte al § 3. Che siano differenze reali, sembra controllato dalla evidente sistematicità degli scarti tra epoche osservate (1<sup>a</sup> colonna Tabella IV) e calcolate con periodo uniforme, per esempio per le 40 oscillazioni 1843.15-90.65. Tuttavia dati i notevoli errori ed incertezze dei termini annui eliminati, qualche variazione del periodo di Chandler si potrà accettare solo per le lunghe persistenze di ordinate medie della fig. 2, concludendo i seguenti risultati, ogni epoca riportata essendo la media di tre consecutive della Tabella IV:

Epoche	1826.0	43.15	63.44	90.65
Periodo, anni	1.225	1.192	1.183	

Si noti che le variazioni date da Chandler nel 1894 <sup>(9)</sup>, come quelle di Kimura <sup>(10)</sup>, divergono dalle qui dedotte. Le vedute di Chandler in proposito, già rese note in «A. J.», 267, furono contestate dal Newcomb <sup>(11)</sup>.

(9) «A. J.», 315 e 320.

(10) «M. N.», 78, p. 163.

(11) «A. J.», 271.

Dopo quanto detto, il valore 1,225 non dà molto affidamento, e cadrebbe ad 1.20 con correzioni possibili di 0.3 alle prime date della Tabella IV; mentre i valori successivi, 1.192 ed 1.183 risultano discretamente controllati. In conclusione possono ritenersi questi ultimi valori del periodo Chandleriano, con qualche evidenza di diminuzione conseguente alla discontinuità intorno al 1863. Il fatto è analogo al riscontrato pel 1923-24 (V. riferimento <sup>(6)</sup>), ma qui avviene insieme ad una caduta d'ampiezza del termine annuo, evidente nella serie di Chandler (Tabella III) e di Pulkova (2° riferimento della nota <sup>(4)</sup>), mentre nel 1923-24 si ha caduta d'ampiezza del termine di Chandler.

In qualche ricerca geofisica, possono interessare le date della Tabella IV.

**Astronomia.** — *Teoria approssimata del pianetino (552) Sigelinde.* Nota di P. SCONZO, presentata (\*) dal Socio G. SILVA.

1. Il pianetino (552) Sigelinde, appartenente al gruppo di Hecuba, ha un moto medio diurno  $\mu = 633''.257$  (valore migliorato) ed i valori degli elementi  $i$  e  $\varphi$  della sua orbita non superano entrambi i  $10^\circ$ ; esso si presta quindi abbastanza bene all'applicazione del metodo elaborato da von Zeipel <sup>(1)</sup> e da Leuschner <sup>(2)</sup> per il calcolo approssimato delle perturbazioni generali di Giove. Io mi sono servito delle comode tavole del Rabe <sup>(3)</sup>; appositamente costruite per poter impiegare la macchina calcolatrice, e qui espongo brevemente i risultati ottenuti, sia del calcolo dei termini degli sviluppi delle espressioni delle perturbazioni, che del susseguente calcolo di miglioramento dell'orbita, fondato sulle osservazioni di 9 opposizioni, riferentesi al periodo 1926-1939 <sup>(4)</sup>.

Dal 1904, epoca della sua scoperta <sup>(5)</sup>, sino all'anno 1925, del pianetino furono calcolate, da Stracke <sup>(6)</sup>, perturbazioni speciali di Giove. Come elementi di partenza ho adottato quelli dedotti dal predetto autore, in seguito ad un miglioramento d'orbita fondato su 6 opposizioni, relative alle osservazioni eseguite durante il periodo 1904-1919.

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) H. von ZEIPPEL, *Angenäherte Jupiterstörungen für die Hecuba-Gruppe*, «Mem. Ac. Sc. St. Pétersbourg», ser. VIII, t. XII, 1902.

(2) A. O. LEUSCHNER (in collaborazione con A. E. GLANCY ed S. H. LEVY), *On v. Zeipel's Theory of the perturbations of the minor planets of the Hecuba group*, «Mem. Nat. Ac. Sc. Washington», vol. XIV, 1922.

(3) E. RABE, *Numerische Tafeln zur Berechnung genäherter allgemeiner Jupiterstörungen für die kl. Planeten der Hecuba-Gruppe*, «Preuss. Ak. Wiss. Berlin», Bd. XVIII, 1937.

(4) L'ultima osservazione risale al 1941 ed è dubbia; essa quindi non è stata presa in considerazione nel presente calcolo. Cfr. «R. I.», n. 2384.

(5) Il pianetino fu scoperto il 14 dicembre 1904 da M. Wolf ad Heidelberg, Cfr «A.N.», 167, 47.

(6) Cfr. *Kleine Planeten*, «A.R.I.», 1920 ed annate seguenti.



La presente elaborazione si può quindi ritenere un prolungamento di quella già esistente, sopra menzionata, sebbene completamente diversi ne siano la natura ed il procedimento, in quanto alle perturbazioni speciali si sostituiscono quelle generali.

2. Il materiale di osservazione, posseduto dall'« A. R. I. »<sup>(7)</sup>, che per uniformità ho ridotto al riferimento dell'equinozio normale 1950.0, è il seguente:

TABELLA I.

N°	Data (1)	Posizione 1950.0		Osservatorio	Pubblicazione	M
		$\alpha$	$\delta$			
1	1926 novembre 3 <sup>d</sup> .9755	50 <sup>o</sup> .723	+ 25 <sup>o</sup> .385	Barcellona	« B. Z. » 1926, 43	162 <sup>o</sup>
2	1928 gennaio 12 .8525	118.855	+ 15 .716	Torino	» 1928, 10	238
3	1929 aprile 15 .9069	188.766	— 15 .604	Algeri	« J. O. » XII, 153	318
4	1930 luglio 26 .9492	291.007	— 16 .922	»	» XIV, 77	42
5	1931 settembre 16 .0266	11.603	+ 16 .404	Simeis	« R. I. » n. 488	116
6	1935 maggio 2 .9183	234.551	— 26.515	Johannesburg	» » 1209	348
7	1936 agosto 25 .8889	326.050	— 3.348	Königstuhl	» » 1429	74
8	1937 ottobre 28 .8807	36.230	+ 23.030	Bergedorf	» » 1652	150
9	1939 gennaio 12 .8563	103.475	+ 19.733	Nizza	» » 1918	226

(1) Espressa in T. U. e corretta del tempo di aberrazione.

Nell'ultima colonna, intestata M, ho voluto riportare il valore arrotondato dell'anomalia media, per avere un'idea della distribuzione delle varie posizioni su tutta l'orbita; si può così constatare che esse, ai fini del calcolo di compensazione, sono convenientemente distribuite e che si può disporre inoltre di un'osservazione (la n. 6) fatta in una posizione sufficientemente vicina al perielio, ciò che consente di apprezzare meglio il grado di precisione dei risultati finali.

3. Non riporto i calcoli parziali ed accessori, che sono stati necessari, per arrivare alla valutazione dei termini delle serie delle perturbazioni generali di Giove, a lungo ed a corto periodo, nè gli altri del raggio vettore, della terza coordinata e delle costanti d'integrazione, nè quelli relativi al miglioramento dell'orbita, ma mi limiterò a dare i risultati ottenuti. Debbo dire soltanto che nel calcolo delle perturbazioni a lungo ed a corto periodo, formule da (1) a (7), seguenti, due approssimazioni successive, relativamente a cia-

(7) Tale materiale, su mia richiesta, mi è stato gentilmente fornito dal predetto Istituto; mi è gradito per questo rivolgere qui il mio più vivo ringraziamento al suo Direttore prof. A. Kopff, come pure al prof. A. Kahrstedt per i suggerimenti avuti prima dell'elaborazione del presente lavoro.

scuna delle osservazioni della Tabella I, sono state sufficienti per raggiungere il grado di precisione richiesto in questo genere di calcoli. Dopo ho eseguito il calcolo di  $v$  e di  $u$  (per l'intelligenza del significato dei simboli qui adottati e delle notazioni che seguiranno, si rimanda alla Memoria del Rabe<sup>(8)</sup>). Il miglioramento dell'orbita infine l'ho effettuato col noto metodo di Tietjen, soltanto per gli elementi  $n_2, \varphi_1, \omega_2$  e  $c_2$ , cosiddetti medi, secondo Hansen e von Zeipel; non è stato invece necessario apportare alcuna modifica agli elementi  $\Omega_0$  ed  $i_0$ .

Relativamente ai termini più cospicui degli sviluppi, e cioè primo e secondo termine della formola (2) ed i termini (0,2), (1,1), (1,3), (2,0), (2,2), (2,4) e (-2,2) della prima parte della Tabella II, ho apportato in ultimo la rettifica, in seguito alla correzione del moto medio  $n_2$ , proveniente dal miglioramento dell'orbita.

In conclusione, partendo dai dati iniziali:

Epoca ed osculazione:  $t_0$  1925 gennaio 0.5 T. M. Gr.

M	41° .569	$\omega$	339° .150	} Ecl. ed equinozio medio 1925.0
$\varphi$	4 .954	$\Omega$	268 .224	
$\mu$	634'' .574	$i$	7 .695	
lg $a$	0 .49835			

ho ottenuto, in base al calcolo, e per la stessa epoca, i seguenti nuovi elementi medi:

$c_2$	43° .9547	$\omega_1$	337° .4246	} Ecl. ed equinozio medio 1950.0
$\varphi_1$	4 .6082	$\Omega_0$	268 .5972	
$n_2$	633'' .2570	$i_0$	7 .6952	
$a_2$	3 .15465			

#### 4. ESPRESSIONI DELLE PERTURBAZIONI GENERALI APPROSSIMATE DI GIOVE. - a) *Perturbazioni a lungo periodo:*

$$(1) \quad [n\delta\chi] = [n\delta\chi]_1 + 0.02097 [n' \delta\chi'] - 0.00058 n\delta\chi,$$

dove è:

$$(2) \quad [n\delta\chi]_1 = 3^\circ.16182 \sin(2\xi + 98^\circ.1135) + 0^\circ.42586 \sin(4\xi + 348^\circ.586) \\ + 0^\circ.08674 \sin(6\xi + 98^\circ.20) \\ + 0.63466 (\xi - 117^\circ.9141) \{ 0^\circ.002542 \cos(2\xi + 89^\circ.835) \\ + 0^\circ.000350 \cos(4\xi + 193^\circ.21) \}$$

ed  $[n' \delta\chi']$  rappresenta il termine della perturbazione secolare di Giove, ricavabile da apposita tavola<sup>(9)</sup>.

Nell'espressione di  $[n\delta\chi]_1$ , l'argomento  $\xi$  va espresso in gradi ed il suo valore si ricava da:

$$(3) \quad \xi = 0.990094 (0.027500 \varepsilon - [n' \delta\chi']) + 116^\circ.8320^{(10)}.$$

(8) Loc. cit. (3)

(9) Ibidem, Tabella I<sub>b</sub>.

(10) È da avvertire che la  $\varepsilon$  fa l'ufficio del tempo  $t$ , di essa perciò, nella (3) e nel calcolo degli argomenti  $\chi$ , sono da conservare gli eventuali multipli di  $360^\circ$ . Lo stesso dicasi degli argomenti  $\xi$  e  $\vartheta$  allorchè figurano nei coefficienti delle (2), (6) ed (8).

A sua volta l'anomalia eccentrica  $\varepsilon$  si ricava dall'equazione di Kepler:

$$(4) \quad \varepsilon - 4^{\circ}.60326 \sin \varepsilon = 43^{\circ}.9547 + 0^{\circ}.17590474 (t - t_0) + n\delta\chi,$$

Il calcolo di  $n\delta\chi$  si effettua, dopo ch'è nota anche l'espressione delle perturbazioni a corto periodo, con la formola:

$$(5) \quad n\delta\chi = [n\delta\chi] + (n\delta\chi - [n\delta\chi]).$$

b) *Perturbazioni a corto periodo:*

$$(6) \quad n\delta\chi - [n\delta\chi] = \Sigma k \sin(\chi + K) + 0.01745 (\vartheta - 117^{\circ}.497) \Sigma k' \cos(\chi + K') + \\ + [0.01745 (\vartheta - 117^{\circ}.497)]^2 \Sigma k'' \sin(\chi + K''),$$

dove l'argomento  $\vartheta$  va espresso in gradi ed il suo valore si ricava da:

$$(7) \quad \vartheta = 0.47250 [n\delta\chi]_t + \xi.$$

Inoltre i valori delle costanti  $k, k', k'', K, K', K''$  si ricavano dalla tabella II, riprodotta in seguito, ed ivi è  $\chi = i \frac{\varepsilon}{2} + j\vartheta$ .

c) *Perturbazioni del raggio vettore:*

$$(8) \quad v = \Sigma k \cos(\chi + K) + 0.01745 (\vartheta - 117^{\circ}.497) \Sigma k' \sin(\chi + K') + \\ + [0.01745 (\vartheta - 117^{\circ}.497)]^2 \Sigma k'' \cos(\chi + K'').$$

Per l'argomento  $\vartheta$  e per le varie costanti  $k, \dots, K, \dots$ , valgono le stesse avvertenze di cui sopra.

d) *Perturbazioni della terza coordinata:*

$$(9) \quad u = \Sigma k \sin(\chi + K) + T \Sigma k' \cos(\chi + K'),$$

dove  $T$  va espresso in anni giuliani a partire dall'epoca  $t_0$ .

5. Per il calcolo delle posizioni geocentriche del pianetino sull'orbita perturbata, riporto infine i seguenti gruppi di formule che servono allo scopo, avvertendo che il riferimento è all'equinozio normale 1950.0:

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{r} \sin f = 3.14445 \sin \varepsilon \\ \bar{r} \cos f = 3.15465 (\cos \varepsilon - 0.08034) \\ r = (1 + v) \bar{r}. \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \rho \cos \delta \cos \alpha = 0.99100 r \sin (f + 358^{\circ}.584) + X + \Delta x \\ \rho \cos \delta \sin \alpha = 0.92022 r \sin (f + 265^{\circ}.291) + Y + \Delta y \\ \rho \sin \delta = 0.41345 r \sin (f + 285^{\circ}.888) + Z + \Delta z, \end{cases}$$

dove  $X, Y, Z$  sono le coordinate geocentriche del Sole e le correzioni  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  si ricavano da:

$$(12) \quad \begin{cases} \Delta x = -0.13386 d\beta \\ \Delta y = -0.39129 d\beta \\ \Delta z = +0.91048 d\beta \end{cases}, \quad (d\beta = 3.18332 u).$$

TABELLA II.

$\gamma$		$n\delta z - [n\delta z]$		$v$		$u$	
$i$	$j$	$k$	$K$	$k$	$K$	$k$	$K$
0	0			0,00021	0° 00	0,00001	90° 00
0	2			258	280 .7427	11	131 .186
0	4			68	174 .958	6	18 .43
0	6			17	79 .992		
1	1	0° 121	51° 710	60	231 .789	6	135 .00
1	3	163	312 .769	97	133 .746	12	2 .243
1	5	37	220 .601	28	43 .531	5	258 .69
—1	1	22	30 .07	2	0 .00	12	255 .963
—1	3	8	123 .69	11	131 .19	6	161 .57
2	0	3	18 .33	1	180 .00	53	250 .201
2	2	1 .087	104 .7650	998	289 .5620	29	243 .435
2	4	0 .179	7 .046	166	185 .5383	24	55 .008
2	6	49	274 .667	45	87 .455	9	310 .60
2	8	8	180 .00	12	0 .00		
—2	2	34	116 .565	19	105 .524	48	291 .801
—2	4	4	123 .69	1	45 .00		
3	1			2	318 .33	7	243 .43
3	3	44	339 .995	45	157 .964	2	90 .00
3	5	17	237 .26	16	55 .305	2	296 .57
3	7	1	135 .00	2	316 .42	1	160 .66
—3	1			2	100 .20	4	236 .31
4	0			1	132 .16		
4	2	23	282 .68	1	336 .04	1	160 .66
4	4	7	195 .95	5	36 .87		
4	6	3	108 .43	1	264 .29	2	81 .47
4	8			1	189 .18		
5	5	3	84 .29	7	261 .87		
5	7	2	333 .43	3	172 .17		
		$k'$	$K'$	$k'$	$K'$	$k'$	$K'$
0	0			0,000032	270° 00	0,000005	180° 00
0	2			49	90 .00		
2	0	0° 2150	186° 408	1882	186 .2226	66	333 .825
2	4			21	17 .53		
—2	0	22	187 .88	19	51 .34		
4	0	43	12 .09	17	120 .96		
		$k''$	$K''$	$k''$	$K''$		
2	0	0° 0010	191° 31	0,000008	14° 04		



6. In ultimo, per avere un'idea del grado di precisione raggiunto, ho eseguito il confronto tra le posizioni osservate, di cui alla Tabella I, riportata avanti, e quelle calcolate, tenuto conto delle perturbazioni e del miglioramento dell'orbita; il calcolo ha fornito i seguenti residui (nel senso O—C):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\cos \delta \Delta \alpha$	-0 <sup>o</sup> .032	-0 <sup>o</sup> .054	-0 <sup>o</sup> .044	+0 <sup>o</sup> .033	+0 <sup>o</sup> .026	+0 <sup>o</sup> .017	-0 <sup>o</sup> .009	+0 <sup>o</sup> .047	-0 <sup>o</sup> .020
$\Delta \delta$	+0.001	+0.062	+0.025	-0.015	-0.028	+0.042	-0.019	-0.039	-0.030

che sono molto soddisfacenti, nell'ordinario grado di approssimazione che si suole pretendere da calcoli del genere <sup>(11)</sup>. È da presumere perciò che i nuovi elementi medi dell'orbita possano servire, senza altre modifiche, per più di una decina d'anni, ai fini della ricerca e dell'ulteriore osservazione del pianetino.

**Fisica.** — *La funzione di Lagrange di alcune particelle elementari.* Nota di L. A. RADICATI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio E. PERSICO.

1. I lavori di Kemmer <sup>(1)</sup> e di Harish-Chandra <sup>(2)</sup> hanno mostrato che le equazioni d'onda del mesone (di spin 1 e 0) e del fotone, possono scriversi in modo formalmente simile a quella dell'elettrone <sup>(3)</sup>

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \psi + \kappa \psi = 0 \quad \left( \kappa = \frac{mc}{\hbar} \right)$$

salvo che le matrici che intervengono nella teoria soddisfano a regole di permutazione diverse da quelle delle  $\gamma_\mu$  <sup>(4)</sup>, e nel caso del fotone poi, il termine  $\kappa = mc/\hbar$  va sostituito con una opportuna matrice. La  $\psi$  poi, che nel caso dell'elettrone è una matrice ad una colonna e quattro righe, ha una colonna e cinque righe per il mesone di spin 0, una colonna e dieci righe per il mesone di spin 1 e per il fotone.

(11) La Direzione dell'«A.R.I.», alla quale li ho comunicati, ha approvato i risultati di cui sopra e mi ha pregato di calcolare preventivamente le effemeridi delle opposizioni del pianetino per gli anni venturi. Il pianetino sarà dunque considerato in avvenire come pianetino «A».

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) «Proc. Roy. Soc. A», 173, 91 (1939).

(2) «Proc. Roy. Soc. A», 186, 502 (1946).

(3) V. ogni trattato di meccanica quantistica; per esempio E. PERSICO, *I fondamenti della meccanica atomica*. Bologna 1940, p. 444.

(4) Si usa la convenzione sulla sommazione degli indici ripetuti. L'indice  $\mu$  varia da 1 a 4;  $x_4 = ict$ .

Mi è sembrato utile studiare le funzioni di Lagrange da cui le equazioni del mesone, del fotone e dell'elettone derivano, per vedere fino a che punto tali equazioni si possano trattare unitariamente, e dove invece vadano introdotte le ipotesi che caratterizzano ciascuna particella. I risultati che si ottengono, per la generalità dell'ipotesi da cui si parte, sono tali da potersi applicare a qualsiasi particella la cui equazione, in assenza di campo elettromagnetico e di interazione con altre particelle, sia del tipo (1).

2. Si consideri la funzione di Lagrange

$$(2) \quad L = \psi^+ A \zeta_v \partial_v^- \psi - \partial_v^+ \psi^+ \zeta_v A \psi + \psi^+ C \psi + \psi^+ D + E \psi$$

dove

$$(3) \quad \partial_v^- = \frac{\partial}{\partial x_v} - \frac{ie}{c\hbar} \Phi_v \quad ; \quad \partial_v^+ = \frac{\partial}{\partial x_v} + \frac{ie}{c\hbar} \Phi_v$$

$\psi^+$  e  $\psi$  sono due funzioni d'onda che individuano il campo;  $\psi^+$  rappresentata da una matrice a  $N$  colonne ed una riga,  $\psi$  da una a  $N$  righe ed una colonna.  $\zeta_v$  sono matrici ad  $N$  righe ed  $N$  colonne costanti per la derivazione rispetto a  $x_v$ ,

$A, C, D, E$ , saranno specificati in seguito; per il momento dobbiamo ritenerli non permutabili con  $\psi^+, \psi, \zeta_v$  e  $A$ , almeno, costante per la derivazione rispetto a  $x_v$ . I potenziali  $\Phi_v$  del campo elettromagnetico esterno sono da considerarsi come  $c$ -numeri,  $i, e, c, \hbar$ , hanno il significato consueto.

Si vede allora facilmente che la condizione

$$\delta \int L d\tau = 0 \quad (d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4)$$

porta come conseguenza, quando le  $\psi^+$  e  $\psi$  si varino indipendentemente, e le variazioni  $\delta\psi^+, \delta\psi$  si annullino al contorno di un qualsiasi volume quadridimensionale  $\tau$ , le equazioni del campo

$$(4, 1) \quad \partial_v^- (A \zeta_v + \zeta_v A) \psi + C \psi + E = 0$$

$$(4, 2) \quad -\partial_v^+ \psi^+ (A \zeta_v + \zeta_v A) + \psi^+ C + D = 0.$$

Se ora si vuole che queste equazioni rappresentino un'unica particella, è necessario stabilire una relazione fra la  $\psi^+$  e la  $\psi$  di modo che una delle due equazioni (4) sia conseguenza dell'altra. Si consideri l'equazione coniugata hermitica della (4, 1)

$$(4, 12) \quad -\partial_4^+ \psi^* (\zeta_1^* A^* + A^* \zeta_1^*) + \partial_k^+ \psi^* (\zeta_k^* A^* + A^* \zeta_k^*) + \psi^* C^* + E^* = 0$$

dove con l'asterisco è indicata la grandezza coniugata hermitica della grandezza senza asterisco (l'indice  $k$  varia da uno a tre). La (4, 12) si identifica con la (4, 2) se si ammette che esista una matrice  $\Lambda$  tale che:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Lambda (A \zeta_k + \zeta_k A) \Lambda^{-1} = (A \zeta_k + \zeta_k A)^* \\ -\Lambda (i A \zeta_4 + i \zeta_4 A) \Lambda^{-1} = (i A \zeta_4 + i \zeta_4 A)^* \\ \Lambda C \Lambda^{-1} = C^* \quad , \quad i E^* \Lambda = D. \end{array} \right.$$

Infatti moltiplicando a destra la (4, 12) per  $i\Lambda$  e tenendo conto delle (5) si ha

$$-i\partial_4^+ \psi^* \Lambda (A\zeta_4 + \zeta_4 A) - i\partial_k^+ \psi^* \Lambda (\zeta_k A + A\zeta_k) + i\psi^* \Lambda C + iE^* \Lambda = 0$$

che si identifica con (4,2) quando si ponga

$$(6) \quad \psi^+ = i\psi^* \Lambda$$

Se poi si richiede che le (4, 1), (4, 2) siano invarianti per la trasformazione di Lorentz

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \quad (a_{\mu\sigma} a_{\mu\sigma} = \delta_{\mu\sigma})$$

è noto<sup>(5)</sup> che deve esistere una matrice  $S$  tale che

$$S^{-1} A \zeta_\mu S = a_{\mu\nu} A \zeta_\nu \quad ; \quad S^{-1} \zeta_\mu A S = a_{\mu\nu} \zeta_\nu A \quad ; \quad S^{-1} C S = C$$

$$\psi' = S\psi \quad ; \quad \psi'^+ = \psi^+ S^{-1} \quad ; \quad D' = S D \quad ; \quad E' = E S^{-1}$$

dove con l'apice sono indicati i simboli nel nuovo riferimento.

3. Per procedere più oltre, e vedere il significato dei simboli che compaiono nella (2), conviene introdurre alcune ipotesi semplificative.

Si ponga anzitutto  $E$  e  $D$  uguali a zero, e si esaminano i due casi particolari.

1° Caso:

$$(7) \quad A, C, \text{ siano } \epsilon\text{-numeri, e } A^{-1} = 0.$$

Allora le (4, 1), (4, 2) divengono

$$\zeta_\nu \partial_\nu^- \psi + \frac{C}{2A} \psi = 0 \quad ; \quad \partial_\nu^+ \psi^+ \zeta_\nu - \frac{C}{2A} \psi^+ = 0.$$

Queste equazioni sono del tipo (1) con  $\kappa = C/2A$  ( $\kappa$  è un  $\epsilon$ -numero). La condizione che  $A$  e  $C$  siano  $\epsilon$ -numeri, porta dunque come conseguenza che le equazioni che si ottengono dalla (2) sono del tipo delle equazioni di particelle con massa di quiete  $m = \kappa\hbar/c$ .

2° Caso: Sia invece

$$(8) \quad \zeta_\nu A + A \zeta_\nu = \zeta_\nu \quad ; \quad A = C \quad ; \quad A^2 = A$$

Le (4, 1), (4, 2) divengono

$$\partial_\nu^- \zeta_\nu \psi + A\psi = 0 \quad ; \quad \partial_\nu^+ \psi^+ \zeta_\nu - \psi^+ A = 0$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni a sinistra per  $1 - A$ , e la seconda a destra per  $1 + A$ , e tenendo conto delle (8) si ha

$$\partial_\nu^- \zeta_\nu A\psi = 0 \quad ; \quad \partial_\nu^+ \psi^+ A \zeta_\nu = 0$$

Dunque quando valgono le (8), dalla (2) si ottengono equazioni del tipo (1) senza termine di massa; le funzioni d'onda in questo caso sono  $A\psi$  e  $\psi^+ A$ .

(5) Cfr. PAULI, « Ann. Inst. Poincaré », 6, 109 (1936).

Le ipotesi (8) caratterizzano pertanto particelle con massa di quiete zero; in particolare i fotoni.

Le equazioni (4) comprendono in sè tanto il caso di particelle con massa di quiete uguale a zero quanto quello di particelle con massa di quiete diversa da zero.

I termini con E e D da cui si è fatta astrazione, tengono conto dell'interazione della particella in esame con altre particelle, cioè con altri campi.

4. Data una funzione di Lagrange L, è noto<sup>(6)</sup> che se ne può trarre un quadrivettore  $s_v$  interpretabile come densità di tetracorrente, nel modo seguente:

$$(9) \quad s_v = -\frac{ie}{c\hbar} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_v \psi)} \psi - \psi^\dagger \frac{\partial L}{\partial (\partial_v \psi^\dagger)} \right)$$

( $\partial_v$  sta per  $\partial/\partial x_v$ ).

Se la L è della forma (2), si ottiene subito

$$(10) \quad s_v = -\frac{ie}{c\hbar} \psi^\dagger (A\zeta_v + \zeta_v A) \psi$$

Si ha anche:

$$(10, 1) \quad s_v = \frac{\partial L}{\partial \Phi_v}$$

In virtù delle equazioni (4, 1), (4, 2) si ha:

$$(11) \quad \partial_v s_v = \psi^\dagger E - D\psi.$$

Perchè la carica sia conservata i termini E e D devono essere tali che

$$(12) \quad \psi^\dagger E = D\psi.$$

Si faccia ora l'ipotesi<sup>(2)</sup> che esista una matrice  $\theta$  tale che

$$(13) \quad \theta \zeta_v A \theta^{-1} = -\tilde{\zeta}_v \tilde{A} \quad ; \quad \theta A \zeta_v \theta^{-1} = -\tilde{A} \tilde{\zeta}_v \quad ; \quad \theta = \tilde{\theta} \quad ; \quad \psi^\dagger = \tilde{\psi}^* \theta$$

dove il segno  $\sim$  indica la matrice trasposta. Con le (13), la (10) diviene:

$$-\frac{c\hbar}{ie} s_v = \tilde{\psi} \theta (\zeta_v A + A \zeta_v) \psi = \tilde{\psi} (\tilde{A} \tilde{\zeta}_v + \tilde{\zeta}_v \tilde{A}) \theta \psi = -\tilde{\psi} \theta (A \zeta_v + \zeta_v A) \psi.$$

Deve quindi essere identicamente:

$$s_v = 0.$$

Le (13) sono quindi relazioni che caratterizzano una particella neutra.

5. Il tensore d'impulso-energia, connesso ad una funzione di Lagrange L, è<sup>(7)</sup>:

(6) Cfr., per esempio WENTZEL, *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*. Wien 1943, p. 15.

(7) Cfr. WENTZEL, loc. cit., p. 13.



$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \psi)} \partial_\mu \psi + \partial_\mu \psi^+ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \psi^+)} - \delta_{\mu\nu} L + \Phi_\mu s_\nu =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \psi)} \partial_\mu^- \psi + \partial_\mu^+ \psi^+ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \psi^+)} - \delta_{\mu\nu} L.$$

Nel caso della funzione di Lagrange (2) si ha, quindi:

$$(14) \quad T_{\mu\nu} = \psi^+ A \zeta_\nu \partial_\mu^- \psi - \partial_\mu^+ \psi^+ \zeta_\nu A \psi - \delta_{\mu\nu} L.$$

Se vale la (12), dalle (10,1), (11) si deduce:

$$s_\nu F_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_\nu} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\Phi_\mu s_\nu)$$

dove  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu$  sono le componenti del campo elettromagnetico.

Seguendo un procedimento indicato da Heisenberg e Pauli <sup>(8)</sup> si verifica allora che in virtù delle equazioni del campo, si ha

$$-\partial_\nu T_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} s_\nu + \psi^+ \partial_\mu D + \partial_\mu E \cdot \psi.$$

Con le ipotesi (7), e specificando opportunamente le  $\zeta_\mu$ , si ha il tensore impulso-energia per gli elettroni ed i mesoni <sup>(1), (9)</sup>; con le (8) si ha invece il tensore impulso-energia per i fotoni <sup>(2)</sup>.

6. Come si vede, la funzione di Lagrange (2) può essere usata, a seconda delle ipotesi che si fanno sulle  $A, C, D, E$ , e sulle  $\psi^+, \psi$ , per particelle di massa di quiete zero o diversa da zero, per particelle cariche o neutre. Le espressioni (10) e (14) per la densità di corrente e per il tensore di impulso-energia sono uguali in tutti i casi.

Nessuna ipotesi si è fatta fin qui sulle matrici  $\zeta_\nu$ , e quindi i risultati ottenuti fino ad ora sono uguali per tutte le particelle la cui equazione d'onda in assenza di campo elettromagnetico sia di tipo (1), qualunque siano le matrici  $\zeta_\nu$  che intervengano nella teoria, sempre che l'interazione con il campo elettromagnetico si possa introdurre per mezzo degli operatori (3). In particolare il formalismo precedente è adatto alla rappresentazione dei mesoni (di spin 0 e 1) dei fotoni e degli elettroni.

Alle proprietà delle matrici  $\zeta_\nu$ , cioè in particolare alle loro regole di permutazione, bisogna fare appello per imporre la condizione della conservazione del momento dell'impulso. Infatti come è noto <sup>(10)</sup>, perchè il momento dell'impulso sia conservato occorre che il tensore  $T_{\mu\nu}$  sia simmetrico. Ora il tensore  $T_{\mu\nu}$  della (14) non è simmetrico; da esso occorre poterne dedurre un altro  $\Theta_{\mu\nu}$  simmetrico, e differente da  $T_{\mu\nu}$  per una divergenza. Ciò si può fare solo quando si siano stabilite le regole di permutazione delle  $\zeta_\nu$ , da cui dipende lo spin della particella.

(8) «Zs. f. Phys.», 56, 1 (1929).

(9) Cfr. per es. PAULI, «Hand. der Phys.», vol. 24-1, p.235.

(10) Cfr. WENTZEL, loc. cit., p. 10.

Inoltre tali regole di permutazione devono consentire di dedurre dalle equazioni del primo ordine (4) delle equazioni del secondo ordine per la  $\psi$  e  $\psi^+$  in cui non figurino più le  $\zeta_v$ . Ciò si richiede per poter considerare questo formalismo adatto alla descrizione di una particella quantistica <sup>(11)</sup>.

7. *Riassumendo*: data una funzione del tipo (2)

1° Devono valere le (5) e (6) perchè la (2) possa considerarsi come la funzione di Lagrange di una particella.

2° Quando le (5) e (6) sono soddisfatte, la (2) è adatta a rappresentare particelle cariche e neutre, con massa di quiete zero e diversa da zero.

La massa dipende dalle ipotesi che si fanno sulle A e C;

la carica dalle relazioni fra  $\psi^+$  e  $\psi$ ;

lo spin dalle regole di permutazione delle  $\zeta_v$ .

3° Le regole di permutazione delle  $\zeta_v$  devono consentire di simmetrizzare  $T_{\mu\nu}$  e di dedurre una equazione del second'ordine per la  $\psi$  in cui non compaiano le  $\zeta_v$ .

Ringrazio il Ch.mo prof. E. Persico del suo interessamento a questo lavoro e dell'aiuto datomi.

**Fisica (Ottica).** - *Il principio di Huygens-Fresnel come conseguenza di quello dell'interferenza inversa.* Nota <sup>(\*)</sup> di G. TORALDO DI FRANCIA, presentata dal Socio G. ABETTI.

§ 1. È noto come la teoria rigorosa dei fenomeni di diffrazione conduca quasi sempre a complicazioni matematiche notevolissime, che solo in rari casi hanno potuto essere superate (per esempio dal Sommerfeld). Pertanto si preferisce spesso valersi di principi non rigorosi, che trovano la loro maggiore o minore giustificazione soprattutto nell'accordo più o meno preciso delle conseguenze tratte da essi con i risultati dell'esperienza.

Il principio classico è quello di Huygens-Fresnel, sul quale in maniera quasi esclusiva si è basata per un secolo la trattazione della diffrazione. Una celebre formula, trovata dal Kirchhoff, ne dette anche una specie di giustificazione matematica.

Recente, invece, è l'introduzione del principio dell'interferenza inversa <sup>(1)</sup>. Esso pure ha dato risultati in ottimo accordo con l'esperienza. Inoltre, specialmente nel caso dei fenomeni di Fraunhofer e nella teoria diffrazionale delle immagini, la sua applicazione permette un'interpretazione del fenomeno concettualmente molto più semplice di quella che discende dal principio di Huygens-Fresnel.

(11) Cfr. PAULI, « Hand. der Phys. », 24, I, p. 240.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1947.

(1) G. TORALDO DI FRANCIA, *Alcuni fenomeni di diffrazione trattati mediante il principio dell'interferenza inversa*, « Ottica », VII (1942).

È naturale ora che ci si domandi quali sono le relazioni fra i due principî. Sono essi in accordo o in contraddizione?

Qui dimostreremo, limitandoci per semplicità al caso di una superficie piana, che il principio di Huygens-Fresnel è conseguenza di quello dell'interferenza inversa. Non è invece vera la proposizione reciproca, in quanto che il principio di Huygens-Fresnel non si applica che a distanza dalla superficie rifrangente e non è quindi in grado di prevedere quei fenomeni superficiali, che sono messi in rilievo dal principio dell'interferenza inversa <sup>(2)</sup>.

§ 2. Su un diaframma piano  $\Sigma$ , con zone più o meno trasparenti, incida un treno monocromatico di onde luminose. Sulla faccia di emergenza da  $\Sigma$  si abbia un'ampiezza complessa  $\vartheta(P)$ , funzione del punto  $P$  considerato. Ora il principio dell'interferenza inversa dice sostanzialmente che da  $\Sigma$  prenderà origine quell'insieme di onde (onde diffratte), capace di dar luogo per interferenza diretta all'ampiezza complessa  $\vartheta(P)$ . Inoltre tali onde si devono propagare rispetto al diaframma nello stesso verso di quella incidente.

Si fissi ora un sistema di assi cartesiani ortogonali  $x, y, z$ , con  $x, y$  sul piano  $\Sigma$ . Si consideri poi una stella di onde piane che si propaghino nello stesso verso dell'onda incidente, allontanandosi da  $\Sigma$ . Ciascuna delle onde sia individuata mediante i coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$  della sua direzione di propagazione ed abbia nell'origine un'ampiezza complessa  $A(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$ . L'ampiezza complessa  $\vartheta(Q)$ , prodotta dall'interferenza di tutte queste onde in un punto generico  $Q(x, y, z)$  al di là del diaframma sarà allora <sup>(3)</sup>

$$(I) \quad \vartheta(Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha, \beta) \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \right] d\alpha d\beta.$$

Per avere l'ampiezza complessa  $\vartheta(P)$  nel punto generico  $P(x, y)$  del diaframma, basterà porre  $z = 0$  nella (I), ottenendo

$$\vartheta(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha, \beta) \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta.$$

Il secondo membro può esser considerato come un integrale di Fourier. Pertanto la  $\vartheta(P)$  del primo membro sarà proprio eguale all'ampiezza complessa  $\vartheta(x, y)$  presente fisicamente su  $\Sigma$ , purchè le ampiezze delle onde diffratte siano date da

$$(2) \quad A(\alpha, \beta) = \frac{I}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(\xi, \eta) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha \xi + \beta \eta) \right] d\xi d\eta.$$

(2) G. TORALDO DI FRANCA, *Le onde evanescenti nella diffrazione*. «*Ottica*», VII (1942) e *La trasmissione totale*. «*Ottica*», VIII (1942).

(3) Si possono far variare  $\alpha$  e  $\beta$  fra  $-\infty$  e  $+\infty$ , pur di ammettere che oltre alle onde piane propriamente dette siano presenti onde evanescenti.

La (2) fornisce le ampiezze complesse all'infinito, in funzione della direzione  $\alpha, \beta$ , ossia risolve il problema di Fraunhofer.

Per avere l'ampiezza complessa nel punto Q a distanza finita, bisognerà sostituire la (2) nella (1), ottenendosi

$$\vartheta(Q) = \frac{I}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \right] d\alpha d\beta \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(\xi, \eta) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha \xi + \beta \eta) \right] d\xi d\eta.$$

Ora l'esecuzione delle integrazioni in questo ordine riesce quasi sempre molto difficile o praticamente impossibile. Ma si può ricorrere all'artificio di scambiare le integrazioni nel modo seguente

$$\vartheta(Q) = \frac{I}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(\xi, \eta) d\xi d\eta \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} [\alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta) + \gamma z] \right\} d\alpha d\beta.$$

Portando l'origine nel punto P del diaframma, di coordinate  $\xi, \eta$  e chiamando X, Y, Z i nuovi assi coordinati, paralleli ai precedenti, scriveremo

$$(3) \quad \vartheta(Q) = \frac{I}{\lambda^2} \int_{\Sigma} \vartheta(P) d\Sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \right] d\alpha d\beta.$$

essendo  $d\Sigma$  l'elemento di superficie sul diaframma.

§ 3. Nel caso che il punto Q sia situato ad una distanza dal diaframma di ordine superiore alla lunghezza d'onda, si può dare una valutazione asintotica degli ultimi due integrali della (3), approfittando del fatto che  $2\pi/\lambda$  è un numero molto grande e valendosi del *metodo del colle* <sup>(4)</sup>. L'applicazione di questo metodo nel nostro caso particolare di un'integrazione lungo l'asse reale porta al seguente enunciato. Sia da valutare l'integrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} e^{i n f(x)} g(x) dx$$

essendo  $n$  un numero molto grande e  $f(x)$  e  $g(x)$  funzioni regolari della variabile reale  $x$ . Nell'intervallo d'integrazione esista un punto  $x_0$  per il quale

(4) Per la sostanza di questo metodo e per la bibliografia relativa, si veda, per esempio G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, p. 333 e sgg. (1947).



si abbia  $f'(x_0) \neq 0$ ,  $f''(x_0) \neq 0$ . Allora, a meno d'infinitesimi di ordine superiore a  $1/\sqrt{n}$ , si avrà

$$(4) \quad I = g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\pm n f''(x_0)}} \exp \left\{ i \left[ n f(x_0) \pm \frac{\pi}{4} \right] \right\}$$

dove i segni superiori valgono nel caso che sia  $f''(x_0) > 0$  e quelli inferiori nel caso contrario.

Per applicare questa formula, scriveremo gli ultimi due integrali della (3) nella forma

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha X \right) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} (\beta Y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} Z) \right] d\beta.$$

La derivata prima rispetto a  $\beta$  dell'espressione  $\beta Y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} Z$  nel secondo integrando si annulla per

$$\beta = \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + Z^2}}$$

e la derivata seconda assume in tal punto il valore

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \frac{(Y^2 + Z^2)^{3/2}}{Z^2}.$$

Pertanto, se si prende  $2\pi/\lambda$  per parametro  $n$  e si applica la (4) al secondo integrale dell'espressione (5), quest'ultima si trasforma in

$$Z \sqrt{\frac{\lambda}{(Y^2 + Z^2)^{3/2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha X + \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{Y^2 + Z^2}) - i \frac{\pi}{4} (1 - \alpha^2)^{1/4} \right] d\alpha.$$

Ora la derivata rispetto ad  $\alpha$  dell'espressione  $\alpha X + \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{Y^2 + Z^2}$  si annulla per

$$\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

e la derivata seconda assume in tal punto il valore

$$-\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}}{Y^2 + Z^2}.$$

Applicando ancora una volta la (4) si giunge allora all'espressione

$$\frac{\lambda Z}{X^2 + Y^2 + Z^2} \exp \left( i \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - i \frac{\pi}{2} \right).$$

Sostituendo nella (3) e chiamando rispettivamente  $r$  e  $\theta$  la distanza PQ e l'angolo che PQ forma con l'asse Z, si ottiene infine

$$(6) \quad \vartheta(Q) = \frac{1}{\lambda} \int_{\Sigma} \vartheta(P) \frac{\exp \left( i \frac{2\pi}{\lambda} r - i \frac{\pi}{2} \right)}{r} \cos \theta d\Sigma.$$

Si vede subito che questa è un'espressione del principio di Huygens-Fresnel. Infatti da ogni punto  $P$  parte una particolare onda sferica, la cui ampiezza è proporzionale a  $\vartheta(P)$ ; e  $\vartheta(Q)$  si ottiene facendo interferire tutte queste onde elementari in  $Q$ .

Su ciascun'onda elementare poi l'ampiezza è proporzionale al coseno dell'angolo  $\theta$  d'inclinazione rispetto alla normale del diaframma.

È notevole il fatto che la (6) è quasi identica alla formula che si deduce da quella di Kirchhoff (qualora si facciano le note ipotesi semplificatrici sul valore di  $\vartheta(P)$  e della sua derivata normale nei punti del diaframma). L'unica differenza è data dal fatto che in quest'ultima si avrebbe  $(1 + \cos \theta)/2$  al posto di  $\cos \theta$ . La differenza fra questi due fattori è  $\sin^2(\theta/2)$  è anche nel caso di un angolo di  $25^\circ$  non raggiunge i cinque centesimi. Ben difficilmente quindi l'esperienza potrà decidere quale delle due formule sia da preferirsi.

**Geologia applicata.** — *Sui criteri di ricerca per energia geotermica* (\*). Nota (\*\*) di F. FALINI, presentata dal Corrisp. G. CHECCHIA RISPOLI.

Tra i tentativi che i tecnici e gli scienziati vanno compiendo da oltre un secolo per trovare sempre nuove fonti di energia, hanno acquistato un particolare rilievo, specialmente in Italia, quelli diretti alla ricerca e all'utilizzazione dell'energia geotermica.

In seguito specialmente ai successi ottenuti, dopo molte ricerche e studi, nella valorizzazione della zona di Larderello, l'attenzione dei ricercatori si è rivolta anche ad altre zone nelle quali l'esistenza di manifestazioni termali naturali (quali fumarole e sorgenti idrotermali) da una parte e le prove dell'esistenza (attuale o geologicamente recente) di fenomeni magmatici (1), dall'altra, hanno indotto ad attribuire un certo grado di probabilità alla esistenza nel sottosuolo di fluidi suscettibili di una utilizzazione industriale ai fini di ottenere energia geotermica.

In dette ricerche, per la estrema scarsità del materiale sperimentale finora a disposizione, suscettibile di confronti diretti, la raccolta dei dati di fatto deve essere sistematica ed obbiettiva, e gli eventuali criteri che la Geologia e la Scienza dei Giacimenti Minerari possono suggerire debbono essere ancora oggi considerati alla stregua di ipotesi di lavoro da controllare e vagliare alla luce dei dati di fatto sperimentali.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Giacimenti Minerari e Geologia Applicata della Università di Roma.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1947.

(1) Si ritiene infatti oggi che la esistenza di masse magmatiche in corso di raffreddamento rappresenti una condizione necessaria perchè le manifestazioni termali di una regione meritino di essere prese in considerazione ai fini di ricerche per energia geotermica.

Non sembra cioè che, allo stato attuale delle conoscenze, si possano dedurre, da considerazioni geologiche di carattere generale, criteri sicuri che permettano di escludere *a priori* (e cioè senza ricerche dirette) che una area indiziata sia suscettibile di utilizzazione industriale.

Non appare pertanto accettabile l'impostazione generale di una Nota recentemente pubblicata<sup>(2)</sup> in proposito, nella quale si giunge a conclusioni secondo le quali per le ricerche di vapori occorrerebbe senz'altro scartare le zone tipicamente vulcaniche e soffermarsi piuttosto ad esaminare le regioni ove è probabile che esistano fenomeni di plutonismo tipico.

Ad ogni modo le suddette conclusioni non appaiono ben dimostrate dalla trattazione ivi esposta, sia perchè nel procedimento deduttivo appaiono evidenti delle manchevolezze di rigore logico di importanza fondamentale, sia perchè alcune delle premesse poste a base della trattazione non sono costituite da dati di fatto universalmente accettati, ma da teorie o da ipotesi ancora molto discusse<sup>(3)</sup>. Ritengo necessario rilevare tali difetti di trattazione, in vista della grande importanza dell'argomento, sia dal punto di vista scientifico, sia, e soprattutto, dal punto di vista industriale.

Così, ad esempio, dopo aver premesso un breve cenno della teoria di Niggli della ebollizione retrograda di un bacino magmatico in corso di consolidamento, l'A. afferma che *è lecito pensare che i vapori sfuggenti da un bacino magmatico in consolidazione... possono, nella loro ascesa verso la superficie, accumularsi in formazioni permeabili, sormontate da formazioni meno permeabili e costituire quindi dei veri e propri «serbatoi». In tal caso i vapori sono ivi in condizioni... stazionarie di pressione e temperatura...*

Dopo di che l'A. conclude senz'altro che... *per le ricerche in oggetto è necessario siano verificate le due condizioni seguenti:*

a) *l'esistenza nel sottosuolo della regione di bacini magmatici in via di avanzata consolidazione dai quali provenga questa miscela di gas e vapori surriscaldati, fra i quali predomina H<sub>2</sub>O (soluzione pneumatolitica);*

b) *l'esistenza di condizioni geologiche tali da permettere l'accumulo, sotto pressione sufficiente, di notevoli quantità di vapore.*

Appare ovvio come tra la premessa suesposta e la conclusione b), non esista un rapporto logico. Non si comprende infatti come, dalla semplice legittimità dell'ipotesi (che nessun dato di fatto ha finora avvalorato) che i vapori *possono* accumularsi in serbatoi di rocce permeabili, discenda come *necessaria* l'esistenza dei serbatoi stessi per effettuare, con speranze di successo, ricerche di vapore.

(2) F. IPPOLITO, *Intorno ai criteri di ricerca per energia geotermica.* « Rend. d. Acc. Naz. dei Lincei », Cl. di Sc. fis., mat. e nat., ser. VIII, vol. II, fasc. 6.

(3) Vedi, ad esempio, per quanto riguarda l'ipotesi dell'origine magmatica dei fenomeni plutonici, un recente lavoro di NIGGLI (*Die leukogranitischen, trondjemitischen und leukosyenitgranitischen Magmen und die Anatexis.* « Schw. min. u. petr. Mitt. », B. XXVI, H. 1, 1946, pp. 44-78) nel quale è tenuto conto anche di una recente pubblicazione di IPPOLITO sull'argomento.

Se infatti da una massa magmatica attualmente in corso di consolidamento si sviluppa una determinata quantità di sostanze volatili e al di sopra di essa non esistono terreni facilmente permeabili, non si vede per quale ragione le sostanze volatili stesse non possano venir captate e utilizzate dalle fratture (molte o poche che esse siano) che costituiscono la via attraverso la quale i « volatili » stessi sfuggono verso la superficie.

Uno studio approfondito del fenomeno, anche su basi quantitative eseguito da chi scrive <sup>(4)</sup> induce anzi a ritenere che il caso in cui i volatili si disperdano formando dei grossi « serbatoi » in rocce permeabili, ai fini di una eventuale utilizzazione di essi, sia molto meno favorevole del caso in cui la circolazione avvenga semplicemente attraverso un sistema di fratture ben individualizzate.

Nel caso di circolazione « per permeazione » è lecito infatti ritenere che « a regime » i volatili e la roccia serbatoio finiranno per avere la stessa temperatura, data la grande superficie di scambio termico e la lentezza della circolazione. Ma è ormai acquisito che la temperatura « propria » (dovuta cioè al calore che perviene loro per conduzione) delle rocce soprastanti una intrusione magmatica, lontano dal contatto ed in prossimità della superficie terrestre, deve essere molto modesta. Così ad esempio nel caso di un laccolite di dimensioni laterali indefinite, di 10 Km. di potenza ed intruso con una temperatura iniziale di 1000° ad una profondità di 10 Km. sotto il livello della superficie, la massima temperatura raggiunta a 1000 m. sotto la superficie del suolo, sarebbe appena di 40° più alta di quella « normale », per effetto della conduzione termica diretta dovuta all'intrusione. Ben modesto sarebbe anche l'aumento dovuto al calore proprio trasportato « per convezione » dalla corrente di « volatili », che rappresenta una modesta percentuale di quello trasmesso per conduzione diretta; tanto più che i due apporti di calore, per conduzione e per convezione, non sarebbero simultanei, ma il primo giungerebbe alla distanza considerata molto più tardi del secondo.

Da ciò scaturisce che, se nel caso « plutonico » possono formarsi « serbatoi » di volatili ad alta temperatura, ciò è possibile soltanto a grande profondità sotto la superficie del suolo, in prossimità del tetto del plutone: sarebbe quindi impossibile, allo stato attuale della tecnica, di raggiungere le vicinanze di detti serbatoi con sondaggi o con altri mezzi diretti.

Molto più favorevole appare invece il caso in cui i volatili, sviluppandosi da una massa magmatica in corso di raffreddamento, sfuggano verso la superficie attraverso ben individualizzate fratture delle rocce del tetto; in tal caso infatti, essendo relativamente molto piccola la superficie delle fratture lambita dai « volatili » in rapporto alla massa delle rocce attraversate, se l'efflusso avviene rapidamente, solo una piccola porzione (adiacente alle fratture) delle rocce del tetto si riscalda a spese del calore sensibile dei « volatili » e questi ultimi possono mantenere una temperatura anche molto più alta

<sup>(4)</sup> Tale studio, di cui esponiamo qui brevemente le conclusioni, è di prossima pubblicazione.



di quella media delle rocce incassanti che attraversano e giungere quindi fino in prossimità della superficie terrestre con una temperatura tale da consentire una proficua utilizzazione industriale.

Che i « volatili » possano mantenere una temperatura molto più alta di quella media delle rocce incassanti solo nel caso di veloce circolazione per fratture è stato d'altronde già riconosciuto da Boydell<sup>(5)</sup>, da Schneiderhöhn<sup>(6)</sup> ecc. Ma anche l'affermazione secondo cui le condizioni più favorevoli per l'utilizzazione di vapori si hanno nel caso plutonico tipico appare per lo meno azzardata e non è da considerare, allo stato attuale, che come una semplice ipotesi. È vero infatti che le odierne concezioni portano a ritenere che le quantità totali di « volatili », specie per le maggiori « cubature » delle masse magmatiche in gioco, siano più grandi, in media, nel caso di plutonismo tipico che non in quello vulcanico; ma ai fini dell'utilizzazione dei « volatili » non è soltanto la quantità totale di essi che interessa, bensì anche la portata ricavabile da un determinato foro; e tale portata, al di là di certi limiti, è da ritenere che diminuisca con l'aumentare delle dimensioni della massa magmatica.

È infatti logico che nel raffreddamento di masse magmatiche di forma abbastanza « simile » ma di diverse dimensioni, le quantità totali di « volatili » che si liberano dal consolidamento aumentino secondo il cubo delle dimensioni lineari medie della massa magmatica, mentre i tempi di raffreddamento aumenteranno con il quadrato delle stesse dimensioni.

Quindi la quantità totale di « volatili » che si libererà nell'unità di tempo da tutta la massa sarà direttamente proporzionale alle sue dimensioni lineari medie. Se poi si tien conto del fatto che tali sostanze volatili sfuggono attraverso la superficie del tetto del bacino, la cui area cresce con il quadrato delle dimensioni lineari, si vede che la portata media di « volatili », riferita all'unità di tempo e all'unità di sezione del tetto, sarà inversamente proporzionale (sempre *grosso modo*, si intende) alle dimensioni lineari medie della massa magmatica; con la stessa legge dovrebbe anche variare, all'incirca, la portata raccogliibile con un sondaggio, a parità di altre condizioni (tipo di circolazione, stadio raggiunto dal consolidamento, ecc.). Ciò potrebbe d'altronde anche accordarsi col fatto constatato che i grandi ammassi granitici sono circondati da una estesa aureola metamorfica, mentre nel caso di piccole masse (dove le maggiori portate di « volatili » non potevano smaltirsi per permeazione) si è avuta con facilità la formazione di fratture riempite poi a formare dicchi e filoni metalliferi<sup>(7)</sup>.

Si intende che, ove le dimensioni della massa magmatica scendano al disotto di certi limiti, le quantità complessive di « volatili » diminuiranno di troppo; ma nel caso di molti bacini vulcanici o subvulcanici non v'è ragione di preoccuparsi in proposito; basta pensare alla quantità di « volatili » che

(5) H. C. BOYDELL, *The temperature of formation of an epithermal ore deposit*. « Inst. Min. and Met. Bull. », 331, 1932, pp. 1-43.

(6) H. SCHNEIDERHÖHN, *Lehrbuch der Erzlagerstättenkunde*. Jena, 1941, p. 42.

(7) *Les granites ayant une efficacité métallogénique sont de la catégorie des granits en massifs circonscrits*. E. RAGUIN, da *Geologie du granite*, Parigi, Ed. Masson, 1946.

emette il Vesuvio in una eruzione<sup>(8)</sup> per comprendere come le quantità totali di « volatili » siano anche in questi casi spesso talmente grandi che solo le ovvie difficoltà tecniche impediscono oggi di pensarne l'utilizzazione da un vulcano attivo, mentre non si può escludere a priori che l'utilizzazione risulti possibile in regioni vulcaniche presentemente nella attività fumarolico-esalativa (che, come è noto, non sempre corrisponde alla chiusura del ciclo vulcanico). Anche l'affermazione secondo cui nel caso vulcanico le condizioni geologiche sono più sfavorevoli alla esistenza di rocce capaci di funzionare da serbatoio, non trova neppure un accenno di dimostrazione: nè può assumersi come dimostrazione il fatto singolo che... *nei Campi Flegrei e a Ischia predominano ovunque a tetto dei bacini, tufi trachitici*<sup>(9)</sup>.

Molte altre affermazioni su cui è poggiata la trattazione, non sono che delle semplici ipotesi. Così ad esempio quando si afferma che è presumibile che a Larderello i fenomeni siano di tipo plutonico; mentre la presenza del boro in abbondanza nel vapore a temperatura relativamente bassa prova se mai la mancanza e non l'esistenza di una vera fase pegmatitica, nella quale esso sarebbe stato fissato sotto forma di tormaline ecc. Mi sembra anche che sia azzardato negare senz'altro un rapporto tra la massa magmatica che alimenta Larderello e le effusioni laviche trachitiche quaternarie che circondano la zona; d'altronde il Rittmann<sup>(10)</sup> nel dicembre 1942, scriveva: «... nel terziario e nel quaternario si ebbero, in questa regione, importanti manifestazioni vulcaniche, che produssero i graniti dell'Elba, del Giglio e di Gavorrano nonché le trachiti di Montecatini, di Orciatico, quelle di Roccastrada, di Campiglia e del Monte Amiata». E più oltre: «... il fenomeno presenta talvolta notevoli analogie con quello solfatarico e quello geyseriano». Nè nel lavoro di cui ci occupiamo è data alcuna giustificazione su basi petrografiche della presunta indipendenza del fenomeno di Larderello e dei graniti autoctoni della Toscana dalle suddette effusioni laviche.

Ma una discussione generale dell'argomento esulerebbe dallo scopo che mi ero proposto, che è quello di dimostrare come, allo stato attuale delle conoscenze, l'affermazione che le condizioni più favorevoli per le ricerche di energia geotermica si hanno nel caso di bacini tipicamente plutonici ed in presenza di rocce del tetto capaci di funzionare da « serbatoio » sia tutt'altro che una verità acquisita, ma possa essere al massimo tenuto presente come ipotesi. Tanto più che il confronto tra la zona di Larderello e quella

(8) Ad esempio nell'eruzione del 1929 in 100 ore... *vennero emessi più di un miliardo e mezzo di metri cubi di gas ad elevatissima temperatura.* (A. RITTMANN, *Vulcani. Attività e genesi*. Napoli, 1944); del resto nella Nota stessa si ammette implicitamente che solo ragioni tecniche impediscono, nel caso del Vesuvio (il cui carattere vulcanico è certo fuori di discussione) di prendere in considerazione le possibilità di captare *vapori* per scopi industriali.

(9) E d'altronde è ovvio che anche in quella regione se il tetto di singoli focolai successivi può essere stato di tufi trachitici, per lo meno il tetto del focolare che ha alimentato i vulcani che hanno prodotto i più profondi tufi sarà ben stato costituito da sedimenti!

(10) Opera citata.

dei Campi Flegrei non può ancora farsi, perchè, mentre le ricerche nell'una zona sono state grandiose e durano da molti decenni, quelle dell'altra sono state finora di gran lunga più limitate<sup>(1)</sup>; ma quando anche il confronto potesse farsi, sarebbe ancora imprudente voler da esso trarre senz'altro una generalizzazione di tanta importanza.

**Mineralogia.** — *Un nuovo ossicloruro di antimonio fra i prodotti di alterazione dell'antimonite alle Cetine di Cotorniano presso Rosia (Siena)*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di M. FORNASERI, presentata dal Corrisp. E. ONORATO.

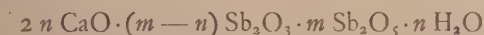
Nel corso di precedenti ricerche ebbi occasione di occuparmi dei prodotti di alterazione dell'antimonite del giacimento di Poggio Fuoco presso Manciano (Grosseto).

L'antimonite si presenta spesso in questa zona profondamente alterata ed i prodotti di alterazione rivestono superficialmente i cristalli sotto forma di croste biancastre o gialle ed assai sovente si giunge ad una sostituzione totale dell'antimonite originaria.

Tali prodotti di alterazione sono conosciuti comunemente sotto il nome di « ocre di antimonio ». Con tale denominazione piuttosto generica si intendono abitualmente alcuni ossidi di antimonio anidri come la cervantite ( $\text{Sb}_2\text{O}_3$ ) o idrati come la stibiconite ( $\text{Sb}_2\text{O}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$ ), la volgerite ( $\text{Sb}_2\text{O}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ) e la stibianite ( $\text{Sb}_2\text{O}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$ ).

In un lavoro precedente<sup>(1)</sup> ho dimostrato come le ocre di Poggio Fuoco non fossero da considerarsi come dei semplici ossidi idrati, bensì degli antimonati idrati di antimonio e calcio, in stretta analogia con gli antimonati idrati di calcio di Higueras e di Cordoba studiati da Natta e Baccaredda<sup>(2)</sup> ai quali i citati autori attribuirono il nome di *idroromeite*, considerandoli a buon diritto come una nuova specie mineralogica.

A differenza delle ocre di Higueras e di Cordoba, le quali corrispondono alla formula generale



(1) Specie se si tengono presenti le successive « messe a punto » sullo stato dei lavori di ricerca, sulle difficoltà di ordine tecnico incontrate e non ancora sormontate, e sui risultati raggiunti ad Ischia ed ai Campi Flegrei, rese pubbliche da F. PENTA, (*Studi e ricerche in corso nei Campi ed Isole Flegrei*, « Boll. Soc. Natur. in Napoli », vol. LI, 1940. *Id.* « L'Ind. Min. d'It. e d'oltremare », fasc. 4, Roma, 1941. *Studi geominerari e geotecnici*. « Atti del R. Ist. di Incoraggiamento », vol. 84, Napoli 1941. *Studi geominerari e geotecnici dal 1937 al 1941*. « Atti della Fondaz. Polit. del Mezzogiorno », Napoli 1942).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Roma.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1947.

(1) M. FORNASERI, « Per. Min. », XV, n. 1-3 (1946), 47-86.

(2) G. NATTA, M. BACCAREDDA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (6) 15 (1932), 389; « Atti IV Congr. Naz. Chim. Pura e Appl. », 1932; « Zeit. f. Krist. », 85 (1933) 271; « Gazz. Chim. It. », 66 (1936) 308.

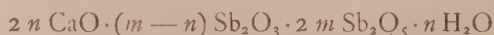


lo studio dello stato di ossidazione dell'antimonio nelle ocre di Poggio Fuoco ha dimostrato:

1° che, mentre nelle prime tutto l'antimonio è allo stato pentavalente, i prodotti di alterazione di Poggio Fuoco contengono una notevole percentuale di antimonio trivalente;

2° che il rapporto fra la percentuale di antimonio pentavalente e trivalente è esattamente il doppio di quello che si può calcolare dalla formula scritta dianzi: perciò le ocre di Poggio Fuoco, piuttosto che dall'ossido  $\text{Sb}_2\text{O}_4$ , si debbono pensare come derivanti dall'ossido  $\text{Sb}_2\text{O}_3 \cdot 2 \text{Sb}_2\text{O}_5 = \text{Sb}_6\text{O}_{13}$ , la cui esistenza è nota e confermata da recenti esperienze.

Pertanto per le idroromeiti di Poggio Fuoco si deve ammettere la formula, generale:



ossia



L'esistenza nelle ocre di Poggio Fuoco dell'antimonio trivalente in percentuali variabili è una riprova dell'esattezza di questo modo di vedere: esse costituiscono infatti quei prodotti intermedi che la possibilità di sostituzione isomorfa fra  $\text{Ca}^{++}$  e  $\text{Sb}^{+++}$  lasciava prevedere ma che non erano ancora conosciuti.

Nell'epoca in cui le precedenti ricerche non erano che agli inizi ed io non mi ero reso ancora conto dell'esatta natura di questi prodotti di alterazione, andavo ricercando nelle collezioni qualche campione che potesse, per eventuale presenza di cristalli isolati, essere di aiuto nella risoluzione di alcuni problemi ancora discussi <sup>(3)</sup> circa la struttura degli ossidi di antimonio.

Fu così che visitando le collezioni di R. Palumbo in Roma la mia attenzione venne attratta da due campioni, costituiti da numerosi cristalli bacillari di antimonite ricoperti dalla consueta patina di alterazione (idroromeite), negli interstizi dei quali si annidavano ciuffi di cristalli bianchissimi e lucenti (Tav. I, fig. 1) e lasciavano chiaramente capire di essersi formati a spese dell'antimonite. I campioni, raccolti anni or sono dal prof. Pelloux alle Cetine di Cotorniano presso Rosia (Siena), recavano nella collezione Palumbo l'indicazione «Cervantite su antimonite». Si comprende facilmente quale interesse potessero suscitare tali campioni perchè se realmente gli aghetti bianchi fossero stati costituiti da cervantite ciò avrebbe costituito un fatto di notevole importanza non essendo conosciuti che rarissimi cristalli (né credo perfetti) appartenenti verosimilmente alla fase rombica dell'ossido  $\text{Sb}_2\text{O}_4$ .

Esaminando in laboratorio il prezioso materiale mi convinsi ben tosto che non si trattava di cervantite, come pure potei escludere che si trattasse di valentinite. L'analisi chimica rivelò viceversa la presenza del cloro. Dopo un lungo lavoro di separazione ottenni una quantità di materiale sufficiente per un'analisi quantitativa i cui risultati sono i seguenti:

(3) M. FORNASERI, loc. cit.



trov. % Sb	78,6	per $\text{Sb}_3\text{O}_4\text{Cl}$ calc. %	Sb	78,6
Cl	7,24		Cl	7,63
O	14,16 (p. diff.)		O	13,77
$\text{H}_2\text{O}$	ass.		$\text{H}_2\text{O}$	—
	100,00			100,00

L'antimonio è tutto ossidabile dal iodio e dal permanganato <sup>(4)</sup> e si deve quindi ritenere tutto allo stato trivalente.

Si tratta quindi di un ossicloruro di antimonio del tipo



a cui corrisponde la formula



Non mi risulta che fra i minerali siano conosciuti ossicloruri di antimonio (con solo antimonio), se si eccettua la Sarawakite la cui esistenza è da ritenersi assai dubbia. La Sarawakite fu infatti segnalata dal Frenzel <sup>(5)</sup> nelle cavità dell'antimonite del fiume Sarawak (Borneo). Il minerale si presenta in cristalli apparentemente tetragonali, a forte lucentezza adamantina, di colore giallo vino o verde gialliccio. L'analisi chimica rivelò come costituente fondamentale l'antimonio ed un componente volatile, ritenuto *presumibilmente* cloro. Manca dunque nel lavoro del Frenzel non solo ogni analisi quantitativa, ma la stessa presenza del cloro non è stata confermata neppure da ricerche qualitative. Ciò è troppo poco per sostenere seriamente l'esistenza di un nuovo minerale, e tanto meno per asserire che si tratti di un ossicloruro. Lo stesso Gmelin <sup>(6)</sup> riporta la Sarawakite fra gli ossicloruri in forma dubitativa.

In ogni caso le caratteristiche della Sarawakite sono assai diverse da quelle dell'ossicloruro che sto descrivendo e che pertanto si deve considerare come una nuova specie mineralogica.

All'esame microscopico l'ossicloruro delle Cetine di Cotorniano si presenta in cristalli aghiformi appiattiti, talvolta terminati ad un'estremità (Tav. I, fig. 3) e costantemente assai poveri di forme. Per quanto si può dedurre dalle misure goniometriche, rese difficili anche nella zona dell'allungamento a causa della distorsione e della striatura delle facce il minerale appartiene al sistema triclino con le seguenti costanti cristallografiche:

$$\alpha = 129^\circ 26'$$

$$\beta = 138^\circ$$

$$\gamma = 73^\circ 2'$$

$$a : b : c = 1,065 : 1 : ?$$

(4) W. HILLEBRAND, G. E. F. LUNDELL, «Applied Inorganic analysis», New York, 1929.

(5) FRENZEL, «Tschermak's Min. Mitt.» (1877) 300.

(6) GMELIN KRAUT'S «Handb. d. anord. Chem.», 1908, III, Abt. 2.

Gli angoli misurati furono:

$$(\text{OIO}) \widehat{(\text{IIO})} = 36^{\circ} 25'$$

$$(\text{OIO}) \widehat{(\text{OOI})} = 49^{\circ} 13'$$

$$(\text{IIO}) \widehat{(\text{O}\bar{\text{I}}\text{O})} = 85^{\circ} 5'$$

$$(\text{I}\bar{\text{I}}\text{O}) \widehat{(\text{O}\bar{\text{I}}\text{O})} = 58^{\circ} 30'$$

L'angolo  $\beta$  fu misurato direttamente al microscopio.

Forme presenti  $\{\text{OIO}\} \{\text{IIO}\} \{\text{I}\bar{\text{I}}\text{O}\} \{\text{OOI}\}$  (Tav. I, fig. 2). In rari casi fu osservata una geminazione secondo  $[\text{OOI}]$ .

A nicols incrociati i cristalli mostrano su  $(\text{OIO})$  (faccia di maggior sviluppo) un angolo di estinzione di  $10-14^{\circ}$  rispetto all'asse di allungamento. Il segno dell'allungamento è positivo. L'osservazione in luce convergente mostra su  $(\text{OIO})$  l'emergenza di un asse ottico molto eccentrico. Carattere ottico negativo.

Uno spettro di Polanji per rotazione secondo l'asse di allungamento (ant. Cu  $K\alpha, \beta$ ) ha dato come periodo di identità secondo  $[\text{OOI}]$   $3,97 \text{ \AA}$ .

Lo spettro di Weissenberg eseguito con rotazione secondo  $[\text{OOI}]$  e sviluppando lo strato spettrale di ordine 0 non ha dato sinora risultati confortanti per quanto si riferisce alla determinazione delle costanti  $a_0$  e  $b_0$  della cella elementare. Lo spettro non è leggibile probabilmente a causa dello stato di distorsione dei cristalli. Tentativi sono in corso per ottenere migliori cristalli in laboratorio.

Riscaldato in tubo chiuso il minerale fonde decomponendosi: sulle pareti del tubicino si depositano gocce oleose poco volatili di tricloruro di antimonio. Il residuo solido biancastro volatilizza poi in parte producendo sulle pareti fredde un deposito di minuti ottaedrinì di senarmontite.

L'ossicloruro  $\text{Sb}_3\text{O}_4\text{Cl}$  è facilmente e prontamente solubile a freddo in acido cloridrico concentrato: si scioglie completamente ma meno rapidamente in una soluzione N di idrossido di sodio. Riscaldato all'ebollizione con acido nitrico concentrato dà luogo a deposito di pentossido.

Ammettendo dunque valida per il composto in istudio la formula  $\text{Sb}_3\text{O}_4\text{Cl}$  si pone la questione se esso si identifichi con qualcuno degli ossicloruri noti dalla sistematica dei composti di antimonio ovvero se non sia da considerarsi come un nuovo composto.

Era noto fin dal Berzelius che per idrolisi del tricloruro di antimonio possono prendere origine diversi ossicloruri. Circa dieci di tali composti sono stati descritti da diversi autori, ma non tutti gli ossicloruri descritti furono e sono esenti da critiche fondate, cosicchè attualmente si può ritenere che solo di tre ossicloruri anidri è sicuramente provata l'esistenza. Essi sono:

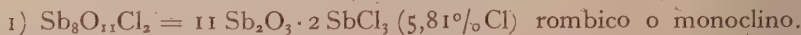




Fig. 1.

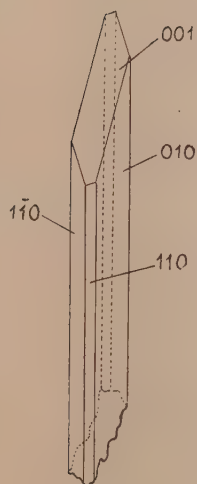


Fig. 2.

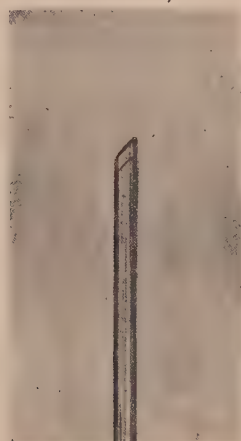
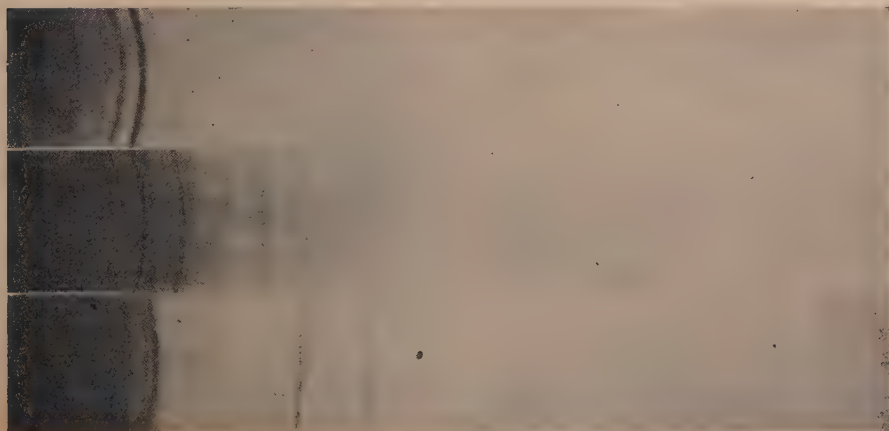


Fig. 3.



a)

b)

c)





L'ossicloruro  $\text{Sb}_3\text{O}_4\text{Cl} = 4 \text{Sb}_2\text{O}_3 \cdot \text{SbCl}_3$  (7,63 % Cl) non si identifica con alcuno dei precedenti, nè per la composizione chimica nè per le proprietà cristallografiche<sup>(7)</sup> ed è quindi da ritenersi un nuovo composto di antimonio.

Il ritrovamento di un ossicloruro fra i prodotti di alterazione dell'antimonite presenta un particolare interesse in quanto consente di stabilire che l'alterazione dell'antimonite, oltre che ai comuni ossidi di antimonio ed agli antimonati di calcio idrati, può condurre alla formazione di ossicloruri. Fra i fattori dell'alterazione dell'antimonite si deve così annoverare, almeno localmente, anche l'acido cloridrico. Rimane inoltre confermato<sup>(8)</sup> che l'alterazione dell'antimonite può verificarsi per opera di soluzioni acide.

(7) P. GROTH, « Chemische Kristallographie », I, 291, 293. Leipzig 1906.

(8) M. FORNASERI, loc. cit.

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Ciuffi di cristalli aciculari di  $\text{Sb}_3\text{O}_4\text{Cl}$  inseriti fra cristalli di antimonite alterata superficialmente in idroromeite. 2 ingr. lin.

Fig. 2. — Cristallo di  $\text{Sb}_3\text{O}_4\text{Cl}$ .

Fig. 3. — Microfotografia di un cristallo di  $\text{Sb}_3\text{O}_4\text{Cl}$ . 133 ingr. lin.

Fig. 4. — a) Spettro di polvere della valentinite di Příbram.

b) Spettro di polvere dell'ossicloruro  $\text{Sb}_3\text{O}_4\text{Cl}$  delle Cetine di Cotorniano.

c) Spettro di polvere dell'idroromeite

Ant. Cu, K  $\alpha$  e  $\beta$  R = 57,3 mm.

**Cristallografia.** — III) *Rappresentazione analitica dei reticoli cristallini di traslazione* (\*). Nota di F. FUMI, presentata (\*\*) dal Corrisp. C. PERRIER.

1. Spetta ad F. Seitz il merito di aver determinato in maniera puramente analitica, tramite un metodo matricale-algebrico <sup>(1)</sup>, i gruppi di traslazione compatibili con i differenti gruppi cristallografici di simmetria macroscopica (*gruppi macroscopici o di rotazione*).

Alla base della sua trattazione il Seitz pone la enunciazione verbale di due postulati fondamentali sulla struttura intima della materia cristallizzata, sul primo dei quali è bene fare alcune osservazioni. Esse si riferiscono al concetto di *cella elementare* che il Seitz definisce un poco genericamente come *il più piccolo limite di divisibilità di un generico cristallo senza alterare la natura della sostanza*.

Innanzitutto non è molto conveniente parlare di *limite di divisibilità*, poichè ciò può far pensare ad una effettiva divisione del cristallo, mentre la cella elementare va considerata nell'interno di un reticolo infinitamente esteso, perchè altrimenti subentrano delle variazioni delle distanze, delle deformazioni reticolari, dei cambiamenti di proprietà fisiche, connessi alla variazione del campo di forza all'intorno della cella stessa. È proprio a questo che debbono la loro origine le irregolarità reticolari che si hanno alla superficie dei cristalli, nonchè l'effetto fisico che esercitano i cosiddetti « difetti strutturali », determinando interessanti proprietà dei corpi cristallini (luminescenza).

In secondo luogo è a mio parere opportuno tenere conto, come si fa solitamente in cristallografia, anche dello *stato fisico* <sup>(2)</sup>, oltre che della *natura* della sostanza; ciò, sia perchè il più basso limite di divisibilità, o la più piccola parte costitutiva di una sostanza, senza che se ne alteri la natura, è la molecola, se si tratta di un composto, l'atomo, se di un elemento chimico, come anche per considerare l'eventualità di una trasformazione polimorfa. Perciò ritengo convenga formulare il primo dei postulati di Seitz come segue:

« Per ogni cristallo esiste una cella finita, di dimensioni comparabili con quelle atomiche, che rappresenta la più piccola parte costitutiva del corpo considerato, la quale ne possiede ancora tutte le caratteristiche chimiche e fisiche <sup>(3)</sup> ».

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) « Zs. f. Kryst. », 90, 289 (1935).

(2) Sotto questa denominazione abbreviata si vuole intendere lo *stato solido cristallino corrispondente ad una determinata struttura intima*.

(3) All'aggettivo *fisiche* si deve attribuire il significato lato che deriva da quanto detto nella nota precedente; si allude cioè a *tutte quelle proprietà non chimiche che individuano lo stato fisico considerato*. In ciò resta pertanto compreso il fatto che la cella elementare deve ancora possedere tutti gli elementi di simmetria del reticolo cristallino.

2. Per quanto concerne le basi analitiche dello studio del Seitz ci limitiamo a ricordare <sup>(4)</sup> come la ammissione dei postulati di Seitz porti a presupporre la invarianza della molteplicità cristallina rispetto a trasformazioni traslatorie del tipo

$$(I) \quad \bar{x}' = \bar{x} + \Gamma_{n_1 n_2 n_3}$$

( $\bar{x}$  ed  $\bar{x}'$  sono vettori coordinati) dove

$$(II) \quad \Gamma_{n_1 n_2 n_3} = n_1 \bar{l}_1 + n_2 \bar{l}_2 + n_3 \bar{l}_3$$

è una generica traslazione di simmetria della molteplicità considerata;  $\bar{l}_1$ ,  $\bar{l}_2$ ,  $\bar{l}_3$  sono le cosiddette *traslazioni primitive* e i coefficienti  $n_1, n_2, n_3$ , sono *numeri interi*. L'insieme di tutte le  $\Gamma_{n_1 n_2 n_3}$  definite dalla (II) costituisce un gruppo addittivo discontinuo in quanto che

a) il prodotto di due operazioni traslatorie  $\Gamma$ , definito come la loro somma vettoriale, è ancora una traslazione  $\Gamma$ ;

b) esiste una operazione traslatoria che gode delle proprietà della operazione unitaria, ossia la traslazione nulla;

c) per ogni  $\Gamma$  dell'insieme (II) appartiene allo stesso insieme anche l'inversa, ossia quella traslazione che moltiplicata operativamente per quella iniziale, ossia sommata vettorialmente, dà l'operazione unitaria, vale a dire la traslazione nulla;

d) il prodotto di un numero qualsiasi di traslazioni (II) gode senz'altro della proprietà associativa, come somma vettoriale.

Il gruppo  $\Gamma$ , per il suo carattere addittivo <sup>(5)</sup>, è senz'altro infinito ed abeliano, mentre per la forma della (II), risulta discontinuo.

Dato il carattere di gruppo addittivo, e quindi abeliano, di ogni spazio vettoriale, ed in particolare dello spazio vettoriale tridimensionale (ossia dell'insieme di vettori che si dipartono da un punto generico dello spazio fisico ordinario diretti ai suoi punti), le traslazioni del gruppo definito dalla (II), che costituisce un sottogruppo dello spazio vettoriale tridimensionale,

sono commutabili con tutte le traslazioni  $\bar{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ , ossia il risultato finale

che si ottiene applicando ad un qualunque vettore  $\bar{x}$  prima una qualunque  $\bar{a}$  e poi una  $\Gamma$  è sempre identico al risultato che si ottiene invertendo l'ordine delle operazioni considerate.

Ciò che qui ci interessa mettere in risalto è il fatto che *dal punto di vista di Seitz ogni gruppo di simmetria traslatoria, o brevemente ogni gruppo di traslazione, cioè cristallograficamente, ogni reticolo bravaisiano di trasla-*

(4) Per maggiori particolari cfr. F. FUMI, *Operazioni di simmetria macro e microscopica* in corso di stampa sul « Periodico di Mineralogia ».

(5) La definizione grupitale del *prodotto* di due elementi del gruppo considerato lo fa coincidere colla operazione che costituisce, tenendo presente la natura vettoriale degli enti del gruppo, la loro *somma*.

zione, è individuato da una terna di traslazioni primitive  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ , le quali godono della proprietà che ogni traslazione del gruppo può essere espressa per loro tramite nella forma (II) con  $n_1, n_2, n_3$ , interi.

3. Per determinare i gruppi di traslazione compatibili (invarianti) con i trentadue gruppi di rotazione cristallograficamente permessi, Seitz si limita a ricercare le terne di traslazioni primitive invarianti rispetto agli elementi generatori di ciascuno degli 11 gruppi macroscopici dotati di centro di inversione; ciò in quanto un vettore invariante rispetto a due operazioni lo è anche rispetto al loro prodotto e in quanto ogni terna vettoriale è invariante rispetto all'operatore omotetico di simmetria macroscopica «centro di simmetria» <sup>(6)</sup>, mentre ciascuno dei 21 gruppi macroscopici non centrosimmetrici è sottogruppo di almeno uno degli 11 gruppi macroscopici centrosimmetrici.

Ci limitiamo qui a trascrivere (cfr. tabella), corredandola delle consuete denominazioni cristallografiche, la rappresentazione tabulare che il Seitz dà dei quattordici reticoli di Bravais, nella quale sono riportate in tre colonne le componenti, rispetto ad una terna cartesiana ortogonale di riferimento, delle tre traslazioni primitive che individuano il gruppo di traslazione corrispondente.

TABELLA.

$\Gamma_t \equiv$	reticolo triclino	$=$	$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}$	$(t_{ik} \text{ è la } k^{\text{ma}} \text{ componente, componente su } x_k \text{ (} k=1, 2, 3\text{), di } \bar{l}_i \text{ (} i=1, 2, 3\text{))}$
$\Gamma_m \equiv$	reticolo monoclinico semplice	$\equiv$	$\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{32} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$	
$\Gamma'_m \equiv$	reticolo monoclinico a base centrata	$=$	$\begin{bmatrix} t_{11} & -t_{11} & 0 \\ t_{12} & t_{12} & t_{32} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$	
$\Gamma_v \equiv$	reticolo rombico semplice	$=$	$\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$	
$\Gamma'_v \equiv$	reticolo rombico a base centrata	$\equiv$	$\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & -t_{22} \\ 0 & t_{23} & t_{23} \end{bmatrix}$	
$\Gamma''_v \equiv$	reticolo rombico a tutte facce centrate	$\equiv$	$\begin{bmatrix} t_{11} & -t_{11} & 0 \\ t_{12} & t_{12} & t_{12} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$	

(6) F. FUMI, *Sugli operatori matriciali di simmetria macroscopica*. «Rend. Acc. Lincei», vol. III, fasc. i-2, p. 101, 1947.



Segue: TABELLA.

$\Gamma_v'''$	reticolo rombico a corpo centrato	$\equiv \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{12} & 2 t_{12} & 0 \\ t_{13} & 0 & 2 t_{13} \end{bmatrix}$	
$\Gamma_{q1}$	reticolo tetragonale semplice	$\equiv \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{22} \end{bmatrix}$	$\Gamma_{q2} = \text{id.} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & -t_{22} \\ 0 & t_{22} & t_{22} \end{bmatrix}$
$\Gamma_{q1}'$	reticolo tetragonale a corpo centrato	$\equiv \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{12} & t_{12} & t_{12} \\ 0 & -t_{12} & t_{12} \end{bmatrix}$	$\Gamma_{q2}' = \text{id.} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{12} & 2 t_{12} & 0 \\ t_{12} & 0 & 2 t_{12} \end{bmatrix}$
$\Gamma_{rh}$	reticolo romboedrico	$\equiv \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -3 \sqrt{3} t_{13}/2 & 3 \sqrt{3} t_{13}/2 \\ t_{13} & 3 t_{13}/2 & 3 t_{13}/2 \end{bmatrix}$	
$\Gamma_{h1}$	reticolo esagonale a base centrata	$\equiv \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22}/2 & -t_{22}/2 \\ 0 & \sqrt{3} t_{22}/2 & \sqrt{3} t_{22}/2 \end{bmatrix}$	$\Gamma_{h2} = \text{id.} \equiv \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} t_{22}/2 & \sqrt{3} t_{22}/2 \\ 0 & t_{22}/2 & t_{22}/2 \end{bmatrix}$
$\Gamma_c$	reticolo cubico semplice	$\equiv \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 \\ 0 & 0 & t_{11} \end{bmatrix}$	
$\Gamma_c'$	reticolo cubico a tutte facce centrate	$\equiv \begin{bmatrix} t_{11} & -t_{11} & 0 \\ t_{11} & t_{11} & t_{11} \\ 0 & 0 & t_{11} \end{bmatrix}$	
$\Gamma_c''$	reticolo cubico a corpo centrato	$\equiv \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{11} & 2 t_{11} & 0 \\ t_{11} & 0 & 2 t_{11} \end{bmatrix}$	

4. Prima di terminare ritengo doveroso giustificare la ragione di una duplice rappresentazione tabulare per i gruppi  $\Gamma_v$ ,  $\Gamma_v'$ ,  $\Gamma_h$  e non per gli altri; ciò richiederà alcune riflessioni su ulteriori considerazioni del Seitz.

Dallo svolgimento matricico-algebrico risalta molto bene come i diversi reticoli di traslazione siano compatibili con più di uno dei gruppi di rotazione; per ognuno di essi esiste un gruppo di rotazione più ricco che ne consente ancora l'esistenza (oloedrie di Schoenflies); esistono sette di codeste classi cristalline. Tutto ciò corrisponde perfettamente al fatto, ben noto in cristallo-strutturistica, che i quattordici reticoli di Bravais sono classificabili in sette insiemi, ciascuno dei quali contiene i reticoli di traslazione (uno o più) compatibili con le classi di un determinato sistema cristallografico e quindi con la classe di ciascuno di questi più ricca di elementi di simmetria ( $S_2$ ,  $C_{2h}$ ,  $V_h$ ,  $D_{3d}$ ,  $D_{4h}$ ,  $D_{6h}$ ,  $O_h$ ).

Il Seitz constata poi come le prime sei di tali oloedrie godano di una peculiare proprietà; quella di rimanere invarianti anche rispetto a rotazioni

non contenute nel loro gruppo. Così ad esempio il gruppo  $S_2$  (classe triclina pinacoidale) è invariante rispetto a tutte le trasformazioni unitarie o trasformazioni di simmetria (le quali conservano il modulo dei vettori ai quali tali trasformazioni si applicano e gli angoli che questi formano tra loro), poichè moltiplicando l'operatore centro di simmetria (che insieme all'identità costituisce il gruppo  $S_2$ ) per un qualunque operatore di simmetria si ottiene sempre una operazione di simmetria dotata di centro di inversione.

Così il gruppo  $V_h$  (classe rombica bipyramidale), caratterizzato da tre piani di simmetria perpendicolari due a due che si incontrano secondo tre digire, è invariante rispetto a rotazioni di ordine quattro, attorno alle tre digire, come pure rispetto a rotazioni di ordine tre attorno alle quattro direzioni equiinclinate rispetto alle tre digire stesse, nonchè rispetto a tutti gli ulteriori elementi di simmetria del gruppo ottaedrale  $O_h$ , che è il gruppo delle operazioni di ricoprimento (rotazioni proprie ed improprie) dei poliedri geometrici cubo ed ottaedro. Ciò è evidente dal punto di vista geometrico, poichè eseguendo tali trasformazioni non si fa al più che far passare un asse binario in un altro od un piano di simmetria in un altro, ma può essere facilmente controllato per via matriciale; basta eseguire i prodotti di ciascuno degli operatori matriciali che rappresentano gli elementi di simmetria di  $O_h$  per tutti gli operatori del gruppo  $V_h$  per vedere che si riottengono tutti quanti.

Orbene, applicando codeste trasformazioni di simmetria non contenute nel gruppo di rotazione considerato, ma rispetto alle quali esso è invariante, alle traslazioni del gruppo di traslazioni compatibile con esso, può accadere che le traslazioni in parola non subiscano nessun cambiamento essenziale di forma e si limitino ad un cambiamento di nome delle componenti del resto arbitrarie delle  $\bar{l}_i$ . Così succede ad esempio per  $\Gamma_i$  applicando alle sue traslazioni primitive una qualunque trasformazione unitaria: si ottengono sempre tre traslazioni ad angoli diversi da  $90^\circ$  e di modulo diverso fra loro. Può accadere invece che le traslazioni primitive subiscano una più sostanziale modificazione: è proprio quanto si verifica per i due gruppi  $\Gamma_q$  e  $\Gamma'_q$  e per il gruppo  $\Gamma_h$ , come illustreremo in breve.

L'oloedria tetragonale  $D_{4h}$ , con cui sono compatibili  $\Gamma_q$  e  $\Gamma'_q$  è invariante rispetto ad una rotazione di ordine 8 attorno all'asse  $x_1$  di simmetria quaternaria; è presto vista quale sia l'influenza che  $\delta_8$  (rotazione di  $45^\circ$  attorno ad  $x_1$ ) esercita sulle  $\bar{l}_i$  di  $\Gamma_q$ :  $\bar{l}_1$  rimane invariata, mentre per  $\bar{l}_2$  e  $\bar{l}_3$  si ha

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} t_{22} \\ 1/\sqrt{2} t_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} t_{22} \\ 1/\sqrt{2} t_{22} \end{pmatrix}.$$

Chiamando ancora  $t_{22}$  la  $1/\sqrt{2} t_{22}$  ( $t_{22}$  è arbitraria),  $\Gamma_q$  assume la forma  $\Gamma_{q2}$ . Similmente accade per  $\Gamma'_q$ .

$\Gamma_h$  merita una considerazione a parte. Infatti la oloedria esagonale  $D_{6h}$ , con cui è compatibile, è invariante rispetto ad una rotazione di ordine 12

attorno all'asse  $x_1$  di simmetria senaria. Applicando l'operatore  $\delta_{12}$  (rotazione di  $30^\circ$  attorno ad  $x_1$ ) alle  $\bar{l}_i$ , mentre  $\bar{l}_1$  rimane invariata, per  $\bar{l}_2$  e  $\bar{l}_3$  si ha

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t_{22}/2 \\ \sqrt{3}t_{22}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 t_{22} \\ t_{22}/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{22}/2 \\ \sqrt{3}t_{22}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t_{22} \end{pmatrix}.$$

Sostituendo poi a quest'ultima traslazione primitiva quella che le corrisponde, che le è perfettamente equivalente per la esagira (ciò non può farsi nel caso dei due reticoli di traslazione tetragonali perchè si verrebbero ad avere due traslazioni primitive parallele<sup>(7)</sup>)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 t_{22} \\ t_{22}/2 \end{pmatrix}$$

si passa da  $\Gamma_{h1}$  a  $\Gamma_{h2}$ :  $\Gamma_{h2}$  è una formulazione differente dalla  $\Gamma_{h1}$ , dello stesso gruppo di traslazione  $\Gamma_h$ .

Ovviamente, anzi che dire che  $\Gamma_{q2}, \Gamma'_{q2}, \Gamma_{h2}$  sono ottenute da  $\Gamma_{q1}, \Gamma'_{q1}, \Gamma_{h1}$  per rotazione delle loro traslazioni primitive di un angolo pari a quello voluto dall'operatore rotazionale che lascia invariante la oloedria con cui sono compatibili, si può affermare che essi costituiscono la espressione dei gruppi di traslazione corrispondenti in un nuovo sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ruotato riguardo all'antico di un angolo eguale e contrario a quello di cui si erano prima fatte ruotare le  $\bar{l}_i$ , rispetto al quale le oloedrie in parola sono rappresentate dagli stessi operatori matriciali che le rappresentano nel vecchio sistema; ad esempio nel caso di  $\Gamma_q$  e  $\Gamma'_q$  il nuovo riferimento è ruotato rispetto all'antico di  $-45^\circ$ , ossia i suoi assi sono indivi-

duati nel vecchio riferimento dai versori  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

Perciò, concludendo, possiamo dichiarare che il movente di una duplice rappresentazione tabulare per i gruppi di traslazione  $\Gamma_q, \Gamma'_q$  e  $\Gamma_h$  e non per gli altri risiede, in sostanza, nel fatto che le terne cartesiane ortogonali  $x_1, x_2, x_3$  a cui sono riferite le traslazioni primitive sono individuate semplicemente dall'essere tali che le oloedrie siano rappresentate rispetto ad esse da determinati operatori matriciali, e nel fatto che rispetto a due di tali terne le traslazioni primitive di  $\Gamma_q, \Gamma'_q$  e  $\Gamma_h$  hanno forma diversa; mentre ciò non accade per le primitive degli altri gruppi.

(7) Cfr. ad esempio F. FUMI, *Operazioni di simmetria macro e microscopica*. II), formula (XII), in corso di stampa sul « Periodico di Mineralogia ».

**Cristallografia.** — IV) *Celle elementari di Bravais e traslazioni primitive di Seitz.* Nota (\*) di F. FUMI, presentata (\*\*) dal Corrisp. C. PERRIER.

Nelle ordinarie trattazioni strutturalistiche i reticoli bravaisiani di traslazione sono rappresentati dalle loro celle elementari<sup>(1)</sup>. Seitz ricorre invece<sup>(2)</sup> alle terne di traslazioni primitive.

Mi è sembrato utile eseguire un raffronto tra questi due tipi di rappresentazione dei reticoli di traslazione, di cui uno (Seitz) ha l'eleganza tipica di tutti gli svolgimenti puramente analitici e l'altro (Bravais) l'indiscutibile vantaggio della grande semplicità, dato che la loro perfetta equivalenza non è forse del tutto evidente.

1. Ciò su cui vogliamo preventivamente fissare l'attenzione è il fatto che i poliedri geometrici corrispondenti alle consuete celle bravaisiane elementari sono individuati da una terna di spigoli facenti fra loro angoli  $\alpha, \beta, \gamma$ , aventi valori caratteristici comuni a tutte le celle elementari corrispondenti ai reticoli compatibili con le classi di un dato sistema cristallografico<sup>(3)</sup>, lungo i quali bisogna assumere parametri  $a, b, c$ , le cui relazioni reciproche sono anch'esse caratteristiche per il sistema cristallino e non per il reticolo di traslazione considerato; quello che varia, in questa rappresentazione bravaisiana, da uno all'altro dei reticoli di traslazione compatibili con le classi di un dato sistema, sono le traslazioni che bisogna ammettere lungo tali spigoli, per avere una rappresentazione completa del gruppo di traslazione in istudio, basandosi su tali poliedri.

Per fissare le idee su un caso semplice, consideriamo i due reticoli di traslazione monoclino rappresentabili nella notazione di Schoenflies, con  $\Gamma_m$  e  $\Gamma'_m$ . Entrambi sono individuati da uno stesso poliedro geometrico i cui spigoli, che chiameremo  $x, y, z$ , ad evitare confusioni con gli assi  $x_1, x_2, x_3$  del sistema cartesiano ortogonale a cui si riferisce il Seitz, fanno tra loro gli angoli

$$\alpha = \widehat{y z} = 90^\circ \quad \beta = \widehat{z x} = 90^\circ \quad \gamma = \widehat{x y} = 90^\circ$$

$a, b, c$  sono in entrambi i casi tutti e tre diversi tra loro. La sola differenza tra  $\Gamma_m$  e  $\Gamma'_m$ , nella rappresentazione con le celle elementari, consiste nel fatto che, mentre per il reticolo  $\Gamma_m$  (monoclino semplice) basta ammettere, per avere una rappresentazione completa del gruppo, l'esistenza di traslazioni

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) *Internationale Tabelle zur Bestimmung von Krystallstrukturen*, Bd. I, pp. 70-73.

(2) «Zs. f. Kryst.», 90, 289 (1935); cfr. anche F. FUMI, *Rappresentazione analitica dei reticoli cristallini di traslazione*. «Rend. Acc. Lincei», vol. III, fasc. 3-4, p. 370, 1947.

(3) Cfr. una mia Nota di cui a (2) n. 4.



multiple intere di  $a, b, c$ , ossia della forma  $[mnp]$ , con  $m, n, p$  numeri interi, nel reticolo  $\Gamma'_m$  (monoclino a base centrata) bisogna ammettere anche l'esistenza di traslazioni semi-intero rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , ossia della forma  $[m + 1/2, n + 1/2, p]$ , oltre quella delle traslazioni intere  $[mnp]$ .

La diversità sostanziale dello schema rappresentativo del Seitz<sup>(2)</sup> rispetto a questo consiste nel presupporre il carattere di *numeri sempre interi* per i coefficienti  $n_1, n_2, n_3$  che intervengono nella (II), Nota III<sup>(2)</sup>. È proprio questa la ragione per la quale le traslazioni primitive del Seitz non coincidono sempre con gli spigoli  $x, y, z$ , delle celle elementari bravaisiane.

Precisamente una tale coincidenza mancherà senz'altro per quei gruppi  $\Gamma$  per i quali, nella rappresentazione con celle elementari, non basta ammettere traslazioni intere  $[mnp]$ ; per gli altri gruppi la trattazione di Seitz potrà poi portare o meno a traslazioni primitive  $\bar{l}_i$  coincidenti con  $x, y, z$ . Per essere precisi una tale coincidenza si verifica in effetti per tutti i reticoli di traslazione nella cui cella elementare basta ammettere traslazioni intere, eccettuato  $\Gamma_{rh}$ .

Di ciò ci apprestiamo a fornire qualche prova tenendo ben presente il carattere di tema cartesiana ortogonale del riferimento  $x_1, x_2, x_3$ , rispetto al quale il Seitz esprime le componenti delle traslazioni primitive  $\bar{l}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

2. — Prima cosa da farsi è confermare con esempi la mancata coincidenza tra le  $\bar{l}_i$  e gli spigoli  $x, y, z$  per quei gruppi di traslazione, nella cui cella elementare non basta ammettere traslazioni intere: ossia  $\Gamma'_m, \Gamma'_v, \Gamma''_v, \Gamma'_v, \Gamma'_q, \Gamma'_c, \Gamma''_c$ . Basterà fissarci su qualcuno di questi per non estenderci inutilmente: ad esempio su  $\Gamma'_m, \Gamma''_v$  e  $\Gamma'_c$ .

La cella elementare di  $\Gamma'_m$  è caratterizzata, come cella di reticolo di traslazione monoclino, da

$$\alpha = \gamma = 90^\circ \quad \beta \neq 90^\circ \quad a \neq b \neq c.$$

La terna di primitive di Seitz<sup>(4)</sup> è costituita da due traslazioni  $\bar{l}_1$  e  $\bar{l}_2$ , giacenti nel piano  $x_1 x_2$ , simmetricamente rispetto ad  $x_2$ , e da una traslazione  $\bar{l}_3$  giacente nel piano  $x_2 x_3$  perpendicolare alla digira  $x_1$ . Gli angoli risultano tutti e tre diversi da  $90^\circ$  ed i moduli delle prime due traslazioni eguali tra loro e differenti da quello della terza (v. fig. 1).

La cella elementare di  $\Gamma''_v$  è invece caratterizzata, come cella di reticolo di traslazione rombico, da

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \quad a \neq b \neq c.$$

La terna di primitive di Seitz<sup>(4)</sup> presenta rispetto alla terna del gruppo  $\Gamma'_m$  sopra citato soltanto la differenza che la componente su  $x_2$  di  $\bar{l}_3$  è uguale alla corrispondente componente di  $\bar{l}_1$  e  $\bar{l}_2$ . Gli angoli sono tutti e tre diversi da  $90^\circ$  ed i moduli delle prime due traslazioni eguali tra loro e differenti da quello della terza (v. fig. 2).

(4) Cfr. Tabella in F. FUMI, *Rappresentazione analitica dei reticoli cristallini di traslazione*. «Rend. Acc. Lincei», vol. III, fasc. 3-4, p. 370, 1947.

Infine la cella elementare di  $\Gamma_c''$  è caratterizzata, come cella di reticolo di traslazione cubico, da

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \quad a = b = c.$$

La terna di primitive del Seitz<sup>(4)</sup> è invece formata da tre traslazioni dirette, due come gli assi  $x_2$  e  $x_3$  e la terza lungo la retta equi-inclinata su

fig. 1.

fig. 2.

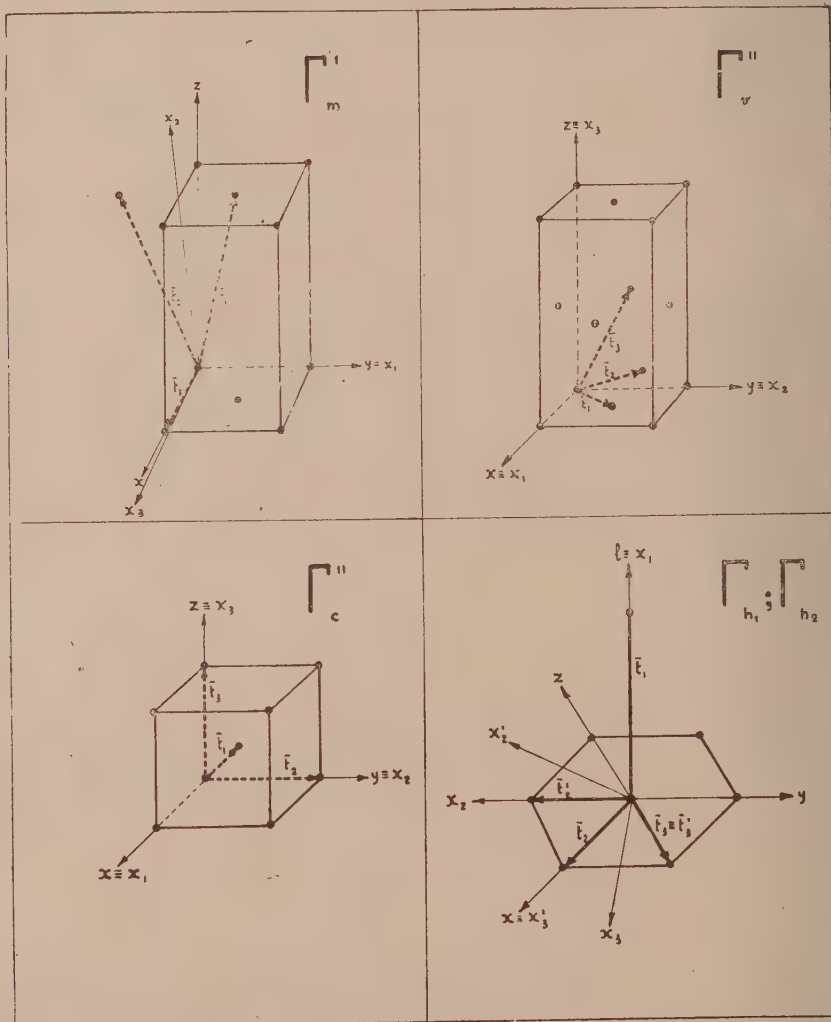


fig. 3.

fig. 4.

gli assi  $x_1, x_2, x_3$ , coincidenti con gli spigoli  $x, y, z$  della cella elementare. Si ha un solo angolo eguale a  $90^\circ$  (quello  $\vec{l}_2 \vec{l}_3$ ) e gli altri due diversi da  $90^\circ$ : solo i moduli di  $\vec{l}_2$  e  $\vec{l}_3$  sono eguali tra loro: quello di  $\vec{l}_1$  è  $\sqrt{3}/2$  volte tale valore comune (v. fig. 3).

3. — I reticoli per cui si ha perfetta coincidenza tra gli spigoli  $x, y, z$  della cella elementare bravaisiana e le traslazioni primitive  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$  del Seitz sono  $\Gamma_l, \Gamma_m, \Gamma_v, \Gamma_{q1} \equiv \Gamma_{q2}, \Gamma_{h1} \equiv \Gamma_{h2}, \Gamma_c$ ; si tratta di sei dei setti *reticoli semplici* di Bravais.

Le tre traslazioni primitive di  $\Gamma_l^{(4)}$  hanno un orientamento generico rispetto alla terna trirettangolare  $x_1, x_2, x_3$ , ed hanno moduli diversi l'uno dall'altro; ciò si accorda pienamente con la corrispondente cella bravaisiana.

Le tre traslazioni primitive di  $\Gamma_m^{(4)}$  sono dirette l'una secondo la digira, che il Seitz assume come asse  $x_1$  del riferimento ortogonale, la seconda come l'asse  $x_2$ , perpendicolare ad  $x_1$ , mentre la terza è contenuta nel piano  $x_2 x_3$  in posizione generica: i moduli sono tutti e tre diversi. L'accordo con la corrispondente cella bravaisiana è perfetto: basta chiamare  $\bar{l}_1, y; \bar{l}_3, x$  e  $\bar{l}_2, z$ .

Così, tanto per  $\Gamma_v$ , che per  $\Gamma_{q1}$ , come pure per  $\Gamma_c$ , è evidente che le tre traslazioni primitive  $^{(4)}$  sono dirette secondo gli assi del riferimento ortogonale  $x_1, x_2, x_3$  e che, nel caso di  $\Gamma_v$  esse hanno moduli tutte e tre diversi, mentre nel caso di  $\Gamma_{q1}$  hanno moduli eguali le ultime due ed infine in quello di  $\Gamma_c$  hanno moduli tutti e tre eguali. Questo in perfetto accordo con le corrispondenti celle bravaisiane.

Anche il caso di  $\Gamma_{q2}$  è presto discusso: la prima traslazione primitiva è diretta secondo  $x_1$ , che è la tetragira, mentre le altre due traslazioni  $^{(4)}$ , anziché lungo  $x_2$  e  $x_3$ , come in  $\Gamma_{q1}$ , sono dirette secondo le bisettrici del primo e del secondo quadrante del piano  $x_2 x_3$  ed hanno modulo tra loro eguale e diverso da quello di  $\bar{l}_1$ ; l'accordo con la cella bravaisiana è anche qui completo; basta chiamare, come del resto anche nel caso di  $\Gamma_{q1}$ ,  $\bar{l}_1, z$  e perciò  $\bar{l}_2, x$  e  $\bar{l}_3, y$ , in modo da avere sempre terne antiorarie.

Anche per  $\Gamma_{h1}$  e  $\Gamma_{h2}$  è facile vedere il buon accordo, anche se non la perfetta coincidenza, tra traslazioni primitive  $^{(4)}$  e cella bravaisiana. In  $\Gamma_{h1}$  le primitive di Seitz sono dirette, la prima nel senso della esagira  $x_1$  e le altre due nel piano perpendicolare formando angoli di  $+30^\circ$  e di  $-30^\circ$  colla direzione positiva di  $x_3$ . In  $\Gamma_{h2}$  la  $\bar{l}_1$  è diretta ancora come  $x_1$  e le altre due giacciono nel piano  $x_2 x_3$  formando angoli di  $\pm 60^\circ$  con la direzione positiva di  $x_3$ . In ambo i casi i moduli di  $\bar{l}_2$  e  $\bar{l}_3$  sono eguali tra loro e diversi da quello di  $\bar{l}_1$ . Nella cella bravaisiana si hanno invece tre spigoli nel piano perpendicolare alla esagira ed uno nella direzione di questa: gli angoli tra i tre spigoli del piano sono di  $120^\circ$  e i loro parametri sono eguali tra loro e diversi da quello relativo alla esagira. Le correlazioni appaiono più chiare dalla figura 4  $^{(5)}$ .

Per  $\Gamma_{rh}$  la rappresentazione del Seitz differisce totalmente da quella usuale. In quest'ultima si assumono come  $x, y, z$  i tre spigoli da cui esce la

(5) Per chiarezza nella fig. 4 la cella elementare di  $\Gamma_h$  è rappresentata solo nella parte che più interessa. Le correlazioni tra  $\Gamma_{h1}$  ( $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ ) e  $\Gamma_{h2}$  ( $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ ) sono poi illustrate ricorrendo ad una rotazione di  $-30^\circ$  della terna di riferimento  $x_1, x_2, x_3$ , anziché ad una rotazione di  $+30^\circ$  delle primitive  $\bar{l}_2, \bar{l}_3$ , naturalmente attorno ad  $x_1$  (verso positivo quello antiorario). Le due cose sono equivalenti: cfr. fine Nota III (2).

trigira, i quali formano tra loro angoli eguali e diversi da  $90^\circ$  ed hanno parametri eguali

$$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ \quad a = b = c.$$

Seitz assume invece come primitive<sup>(4)</sup>  $\bar{l}_2, \bar{l}_3$  due vettori del piano perpendicolare alla trigira facenti angoli di  $\pm 60^\circ$  colla direzione positiva di  $x_3$  e come  $\bar{l}_1$  un vettore del piano  $x_1 x_3$  facente un angolo arbitrario con la direzione  $x_1$  della trigira stessa (data la arbitrarietà di  $t_{11}$  e  $t_{13}$ ); i moduli delle traslazioni  $\bar{l}_2$  e  $\bar{l}_3$  sono eguali tra loro e diversi da quello di  $\bar{l}_1$ .

**Botanica-Genetica.** — *Volume nucleare e poliploidismo.* Nota di G. SCHREIBER, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio G. GOLLA.

Nelle Note precedenti si è fatto osservare la necessità di chiarire in modo definitivo se realmente il numero di cromosomi o meglio il valore multiplo del genoma aploide nel caso di cromosomi politenici, sia effettivamente in correlazione diretta col volume nucleare. Due serie di ricerche<sup>(1)</sup> sono state condotte a questo scopo, la prima su una serie di piante poliploidi di *Coffea* gentilmente fornitaci dalla sezione di Citologia dell'Istituto Agronomico di Campinas (Brasile)<sup>(2)</sup>, e l'altra che sarà oggetto della Nota successiva sulla serie spermatogenetica degli Ofidi.

Come abbiamo già accennato nelle altre Note, lamentiamo che nella copiosa letteratura sulle grandezze cellulari e nucleari spesso vien fatta una notevole confusione. Non si tien sempre conto che in questo problema il volume nucleare presenta una importanza differente da quella del citoplasma. Il volume cellulare è molto spesso alterato da un complesso di fenomeni accessori che modificano la correlazione quantitativa col genoma. Così la presenza di vitello nelle cellule embrionali o la vacuolizzazione in quelle vegetali. Altra confusione gravissima vien fatta nella citazione dei dati bibliografici riferentesi alla correlazione tra cromosomi e superficie nucleare. La maggior parte degli autori concorda nell'ammettere la correlazione tra numero di cromosomi e volume nucleare, ma un piccolo numero di indicazioni nella letteratura considera la correlazione diretta tra cromosomi e superficie nucleare. Specialmente Boveri dedusse questa correlazione dalle ricerche sui blastomeri di riccio di mare. Riteniamo però che queste ricerche debbano esser completamente rivedute poichè i blastomeri non presentano sempre un accrescimento intercinetico confrontabile con quello delle cellule adulte. Vedremo

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) « Bragantia » (Inst. Agron. Campinas), 1946 in corso di pubblicazione.

(2) Ai colleghi dottori C. A. Krug e A. J. T. Mendes, rispettivamente direttori delle sezioni di genetica e di citologia di questo importante centro di ricerca scientifica brasiliano mandiamo i nostri più vivi ringraziamenti.



in seguito come *solamente cellule in egual stadio di interfase possano esser confrontate tra loro* e il non tener presente questo fatto può indurre in errori interpretativi notevolissimi. Più grave però ci sembra l'errore nel quale alcuni trattatisti incorsero nella citazione dei lavori di Artom. Come è noto questo autore, al quale si deve il merito di aver illustrato dettagliatamente i rapporti tra poliploidismo e grandezza nucleare negli animali, chiamò « area nucleare » il valore della superficie ottica del nucleo, che egli misurava. Nella citazione di questi lavori questa indicazione è frequentemente data come « superficie nucleare » male interpretando il valore geometrico della misurazione di Artom e considerando questo valore nello stesso senso della « superficie » nucleare delle ricerche di Boveri. Barigozzi<sup>(3)</sup> mette chiaramente in evidenza questa situazione indicando che il « volume » sarebbe più adatto ad esprimere la relazione col numero di cromosomi e che le differenze osservate rispetto al valore teorico son dovute a questa differenza. Effettivamente soltanto siamo autorizzati a sostituire il valore del volume con quello della superficie in nuclei estremamente appiattiti, come per esempio negli eritrociti di sauropsidi negli strisci (Schreiber, inedito) nei quali la superficie misurata dell'ellissi nucleare varia con la serie di duplicazione ritmica come il volume nelle classiche misure di Jacobi (1 : 2 : 4 : 8)<sup>(4)</sup>.

Nello studio citometrico dei poliploidi ed aneuploidi, interferisce poi, il fattore genetico. Per quanto riguarda le grandezze cellulari è ben conosciuta l'influenza genetica studiata da Wettstein<sup>(6)</sup> nei muschi, da Dobzhansky<sup>(7)</sup> in *Drosophila* e da Barigozzi<sup>(8)</sup> su *Artemia*. Da tutto ciò risulta che lo studio delle relazioni quantitative del genoma colle grandezze cellulari o nucleari deve esser fatto con estrema prudenza e, tener conto di tutta una serie di fattori. Tra questi, fondamentale è quello della *forma* del nucleo e poi un fatto che generalmente viene del tutto trascurato, quello dello *stadio di accrescimento intercinetico*. Da quanto si è visto nelle Note precedenti soltanto lo studio cariometrico-statistico bene interpretato ci indica con il valore modale delle curve di frequenza le tappe dell'accrescimento interfase dei nuclei, e soltanto queste tappe possono esser confrontate tra di loro e correlate colle variazioni quantitative del genoma. Riteniamo necessario insistere sulla necessità di questo criterio « statistico » dello apprezzamento del volume nucleare, e che risulta soltanto da una ricerca estensiva su un grande numero di nuclei e dalla successiva elaborazione statistica dei dati. Una media aritmetica su pochi nuclei misurati può talvolta falsare totalmente i risultati.

(3) « Arch. Zool. It. », XX, 1935.

(4) Non mi è stato possibile consultare il lavoro di GRAFFL (cit. da GEITLER<sup>(5)</sup> che presenta una serie poliploide i cui volumi nucleari discordano dalla serie di Jacobi. Ma Geitler stesso mette in guardia contro le irregolarità causate dalla non sfericità dei nuclei.

(5) « Erg. Biol. », 18, 1941.

(6) « Biol. Zbl. », 44, 1924.

(7) « Roux Arch. », 115, 1928, 363.

(8) « J. Genetics », Suppl. 7. Int. Genetical Congr. 28, 1939, 57.

Nello studio che abbiamo intrapreso della serie di *Coffea* poliploidi abbiamo seguito appunto questo criterio, misurando i volumi nucleari di una serie di apici vegetativi e costruendo la relativa curva di frequenza. I valori modal di queste curve, diagrammati in corrispondenza al rispettivo numero di cromosomi, ci danno una perfetta correlazione positiva. Calcolata l'equazione di regressione tra i punti del diagramma venne poi calcolato (l'errore medio di stima «*Sy*») che permette di giudicare la consistenza degli scarti tra i valori reali e quelli teorici. Non è stato invece calcolato il coefficiente di correlazione «*r*» dato l'esiguo numero di elementi costituenti la serie dei poliploidi.

Un altro criterio per giudicare la realtà della correlazione tra i volumi nucleari ed i corrispondenti numeri di cromosomi venne usato facendo il rapporto, per ogni pianta tra il volume (valore modale) ed il numero di cromosomi. Come si vede dai dati della Tabella I, questo rapporto presenta valori notevolmente costanti.

TABELLA.

N. prot.	SPECIE	2n	vol. nucl. (moda)	Vol/N. cr.
1	C. arab. monosperma	22	421	19,22
2	» »	22	428	19,45
3	C. congensis	22	614	18,60
4	» »	22	668	20,26
5	C. arab. var. tip.	44	827	18,82
6	» » »	44	796	18,09
7	» » »	44	755	17,17
8	C. arab. var. bullata	66	1259	19,08
9	» » »	66	1421	21,53
10	» » »	88	1875	21,31
11	» « »	88	1857	21,10

La serie delle piante utilizzate è costituita dai seguenti elementi: *Coffea arabica* L, con le forme « di-aploide »  $2n = 22$  (Mendes e Bacchi 1940), *Coffea arabica* var. *monosperma* (Ottolander e Cramer), *Coffea arabica* L. tetraploide  $2n = 44$  (Krug 1934), *Coffea arabica* L. esaploide (var. *bullata* Cramer) e *Coffea arabica* L. octoploide (var. *bullata* Cramer) (Krug 1936), rispettivamente con  $2n = 66$  e 88. Inoltre venne misurata la specie *Coffea congensis* (Froener), diploide con  $2n = 22$  (Krug 1934). Di tutte queste piante vennero

misurati almeno 100 e dove possibile 200 nuclei del periblema dell'apice vegetativo radicale. La serie di *Coffea arabica* è perfettamente regolare, essendo i valori modali del volume nucleare perfettamente proporzionali ai rispettivi numeri di cromosomi. Interessante invece si presenta il caso del *Coffea congensis*, che avendo  $2n = 22$  presenta un volume modale nucleare corrispondente a quello di  $3n$  della serie di *C. arabica*. Ci limitiamo a segnalare questa corrispondenza, non essendo autorizzati a nessuna deduzione su questa corrispondenza senza una ricerca approfondita citologica, genetica e sistematica su questa specie.

I risultati sono pertanto assolutamente probatori, nel senso di una perfetta correlazione tra volume nucleare e numero di cromosomi, quando si tenga conto dei vari fattori che influenzano il volume nucleare primo tra i quali l'accrescimento interfase del nucleo stesso.

Tutto il corpo delle ricerche cariometriche hanno mostrato che l'accrescimento nucleare si effettua con ritmo discontinuo, e solamente si possono confrontare tra loro le tappe di questo accrescimento ma non le fasi intermedie. Queste tappe hanno sempre valori multipli di un valore basico. La corrispondenza di queste tappe coi valori multipli del corredo cromosomico nella serie poliploide del caffè rafforza la convinzione, del fatto, del resto già magistralmente illustrato dai risultati della Scuola di Painter sulle cellule neoplastiche che queste variazioni ritmiche del nucleo rispecchiano sempre fenomeni moltiplicativi del genoma<sup>(9)</sup>.

**Botanica.** — *Su di una nuova specie di Brettanomyces isolata da uva.* Nota (\*) di O. VERONA e G. FLORENZANO, presentata dal Socio A. CHIARUGI.

Durante il corso di ricerche eseguite sulla microflora delle uve di zone perichiantigiane ci è stata offerta l'occasione di isolare un lievito anascosporeo che lo studio sistematico ha permesso di riferire al genere *Brettanomyces*.

Questo genere, com'è noto, fu definito da Kufferath e van Laer nel 1921<sup>(1)</sup> per alcuni lieviti isolati dal «lambic» e da birre inglesi. Nel frattempo esso fu piuttosto trascurato e da taluno, anzi, ritenuto o supposto sinonimo di altri generi. Tuttavia, in epoca recente, è stato riconvalidato da Custers<sup>(2)</sup> ed accettato, nella loro revisione monografica dei lieviti anascosporei, da Diddens e Lodder<sup>(3)</sup>.

(9) « Univ. of Texas », Pubbl. n. 4243, 1942.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1947.

(1) H. KUFFERATH e M. H. VAN LAER, « Bull. Soc. Chim. Belgique », vol. 30, p. 270, 1921.

(2) M. T. J. CUSTERS, *Onderzoekingen over het Gistgeslacht « Brettanomyces »*. Delft, 1940.

(3) H. A. DIDDENS e J. LODDER, *Die anascosporogen Hefen* (II parte). Amsterdam, 1942.

La specie isolata presenta i seguenti caratteri fondamentali (4):

**CARATTERI CULTURALI E MICROMORFOLOGICI.** - Su agar-malto si hanno patine non abbondanti, poco dense, dapprima bianche e quindi brunastre, specialmente al centro, umide, lisce, non molto estese. Cellule ovali, spesso riunite in corte catene e cellule piuttosto allungate di  $\mu$   $2-2.5 \times 5-6$ , frequentemente munite di piccola gemma apicale o sub-laterale.

Su agar-fagiuoli patine più abbondanti, più dense, dapprima bianco-crema, poltacee, lucenti, leggermente rilevate al centro, che diventano di colore marrone con i margini più chiari, continui o lobati. Cellule ovali con grande vacuolo, disposte in catene formanti spesso aggregati pseudoramosi, di  $\mu$   $2-2.5 \times 2.5-5$ , miste a cellule più allungate o più piccole.

Su agar-Gorodkowa vegetazione scarsamente sviluppata. Aspetto morfologico come in agar-malto e in agar-fagiuoli. Non osservate spore.

Su malto si forma deposito al fondo. Liquido limpido, non anello, non velo. Le cellule del deposito si presentano generalmente ovali e vacuolate, di  $\mu$   $3 \times 5-6$ , isolate o in catena. Presenza tuttavia di cellule anche allungate di  $\mu$   $2-2.5 \times 5-6$ .

Su agar-patata patine non molto abbondanti, bianche, lucenti, opache, che divengono brune con il tempo. Aspetto micromorfologico come negli altri agar.

In patata in pezzi sviluppo molto scarso; cellule tendenzialmente allungate, comparsa di rudimentale pseudomicelio. Su blocchetti di carota sviluppo lento ma più abbondante che su patata di patina bianca, lucente, ad orlo lobato e solchi trasversali. Cellule prevalentemente ovali.

**CARATTERI BIOCHIMICI.** - La specie isolata fermenta, formando gas e acido, glucosio, levulosio, mannosio e saccarosio. Non fermenta maltosio, galattosio, raffiniosio, lattosio; produce però scarsa acidità in raffiniosio e maltosio.

Delle sorgenti di carbonio assimila i ricordati zuccheri; solo galattosio e lattosio sono molto poco utilizzati. Utilizza anche l'acido malico e tartarico; non sempre l'alcool etilico e la glicerina (5).

Delle sorgenti azotate assimila molto bene peptone ed asparagina; abbastanza bene sono utilizzati anche solfato ammonico e nitrato potassico. Nitriti ed urea non risultano essere assimilati.

Non fluidifica la gelatina.

**RIFERIMENTO SISTEMATICO.** - Nell'ambito del genere, le specie sicuramente note e ben descritte non sono molte. Custers prima, e Diddens e Lodder

(4) Trapianti di essa, come ormai è uso, sono stati depositati presso il «Centraal-bureau voor Schimmelcultures» di Barn-Delft (Olanda).

(5) Per questa prova ci siamo tenuti a quanto fissato in: N. M. STELLING-DEKKER, *Die Sporogenen Hefen*, Amsterdam, 1931 (p. 32): «Die Tauglichkeit von Äthylalkohol als Wachstumssubstrat». Si sono eseguite colture, cioè, in acqua 100, solfato ammonico 0.1, fosfato monopotassico 0.1, solfato di magnesio 0.05 presente il 3 % di alcool etilico.



dopo, ricordano *Brett. anomalus* Custers, *Brett. Clausenii* Custers, *Brett. lambicus* Kuff et v. Laer, *Brett. bruxellensis* Kuff. et v. Laer. Queste specie sono state quasi tutte isolate da « lambic » o da birre. Da uva è stato solo isolato *Brett. bruxellensis*, sotto il nome di *Mycotorula intermedia* (oggi passata in sinonimia) da Krumbholz e Tauschanoff<sup>(6)</sup>, e un *Brett. sp.* se tale si vuol considerare, come noi pensiamo, *Chalara mycoderma* isolata da Cienkowski. Quest'ultima specie è tuttavia difficile, oggi, definirla in modo preciso dal punto di vista sistematico mancando di sufficienti elementi di giudizio.

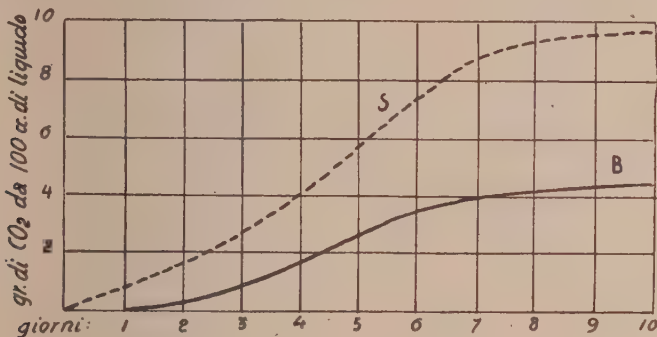


Fig. 1. — Aspetto micromorfologico di *Brettanomyces italicus*.

La specie da noi isolata trovasi più che ad ogni altra vicino a *Brett. bruxellensis*, var. *non-membranaefaciens* e a *Brett. lambicus*. Tuttavia da queste si discosta notevolmente per i caratteri micromorfologici, i caratteri colturali e quelli biochimici conforme anche esami comparativi effettuati su colture gentilmente rimesseseci dal C.B.S. di Delft. Pertanto la manteniamo distinta con il nome di:

*BRETTANOMYCES ITALICUS* n. sp.

*Cellulae plerumque ovoideae, globosae, varius oblongae vel ogivali modo apicatae, cellularum gemmae catenas singulas irregulares, plurimasque pseudoramosas efficiunt. Pseudomycelii rudimenta interdum cum blastosporis minimis efformantur. Absunt asci.*

*In musto maltato fermentatio abest et odor insignitus fit; formatur depositum non pellicula. In medio minerali cum glucosio (fructosio, mannosio), saccharosio, maltosio pro fonte carbonis cultura crescere potest, sed non cum galactosio et lactosio.*

*Assimilatio nitratis potassii, sulfatis ammonici, asparaginae, peptonis.*

*In agar maltato cellulae lente crescunt, celeriter moriuntur, sed longius vivere possunt cum carbonate calcico in agar maltato aut cerevisiae glucosato.*

*Cultura in agar maltato (tres septimanas-25° C.) in tubo, sub-lutea, laevis, paulum effusa, nitida, mollis. In agar phaseoli et carotae cum saccharosio, cultura primum alba, nitens, mollis, effusa, deinde (tres septimanas-25° C.)*

(6) G. KRUMBHOLZ e W. TAUSCHANOFF, «Zentr. f. Bakt.», II, vol. 88, p. 366, 1933.

*lutea aut sub-lutea tipice cum marginibus tautum albo-griseis, nitida, paulum nervata.*

Habitat: *in uvae fructibus.*

Come prima notavamo il rinvenimento di specie di *Brettanomyces* nelle uve e nel vino non appare, per quanto oggi è noto, molto frequente tanto che non sappiamo, al momento, quale importanza enologica si possa attribuire alla specie qui descritta. Ciò nonostante abbiamo voluto saggiare il suo comportamento di fronte ad alcuni costituenti del mosto, determinare la sua tolleranza all'alcool e, soprattutto, vedere come essa sostiene la fermentazione alcoolica.

Per la prima ricerca (sviluppo in presenza di quantità varie di acido tartarico e malico) si è proceduto coltivando *Brett. italicus* in un mezzo costituito da acqua 1000, fosfato bipotassico 1, solfato di calcio 1, peptone 1, glucosio 1, carbonato di calcio 10, addizionato di quantità varie di acido tartarico o di acido malico. Dopo 10 giorni di coltura risultò che la presenza di acido tartarico è tollerata, nei limiti delle quantità sperimentate, fino al 6‰ e quella dell'acido malico fino al 4‰.

Per saggiare la sua tolleranza all'alcool si coltivò invece in infuso di malto contenente alcool etilico in dosi progressivamente crescenti fino al 12.5 % in volume. Al 10° giorno si notò che lo sviluppo ebbe luogo anche in presenza del 12.5 % di alcool.

Finalmente il saggio di fermentazione fu eseguito (non disponendosi di mosto d'uva naturale) su di un mezzo costituito da acqua 1000, glucosio 200, acido tartarico 5, solfato di magnesio 0.1, fosfato bipotassico 0.75, fosfato ammonico 5, più piccole quantità di autolisato di lievito. L'esperienza fu condotta in matracci Erlenmeyer chiusi con valvola ad acido solforico determinando giornalmente, per 10 giorni, l'anidride carbonica sviluppantesi. In prove parallele, sempre al 10° giorno, fu dosato l'alcool per distillazione, ottenendosi in questo caso il 3.1 — 3.3 % di alcool in volume.

gr. di CO<sub>2</sub> su 100 di liquido prodotto da *Brettanomyces italicus*  
(c. 61) in comparazione con un ceppo di *Sacch. ellipsoideus*.

dopo giorni     *Brett. italicus*     *Sacch. ellipsoideus*

1	—	0.710
2	0.102	1.514
3	0.651	2.602
4	1.403	4.010
5	2.350	5.675
6	2.871	7.120
7	3.414	8.211
8	4.060	9.740
9	4.210	9.874
10	4.356	9.880

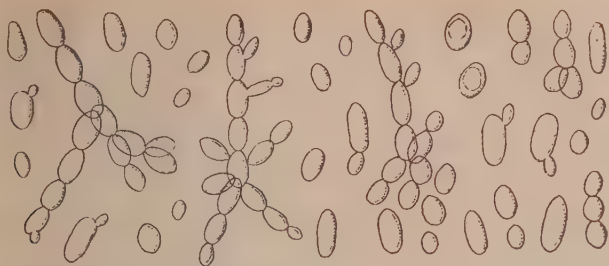


Fig. 2. — Quantità di  $\text{CO}_2$  prodotta in 10 giorni da 100 cc. di liquido ad opera di *Brettanomyces italicus* (B) e *Sacch. ellipsoideus* (S).

Queste prove preliminari dimostrano che *Brettanomyces italicus* tollera una certa quantità di acidi (tartarico e malico) nel mezzo; tollera altresì una certa quantità di alcool etilico che forma, in soluzioni sintetiche presente zucchero (glucosio), fino al 3.1-3.3 % in volume.

Dato che le varie specie di *Brettanomyces* note sono apprezzate produttrici di aroma in alcune birre inglesi, intervenendo soprattutto nella fermentazione secondaria, resterà a vedere come questa specie (ed altre allo studio), sole od associate a *Saccharomyces ellipsoideus* si comporteranno nel mosto d'uva e quindi quale potrà essere la loro importanza enologica. Ciò sarà oggetto di ricerca durante la prossima campagna vinicola.

### Fisiologia vegetale. — *Pressati lichenici e mitosi cellulari* (\*).

Nota (\*\*) di F. M. GEROLA, presentata dal Socio G. GOIA.

In alcune Note<sup>(1)</sup> precedenti ho potuto mettere in evidenza l'azione mitoinibitoria posseduta dai filtrati di cultura e dai pressati sia del feltro miceliare, sia del corpo fruttifero, di alcuni funghi.

Tale azione è posseduta pure dai pressati dei talli dei licheni?

Furono scelti tre tipi di licheni: due corticicoli frondosi (*Usnea* sp. ed *Evernia prunatri*) ed uno terricolo (*Parmelia* sp.). Tali licheni furono ripetutamente spruzzati di acqua per 24 ore (in maniera che risultassero ben rigonfiati), e quindi furono pressati al torchio a notevole pressione.

Nel liquido ottenuto secondo tale procedimento, furono poste giovani piantine di frumento (secondo la tecnica già descritta in altra Nota<sup>(1)</sup>), e quindi venne sia misurato l'allungamento delle radici, sia (dopo colorazione al Feulgen), eseguito il conteggio delle mitosi all'apice radicale.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1947.

(1) F. M. GEROLA, 1946 e 1947, « Rendic. Acc. Naz. Lincei ».

Ecco i risultati <sup>(2)</sup>:

Controllo in H <sub>2</sub> O	484 (290)-1,5 = 348 (229)-2,5 = 344 (210)-1,5
<i>Usnea</i>	o o o = o o o = o o o
<i>Evernia</i>	255 (187)-o = 119 (70)-o = non color. o
<i>Parmelia</i>	normale 2 = normale 1 = normale 3

Sia i pressati di *Usnea* che quelli di *Evernia* determinano l'arresto immediato della crescita in lunghezza delle radici, immerse in essi; le radici invece poste nel pressato di *Parmelia* non manifestano alcuna alterazione nel decorso della loro crescita in lunghezza, ma esse anzi vengono a superare in lunghezza (sebbene di poco) gli stessi controlli.

Notevole inoltre il fatto che le piantine di frumento immerse nei pressati di *Usnea* o di *Evernia*, dopo circa 48 ore formino alla base del coleoptile delle voluminose bozze, dalle quali poi spuntano nuove radici (due o tre), aventi uno spessore leggermente superiore a quello normale, e crescenti regolarmente nel liquido, che era risultato tossico per le radici primitivamente immerse in esso, bloccate in maniera definitiva nella loro crescita in lunghezza. (Su tale importante fatto, che indica una assuefazione delle radici alle sostanze tossiche, riferirò in altra Nota).

In *Usnea* già dopo 24 ore non si notano quasi più mitosi, e quelle poche presenti hanno un aspetto compatto, degenerato. I nuclei per la massima parte sono in riposo e più piccoli che di norma. Essi non perdono la colorabilità al Feulgen, alcuni però mostrano l'espulsione della cromatina in goccioline. Dopo 48 ore essi non assumono più al Feulgen la normale colorazione rosso viva, ma invece una tinta rosso-viola-bruna. Tale colorazione più cupa si accentua dopo 72 ore e dimostra una alterazione notevole della cromatina.

Le radici immerse nei pressati di *Evernia* mantengono per alcun tempo le mitosi, queste però vanno decrescendo rapidamente, mentre a mano a mano va scomparendo la colorabilità dei nuclei al Feulgen. (Già dopo 48 ore parte dei nuclei non si colorano più).

Se confrontiamo questi risultati con quelli già riferiti sull'azione dei pressati dei corpi fruttiferi di vari imenomiceti, possiamo notare una notevole corrispondenza. Le radici immerse nei pressati di *Usnea*, come quelle nei pressati di *Russula* ecc., mostrano nelle cellule dell'apice l'espulsione della cromatina in goccioline nel plasma cellulare; e come per i pressati di *Lycoperdon*, così anche per quelli di *Evernia*, si ha dopo un certo tempo la scomparsa della colorabilità al Feulgen dei nuclei dell'apice delle radici immerse in essi.

Le radici poste nei pressati di *Parmelia*, mostrano, all'apice, mitosi perfettamente normali sia per tipo, sia per numero, sia per proporzione tra

(2) In ogni colonna, il primo numero indica il numero totale delle mitosi all'apice radicale, il secondo dà il numero delle metafasi, il terzo esprime un punto di merito sull'allungamento della radice.



le varie fasi. Ciò dimostra che anche nei licheni, come già nei funghi, la capacità di secernere sostanze ad azione mitoinibitoria è particolare di alcune specie soltanto.

La corrispondenza dell'azione mitoinibitoria dei pressati dei licheni, con quella dei pressati fungini, faceva supporre, come per questi ultimi, che essi pure possedessero anche potere batteriostatico.

Mentre venivano ultimate queste esperienze, veniva a conoscenza dei lavori di Burkholder, Evans, e Veigh e Thornton,<sup>(3)</sup> e Burkholder ed Evans<sup>(4)</sup>; tali autori esaminarono l'azione su vari schizomiceti dei pressati grezzi di un certo numero di licheni: 52 specie (tra le quali anche *Usnea barbata*) furono trovate possedere azione antibiotica verso alcune specie batteriche, altre invece si dimostrarono completamente inattive,

Pertanto questa proprietà mitoinibitoria posseduta dai pressati di alcuni licheni coincidente con la loro azione antibiotica verso alcuni schizomiceti porta un ulteriore appoggio all'ipotesi da me già da tempo prospettata della analogia tra l'azione carioclasica e quella batteriostatica di molti antibiotici.

Recentemente gli Autori sopracitati e Bargellini, Del Pianto e Marini Bettolo<sup>(5)</sup> hanno potuto dimostrare che l'azione antibiotica dei pressati grezzi dei licheni è da attribuirsi alla presenza in essi degli acidi lichenici, in quanto alcuni di tali acidi (acido vulpinico e acido usnico) allo stato di purezza manifestano un elevato potere antibiotico.

**Fisiologia vegetale.** — *Associazioni di miceli ed azioni mitoinibitrici* (\*). Nota (\*\*) di F. M. GEROLA, presentata dal SOCIO G. GOLA.

È noto che sia la composizione del mezzo di cultura, sia le condizioni ambiente possono avere una influenza notevolissima sulla produzione o meno di sostanze stimolanti od inibenti la crescita da parte dei funghi. Così ad esempio, l'areazione promuove grandemente la produzione di tali sostanze (d'altro lato però i processi ossidativi ad essa legati possono neutralizzare rapidamente la sua influenza); la reazione alcalina del mezzo rende spesso molto labili le sostanze inibenti la crescita, escrete dai funghi; la temperatura può inibire o favorire pure la produzione di tali sostanze ecc.

È noto inoltre come nell'associazione di più organismi su di un mezzo che fornisca solo limitate quantità di nutrimento, sia favorita la crescita degli organismi a più rapido sviluppo a svantaggio degli altri. Sono noti

(3) P. R. BURKHOLDER, A. W. EVANS, Mc I. VEIGH a H. K. THORNTON, 1944. « Proc. Nat. Ac. Sciences », 30.

(4) P. R. BURKHOLDER a. A. W. EVANS, 1945. « Bull. Torrey Bot. Club », 72.

(5) G. BARGELLINI, E. DEL FIANTO e G. B. MARINI-BETTOLO, 1946. « Rend. Acc. Naz. Lincei ».

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1947.

d'altro lato alcuni casi di crescita vantaggiosa di due o più funghi assieme, su di un mezzo di cultura che per ognuno di essi avrebbe permesso solo uno sviluppo stentato, e ciò in dipendenza dell'escrezione nel mezzo, da parte di tali funghi, di sostanze ormonali (tiamina, inosite ecc.) necessarie per il loro sviluppo e che sono prodotte le une da un fungo, le altre dall'altro.

L'azione antibiotica degli escreti di molti funghi è ormai di dominio comune; ricordo però (Weidling)<sup>(1)</sup> che alcuni lieviti producono enzimi batteriolitici solo in presenza di stafilococchi e di certi altri batteri, ciò che rende probabile l'ipotesi che la crescita associata di tali organismi determini od aumenti la produzione delle sostanze a carattere tossico.

In alcune Note<sup>(2)</sup> precedenti ho riferito sull'azione carioclasica o mitoinibitoria posseduta dai filtrati di cultura di alcuni funghi isolati dalle radici o dalla rizosfera di piante micorriziche. Dato che nelle radici e nella rizosfera di tali piante non si trovano mai questi funghi « isolati », ma sempre associati fra loro, esaminai alcuni effetti delle associazioni di tali funghi, eseguendo delle culture miste, di composizione voluta. (Di due organismi soltanto).

I funghi che adoperai per le culture miste furono i seguenti: *Alternaria* 1056, *Rhizopus arrhizus* 1077, ifomicete 2378 (tutti bloccanti la crescita delle radici di frumento immerse nei loro filtrati); *Pythium* (probabilmente) 2391, *Penicillium* del gruppo *candidum* 3104 (privi di influenza sulla crescita delle radici).

Furono eseguite le seguenti culture miste:

<i>Alternaria</i> + <i>Rhizopus</i>	<i>Rhizopus</i> + <i>Pythium</i>
<i>Alternaria</i> + ifomicete	<i>Rhizopus</i> + <i>Penicillium</i>
<i>Alternaria</i> + <i>Pythium</i>	ifomicete + <i>Pythium</i>
<i>Alternaria</i> + <i>Penicillium</i>	ifomicete + <i>Penicillium</i>
<i>Rhizopus</i> + ifomicete	

Nei filtrati di tali culture furono immerse delle piantine di frumento (secondo la tecnica da me già descritta in altre Note) e venne sia misurato l'allungamento della radice, sia eseguita colorazione al Feulgen dell'apice radicale.

In questi casi di culture miste si aveva sempre la scomparsa dell'azione tossica dei filtrati, quando uno dei due funghi associati fosse o *Pythium* o *Penicillium*, Normalmente questa scomparsa dell'azione tossica era completa, nel senso che le radici immerse nei filtrati continuavano regolarmente la loro crescita in lunghezza e non mostravano nessuna lesione dei nuclei all'apice (la parte più sensibile della radice, come ho potuto mettere in evidenza nelle mie Note precedenti). Solo nella cultura mista di *Alternaria* + *Pythium* non si verificava la scomparsa dell'azione bloccante la crescita

(1) R. WEIDLING, 1938. « Bot. Review », 4.

(2) F.M. GEROLA, 1946 e 1947. « Rendic. Acc. Naz. Lincei ».

in lunghezza della radice, tuttavia i filtrati di tali culture miste erano meno tossici di quelli di culture pure di *Alternaria*, in quanto già nelle prime 48 ore si poteva rilevare la emissione di nuove radici. Questa scomparsa dell'azione tossica dei filtrati, si verificava anche quando *Penicillium* o *Pythium* erano presenti nelle culture miste in quantità del tutto limitata, rispetto al notevole sviluppo dell'altro micelio ad essi associato.

In tutte le altre prove di culture miste (in assenza cioè di *Penicillium* o di *Pythium*) i filtrati mantenevano inalterata la loro notevole tossicità.

Pur avendo dimostrato in altra Nota <sup>(3)</sup> l'indipendenza della tossicità dei filtrati dalla loro reazione idrogenionica, eseguii ugualmente misurazioni del pH per ricercare se la scomparsa dell'azione tossica dei filtrati fosse contemporanea ad una variazione della reazione del mezzo di cultura.

Eccò i valori del pH ritrovati <sup>(4)</sup>:

<i>Alternaria</i>	8	<i>Alternaria</i> + <i>Pythium</i>	8
<i>Rhizopus</i>	2,4	<i>Alternaria</i> + <i>Penicillium</i>	6,5
ifomicete	6	<i>Rhizopus</i> + ifomicete	6,73 (?)
<i>Pythium</i>	2,8	<i>Rhizopus</i> + <i>Pythium</i>	5-7,24
<i>Penicillium</i>	7	<i>Rhizopus</i> + <i>Penicillium</i>	7,5
<i>Alternaria</i> + <i>Rhizopus</i>	3,64-6,20	ifomicete + <i>Pythium</i>	5,8
<i>Alternaria</i> + ifomicete	6,70	ifomicete + <i>Penicillium</i>	6,5

Le culture miste con *Penicillium* e *Pythium* fanno variare moltissimo la reazione del mezzo, che si porta di norma a valori che poco si discostano dalla neutralità. Questo fatto deve essere ritenuto molto importante quale indice di una notevole variazione della qualità e della misura delle sostanze escrete dai funghi in cultura mista, ma non può essere invocato come causa diretta, determinante la possibilità della crescita in lunghezza delle radici.

Infatti oltre ai risultati riportati nella mia Nota precedente, anche quelli qui riferiti mostrano che l'allungamento delle radici può avvenire anche in pH acidi (*Pythium*), e che d'altra parte il blocco di tale allungamento può aver luogo anche in liquidi a pH vicini alla neutralità (*Alternaria* + *Rhizopus*, *Alternaria* + ifomicete).

È da notare inoltre che questa variazione della reazione del mezzo si verifica anche quando il componente, che potremo definire come « neutralizzante » la tossicità dell'altro fungo, si trova in proporzioni minime, rispetto a quello avente azione tossica, se isolato (così ad esempio in alcune culture miste di *Rhizopus* + *Pythium*, ove *Rhizopus* era assolutamente predominante e la presenza di *Pythium* era rilevabile solo dall'esame microscopico e dalla reazione cambiata del mezzo di cultura).

(3) F. M. GEROLA, 1947 in corso di stampa.

(4) Alle volte sono dati due numeri del pH: tale doppia numerazione riportai quando, in dipendenza dello sviluppo maggiore o minore di uno o dell'altro dei due associati, notai nelle varie culture miste delle differenze notevoli del valore della reazione idrogenionica dei filtrati.

In tutte le culture miste considerate, l'effetto tossico dei filtrati veniva ad essere soppresso, come già dissi, quando uno dei componenti l'associazione era o *Pythium* o *Penicillium*. Questa scomparsa dell'azione tossica è dovuta ad una azione reciproca sul metabolismo di tali funghi, agente sulla qualità degli escreti dei funghi stessi, oppure è dovuta ad una neutralizzazione chimica fra le sostanze emesse da *Pythium* e *Penicillium* e quelle tossiche degli altri funghi?

Preparai pertanto delle miscele dei filtrati di culture pure di *Pythium* e *Rhizopus* in tutte le proporzioni tra 1 e 10, ed esaminai nel solito modo la tossicità di tali liquidi. (Furono allestiti naturalmente anche controlli con proporzioni tra 1 e 10 di filtrati di *Rhizopus* + acqua pura). La scomparsa dell'azione tossica dei filtrati s'inizia solo a rapporti tra *Rhizopus* e *Pythium* di 5/5 (in maniera corrispondente ai controlli), per cui la scomparsa dell'azione tossica non risulta dipendere in questo caso da una diretta neutralizzazione di sostanze presenti nei due filtrati, ma unicamente da fatti di diluizione.

Esaminai inoltre se piantine di frumento poste per alcun tempo nei filtrati di *Pythium* e quindi di *Rhizopus* fossero arrestate nella crescita o meno. Posi pertanto per 24-48-72-96 ore delle piantine di frumento nel filtrato di *Pythium* e quindi trasportai tali piantine in filtrati di *Rhizopus* o in acqua pura, come controllo. Le radici poste nei filtrati di *Rhizopus* furono subito bloccate nel loro allungamento e mostrarono lesioni nucleari all'apice come se fossero state poste direttamente in tali filtrati, i controlli invece crebbero regolarmente.

Infine allestii delle culture di *Rhizopus* nell'usuale liquido minerale glucosato, con aggiunta però in varie proporzioni di filtrati di culture di *Pythium* e di *Penicillium candidum*. A concentrazioni deboli (4 %) di *Pythium*, *Rhizopus* si sviluppa come di norma, ed il filtrato (di culture di 15 giorni) dimostra aver perso di tossicità, in quanto pur bloccando l'allungamento delle radici, tuttavia non inibisce la emissione di nuove radici, che spuntano dopo circa 96 ore. A concentrazioni invece più elevate (e questo specialmente per l'aggiunta di filtrati di *Penicillium*) lo sviluppo di *Rhizopus* è molto ritardato come nascita e lentissimo come sviluppo, tanto che dopo più di 15 giorni di cultura, il filtrato non ha ancora assunto alcuna capacità tossica per le radici di frumento.

Da tutta questa serie di esperienze si può pertanto ritenere che la scomparsa della tossicità nelle culture miste sopraricordate, sia dovuta ad una azione diretta di un fungo sul metabolismo dell'altro, azione che porterebbe ad una variazione del tipo delle sostanze escrete dai miceli.

Questa così notevole diversità di azione, tra i filtrati di culture pure dei funghi isolati dalle radici e dalla rizosfera di piante micorriziche, e quella degli stessi funghi cresciuti associati, apre la possibilità ad alcune considerazioni.

1. Spesso sono stati isolati dall'interno delle radici di piante micorriziche, sia legnose (*Juniperus*) che erbacee (*Pirola*) vari miceli sterili, che



però non si è riusciti, malgrado ripetuti tentativi, a far ritornare in simbiosi con la pianta da cui furono isolati. Tale mancata simbiosi sperimentale venne attribuita al mancato isolamento delle vere forme micorriziche. Se pensiamo però che queste esperienze furono eseguite da ricercatori i più varî, anche fra quelli dei quali i successi ottenuti hanno dimostrato il grande valore della loro tecnica, pare strano che i miceli isolati non siano veramente di funghi micorrizici. Lindquist<sup>(5)</sup> d'altro lato ha emessa l'ipotesi che la simbiosi micorrizica possa istituirsi solo quando il fungo e la pianta ospite producano l'uno per l'altro delle sostanze ormonali indispensabili o molto favorevoli per la loro crescita e che essi non sono capaci di sintetizzare. Non si può supporre forse che le simbiosi sperimentali non riuscite potessero avere diverso risultato se, anzichè lavorare con i singoli ifomiceti isolati, si tentasse di mettere in presenza della pianta ospite delle associazioni di tali funghi? Potrebbe darsi appunto che in causa di queste associazioni vengano formati dai funghi quelle sostanze stimolanti complementari supposte da Lindquist, non solo, ma che essi uniti assieme siano capaci inoltre di introdursi nei tessuti della pianta superiore, mentre se isolati, non avrebbero tale potere. Savastano e Fawcett<sup>(6)</sup> hanno provato sperimentalmente la importanza di alcune associazioni fungine per il prodursi di malattie parassitarie nelle piante: Fawcett<sup>(7)</sup> dall'esame dell'azione di varie associazioni fungine sulle piante emette l'ipotesi che un certo numero di malattie parassitarie abbisognino di una determinata associazione di organismi per potersi manifestare. Si può ritenere così che anche per l'istituirsi della simbiosi micorrizica alle volte abbiano valore decisivo le associazioni fungine della rizosfera o della flora radicolare normale.

2. Ultimamente si è riconosciuto un valore antibiotico notevole a diverse forme fungine verso altri microorganismi, e nulla si oppone a ritenere che anche da questo lato la simbiosi micorrizica possa avere una notevole importanza. Rayner<sup>(8)</sup> e Neilson-Jones hanno<sup>(9)</sup> hanno potuto dimostrare che la sterilità del terreno di Wareham dipendeva dalla presenza in esso di sostanze tossiche di origine biologica, e che l'istituirsi della micorrizica, limitando lo sviluppo delle specie anaerobie del terreno (per un fatto di antibiosi), riportavano questo alla fertilità.

Dei fatti analoghi possono prodursi continuamente nell'ambito della rizosfera, con manifestazioni di antibiosi tra funghi micorrizici, della normale flora radicolare, ed altri funghi e batteri ad escrezioni tossiche. Così Cordon ed Haenseler<sup>(10)</sup> hanno ritrovato un'azione tossica degli escreti di un batterio

(5) B. LINDQUIST, « Bot. Notiser », 1939.

(6) G. SAVASTANO e H. FAWCETT, « Journ. of. Agric. Research », 39, 1929.

(7) H. FAWCETT, « Phytopathology », 21, 1931.

(8) C. RAYNER, « Ann. of. appl. Biology », 30, 1943.

(9) W. NEILSON-JONES, « Journ. Agric. Science », 31, 1941.

(10) C. CORDON e C. M. HAENSELER, « Soil Science » 47, 1939.

su *Rhizoctonia*, ed Allen ed Haenseler<sup>(11)</sup> hanno dimostrato una tossicità dei filtrati di *Trichoderma* verso numerosi funghi del terreno. Nelle esperienze da me compiute è risultato ben evidente come le culture miste di *Pythium* (un fungo cioè della normale flora radicolare) perdano completamente di tossicità.

3. La notevole variazione di tossicità delle culture miste, avente riflessi, come sopra ho accennato, coi fatti di antibiosi del terreno, può presentare, a mio avviso, anche importanza in riguardo alle associazioni fungine che si verificano entro la radice stessa.

Dai lavori della scuola di Uppsala si sa ad esempio che il *Micelium radicans atrovirens*, attivo parassita radicale, pur essendo quasi sempre presente nelle radici, non può quasi mai raggiungere uno sviluppo dannoso alla pianta, per il probabile antagonismo dei funghi micorrizici. E nulla esclude che tali funghi facciano sì che gli escreti del *Micelium*, pur penetrando nelle radici, non abbiano affatto quella tossicità che essi avrebbero se tale fungo crescesse isolato. (Quando infatti il *Micelium* si sviluppa da solo sulle radici, esso agisce da vero parassita, portando a morte più o meno rapida la radichetta invasa).

D'altro lato nelle micorrize endotrofiche (per merito di Peyronel), è stata dimostrata la presenza di un doppio micelio: la *Rhizoctonia* ed il Ficomietoide. Dopo quanto sopra ho esposto, non si può supporre forse che questo ficomietoide abbia valore fondamentale nell'influire sulla qualità degli escreti di *Rhizoctonia*?

Mentre i risultati di queste ricerche stavano per essere dati alla stampa, sono venute a conoscenza di un recentissimo lavoro di Goidànich<sup>(12)</sup>. Dalle interessanti ricerche di tale autore risulta che una specie di *Fusarium* coltivato su agar minerale glucosato, dà origine a delle produzioni perfettamente analoghe dal lato morfologico a quelle del ficomietoide micorrizico, qualora esso si trovi in presenza di un batterio isolato pure dalle radici di frumento da cui venne isolato il *Fusarium*. Ciò porta un'ulteriore conferma all'importanza che si deve attribuire alle associazioni dei microorganismi del terreno, riguardo al problema della micorrizia.

Ritengo pertanto che grande interesse avrebbe un esame «in extenso» dell'influenza degli escreti dei funghi micorrizici e della normale flora radicolare tra loro e con i funghi ed i batteri della rizosfera e del terreno.

(11) M. C. ALLEN e C. M. HAENSELER, «Phytopathology», 26, 1935.

(12) G. GOIDÀNICH, «Nuovo Giorn. bot. it.», n. 53, 1946.

**Patologia vegetale.** — *Recenti osservazioni sulla biologia della «Deuterophoma tracheiphila» Petri e considerazioni sull'eziologia del «mal secco» degli agrumi.* Nota (\*) di G. GOIDÀNICH e G. RUGGIERI, presentata dal Corrisp. A. TROTTER.

Riteniamo opportuno riassumere nella presente Nota i risultati di alcune esperienze e di numerose osservazioni che abbiamo avuto occasione di fare recentemente, tanto in laboratorio quanto tra gli agrumeti colpiti dal mal secco.

I. CARATTERISTICHE MORFOLOGICHE DELLA *Deuterophoma tracheiphila*. — L'esame della struttura morfologica della *D. tr.* ha messo in rilievo dei fatti veramente singolari, che permettono di vedere sotto una luce nuova la posizione sistematica di questo fungo e danno nel contempo delle indicazioni utili ad una migliore interpretazione della sua biologia.

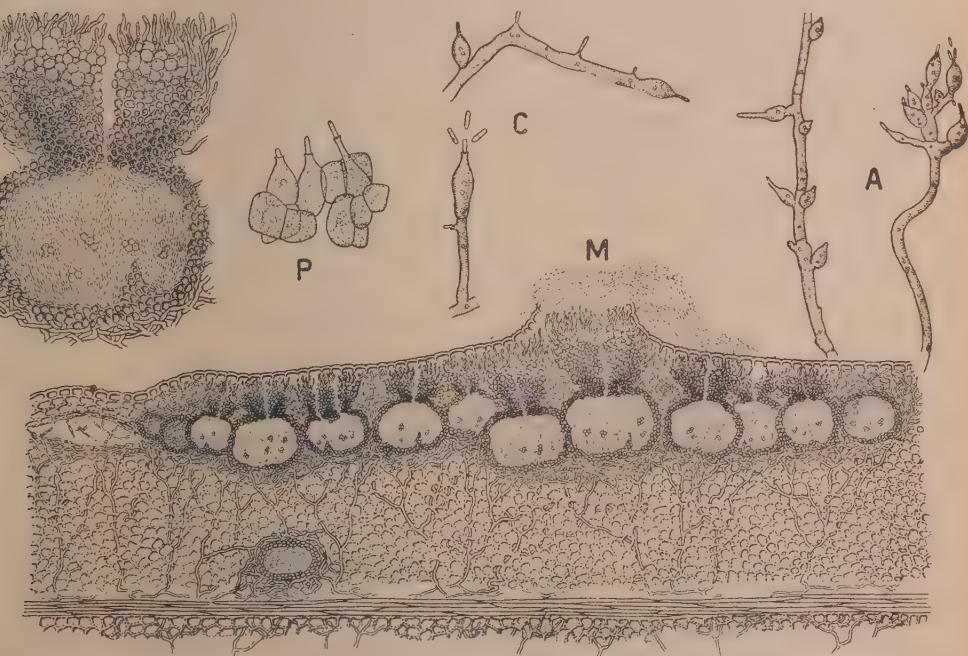


Fig. 1. — Aspetti microscopici della morfologia di *Deuterophoma tracheiphila* Petri.

In basso: fruttificazioni picnidiche viste in una sezione radiale di un rametto di due anni ucciso dal «mal secco». Vi si distingue bene la struttura della parete, del nucleo fertile e del tessuto iperplastico apicale, che ha provocato il distacco e la lacerazione dell'epidermide, attraverso la quale fuoriesce la massa mucosa contenente i picnoconidi (M).

In alto a sinistra: particolare di un picnidio maturo e, a più forte ingrandimento, cellule fertili (P) della camera picnidica da cui si differenziano i picnoconidi.

Al centro: ife fertili con conidiogeni filidiformi in diversi stadi di differenziazione (C).

A destra: ife fertili con disposizione dei conidiogeni del tipo *Phialophora*.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1947.



Contrariamente a quello che ha sostenuto Petri<sup>(1, 2, 3)</sup> - il quale evidentemente ha condotto la maggior parte delle sue osservazioni su materiale sviluppatosi in ambiente artificiale - la fruttificazione picnidica di questo fungo non è astoma ma è provvista quasi normalmente, a maturità, di una apertura ostiolare situata nella parte apicale del corpo fruttifero. Attorno a tale apertura si differenzia una abbondante produzione ifenchimatica, costituita di elementi o segmenti cellulari assai irregolari (che può assumere dimensioni voluminose, eguaglianti quelle dell'intero corpo picnidico) a forma di colonna o di tronco di cono con la svasatura rivolta verso l'alto (v. fig. 1).

La funzione di tale tessuto (noto per altri micromiceti col nome di «tissu fendant»<sup>(4)</sup>, «Aperturalgewebes»<sup>(5)</sup>, «buffertissue»<sup>(6)</sup>), è evidentemente quella di favorire la lacerazione degli strati epidermici sotto i quali si sono differenziati i picnidi e ciò al fine di permettere ai conidi di pervenire a contatto con l'ambiente esterno. Lo stesso adattamento morfologico si conosce anche per un'altro fungo dei limoni: il *Colletotrichum gloeosporioides*<sup>(7)</sup>.

Non è escluso che in una certa percentuale di picnidi la fuoriuscita dei conidi avvenga anche tramite una rottura irregolare in punti indeterminati del rivestimento parietale del corpo fruttifero, determinatasi per una improvvisa pressione della massa mucosa interna, o per azione dei picnidi vicini in uno stadio più avanzato di evoluzione. Ma quello che noi abbiamo descritto è il processo di differenziazione che si riscontra più di frequente in natura, come abbiamo rilevato sul materiale di Sicilia e dell'Italia centrale (Terracina).

In coltura artificiale, su substrati agarizzati, l'apertura ostiolare si rintraccia con molta difficoltà. In questo ambiente i corpi fruttiferi sono talvolta riuniti in masse irregolari ed assumono forme aberranti, schiacciate, gibbose, che raggiungono dimensioni di 8-10 volte quelle normali sull'ospite.

I picnidi sono disposti di solito in una unica serie, fra gli strati più esterni dei complessi istologici corticali e l'epidermide dei rametti uccisi dall'infezione del parassita; eccezionalmente si formano anche più in profondità, in seno ai tessuti floematici e qui pure giungono a perfetta maturazione. I conidi in tal caso si liberano in un secondo tempo dopo il disfacimento degli strati più superficiali del sistema corticale (v. figg. 1 e 2).

(1) L. PETRI, *Sulla posizione sistematica del fungo parassita delle piante di limone affette da «mal secco»*. «Boll. Staz. Pat. Veg.», n. s., 9, 1929, p. 393.

(2) L. PETRI, *Ulteriori ricerche sulla morfologia, biologia e parassitismo della Deuterophoma tracheiphila*. «Ibidem», n. s., 10, 1930, p. 191.

(3) L. PETRI, *Alcune considerazioni sui generi Deuterophoma e Blastophoma*. «Phyt. Zeitschr.», 7, 1934, pp. 117-119.

(4) G. ISTVANFFI, *Études sur le rot livide de la vigne* (Coniothyrium diplodiella). «Ann. inst. centr. ampel. roy. Hongrois», 2, 1902, 288 pp.

(5) W. FÜSTING, *Zur Entwicklungsgeschichte der Pyrenomyceten*. «Bot. Ztg.», 26, 1868, p. 369.

(6) B. O. DODGE, *Origin of the central and ostiolar cavities in pycnidia of certain fungous parasites of fruits*. «Journ. Agr. Res.», 23, 1923, p. 743.

(7) B. PEYRONEL, *Studio morfobiologico e sistematico di un fungo parassita dei limoni nel Messinese*. «Boll. Staz. Pat. Veg.», n. s., 6, 1926, pp. 118-134.



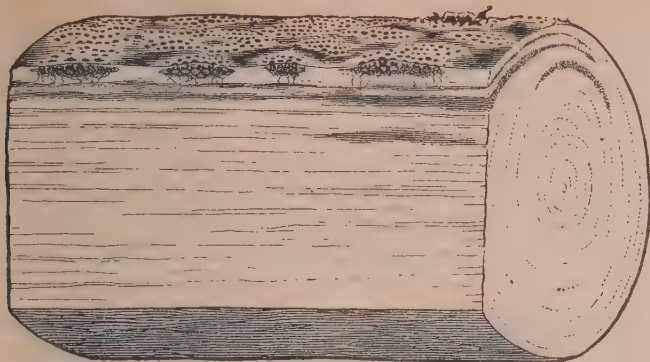


Fig. 2. — Rametto di limone affetto da «mal secco» in cui si sono differenziate le fruttificazioni della *Deuterophoma tracheiphila*. L'asportazione nella parte anteriore di un lembo di corteccia e di legno, mette in evidenza la struttura degli ammassi picnidici.

I corpi fruttiferi nascono su un ifenchima molto lasso, a gruppi non numerosi, di 25-40 elementi, fra di loro distinti e distanziati. Col tempo i gruppi confluiscono e per l'aumento in volume dei singoli corpi fruttiferi e per l'insorgenza di altri ifenchimi fertili. Singolare è la loro disposizione, che si osserva con una certa frequenza, a circoli concentrici più o meno completi.

La produzione dei picnoconidi avviene per un processo semiendogeno dalle cellule fertili che dapprima occupano, come un tessuto prosenchimatico non compatto, tutta o gran parte del nucleo del corpo fruttifero e poi la porzione periferica di questo (v. fig. 1, P).

Per il momento abbiamo rilevato la fuoriuscita dei conidi da un solo punto della cellula iniziale; ma non vogliamo escludere che avvenga anche da più punti. Del pari è da stabilire se, almeno nei primi stadi, quando si inizia il dissolvimento degli elementi centrali del nucleo, non si abbiano conidi ad origine tipicamente endogena<sup>(8)</sup>. I picnoconidi maturi sono provvisti di due guttazioni opalescenti all'estremità.

La produzione dei conidi dall'apparato vegetativo avviene per mezzo di un processo analogo a quello dei picnoconidi. Di norma si originano all'apice dei conidiogeni unicellulari, di aspetto predominante fialidiforme; ma possono uscire anche da punti indifferenziati ai lati o all'estremità dell'ifa fertile (v. fig. 1, A). Caratteristiche sono le ife fertili del micelio aereo del centro della colonia che si riuniscono a fasci di diversi elementi e assumono una tinta bruna; allora le fruttificazioni hanno l'aspetto tipico di *Phialophora*.

I rilievi fatti ed ora accennati sulla morfologia della *D. tr.* ci hanno permesso di ravvicinare sistematicamente ad essa l'agente della tracheomicosi

(8) Cfr. G. GOIDÀNICH e G. RUGGIERI, *Le Deuterophomaceae di Petri*. « Annali della Sperimentazione Agraria » (in corso di stampa).

dell'olmo diffusa in quasi tutto l'emisfero dell'America settentrionale e che andava sotto il nome di *Dothiorella Ulmi* Verrall et May, al quale abbiamo dato conseguentemente la denominazione binomiale di *Deuterophoma Ulmi* <sup>(9-10)</sup>.

Un altro rilievo di apparente secondaria importanza sulla morfologia della *D. tr.* riguarda la comparsa del pigmento; lo riportiamo per il significato che si attribuisce alle caratteristiche cromatiche del micelio nella differenziazione dei ceppi di *Deuterophoma* di provenienza diversa. Come aveva segnalato Petri <sup>(11)</sup> abbiamo riscontrato che in coltura artificiale il micelio può



Fig. 3. - Rametti di limone colpiti da infezione di *Deuterophoma* conservati in camera umida per 36 ore a 18° C. La vegetazione miceliale, ricca di fruttificazioni del tipo ifale, fuoriesce solo dai punti non coperti dalla corteccia.

manifestare la colorazione rossa sotto l'influenza di batteri o di muffe (specialmente *Penicillium*) che gli crescano vicino. Con Petri non siamo d'accordo però nel ritenere che tale reazione sia un indice di degenerazione del micelio;

(9) A. F. VERRALL and CURTIS MAY, *A new species of Dothiorella causing die-back of Elm.* «Mycologia», 29, 1937, pp. 321-324.

(10) G. GOIDÀNICH e G. RUGGIERI, *Un reperto di sistematica micologica di eccezionale interesse fitopatologico.* «Ricerca scientifica», 17, 1947, pp. 1135-1139.

(11) L. PETRI, loc. cit. (2) p. 219.

interpretazione che non si accorda con la permanenza della completa vitalità nelle parti della colonia interessata dal fenomeno e che d'altronde darebbe una spiegazione troppo semplicistica della funzione dei pigmenti dei funghi.

## 2. DEL PRONTO E LUSSUREGGIANTE SVILUPPO DELLA FORMA CONIDICA. —

Mentre sulla chioma delle piante infette non si è ancora avuta l'occasione di riscontrare la forma conidica della *Deuterophoma* per quante attente osservazioni sieno state fatte, in laboratorio essa si sviluppa con straordinaria prontezza ed abbondanza. Ponendo rametti infetti sotto campana di vetro



Fig. 4. — Micelio differenziante in corrispondenza di una cicatrice foliare e di una ferita sulla spina sovrastante.

od entro scatole Petri, essi incominciano a rivestirsi di micelio e rami conidiofori entro le prime 24 ore (v. fig. 3). Entro i primi 5 giorni, mantenendo il materiale infetto ad una temperatura ambiente di 16–18° C., si ha pure la formazione dei primi picnidj.

Il micelio fuoriesce da qualsiasi superficie scoperta del tessuto legnoso (v. figg. 3–5), mentre, per lungo tempo, non si sviluppa affatto sulla corteccia. Quest'ultima osservazione ci aveva fatto sorgere il dubbio che nel mantello corticale fosse contenuta qualche sostanza capace di impedire lo

sviluppo del fungo; però apposite esperienze<sup>(12)</sup> non hanno finora confermato tale dubbio; le indagini in argomento tuttavia continuano.

L'osservata facilità ed abbondanza con la quale si sviluppa in laboratorio la forma conidica della *Deuterophoma* ci lascia ritenere che essa, come pensava anche Petri<sup>(13)</sup>, si sviluppi molto verosimilmente anche in natura e precisamente in prossimità del terreno dove si vanno accumulando fra la vegetazione erbacea spontanea foglie e rametti infetti e dove quindi si determina abbastanza di frequente - specie dopo qualche pioggia - un ambiente ad elevato grado di umidità. Pure in seno alle giovani piantine di arancio amaro allevate nel raccolto ambiente da vivaio, o fra i germogli

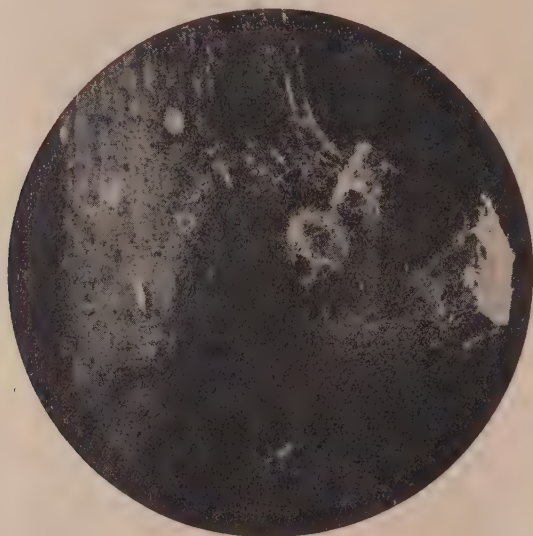


Fig. 5. - Micelio fuoriuscente dalla superficie di taglio del picciolo di una foglia invasa dalla *Deuterophoma*.

che abbondantemente sorgono al piede dei soggetti colpiti da mal secco, può verosimilmente svilupparsi la forma conidica, specie nella vegetazione più bassa. Sulla presunta formazione dei conidi in natura le nostre indagini proseguono.

3. DELLA TARDIVA ED INFREQUENTE FORMAZIONE DEI PICNIDI IN NATURA. - Dobbiamo innanzitutto dire che, per quante osservazioni sieno state da noi fatte su rametti colpiti di mal secco e raccolti in diverse zone agrumate, non siamo riusciti a trovare formazioni picnidiche sulle cicatrici lasciate dalle foglie dopo il loro distacco dai rametti. Dubitiamo molto che

(12) G. GOIDÀNICH e G. RUGGIERI, *Il carattere della resistenza dei Citrus al parasitismo della Deuterophoma tracheiphila* Petri. «Annal. Sperim. Agr.», 1947 (in corso di stampa).

(13) L. PETRI, loc. cit. (2), pp. 203-204.



queste formazioni picnidiche, constatate a suo tempo da Petri<sup>(14)</sup>, siano effettivamente frequenti in natura.

Lo stesso, all'incirca, è da dire delle formazioni picnidiche sottoepidermiche. Non soltanto in questa primavera ma anche nei precedenti anni, abbiamo dovuto constatare che tali formazioni, fra le piante di limone colpite da mal secco, sono piuttosto rare; con una certa frequenza è dato riscontrarle soltanto nei rametti di arancio amaro, segnatamente nei vivai o fra le ceppaie di piante precedentemente distrutte dal mal secco, ossia entro una ristrettissima cerchia di piante che in molti comprensori agrumetati può anche mancare. A ciò si aggiunga il fatto che la formazione dei picnidi sottoepidermici avviene dopo che il ramo infetto ha perduto le foglie ed il mantello corticale è diventato bruno e pressochè secco, cioè in un lasso di tempo entro il quale in pratica l'agrumicoltore interviene con la pronta asportazione e distruzione dei rami infetti; quindi, molto probabilmente la formazione dei picnidi di *Deuterophoma*, a somiglianza di quella dei conidi, avviene con maggiore facilità in prossimità del terreno su materiale infetto quivi caduto.

In considerazione di ciò, dubitiamo che le infrequenti, saltuarie formazioni picnidiche che si verificano sulle parti aeree della pianta, abbiano un grande ruolo nel determinare le infezioni, spesso in forma epidemica, che si verificano in seno agli agrumeti. Ma opiniamo che la principale fonte dei germi infettanti provenga dal terreno sul quale precedentemente è andato a cadere del materiale ammalato. Agente di diffusione di tali germi sarebbe principalmente il vento ma talvolta, inconsapevolmente, è anche l'uomo (attraverso zappature o concimazioni inconsulte), nel qual ultimo caso si possono determinare le forme più rapide e nefaste di infezioni, quelle provenienti da ferite provocate sulle radici, di fronte alle quali non c'è specie o varietà di *Citrus* che resista all'azione parassitaria della *Deuterophoma*<sup>(15)</sup>.

4. UNA RIPRODUZIONE RAPIDA DEL MAL SECCO<sup>(16)</sup>. — È stata ottenuta sperimentalmente inoculando, a mezzo siringa ipodermica, sospensioni di picnoconidi sulla più esterna cerchia legnosa del soggetto (arancio amaro) di giovani piante di limone. La rapida comparsa dei primi sintomi della malattia, dopo 19 giorni dall'inoculazione, l'attribuiamo in primo luogo al fatto che con la puntura si portano gli elementi riproduttivi del fungo a contatto diretto di attivi complessi istologici dell'ospite, senza menomarne la vitalità o quanto meno senza alterare la loro complessa funzionalità. Mentre col solito metodo di inoculazione per ferita si vengono a ledere sensibilmente i tessuti xilematici periferici e si provocano modificazioni funzionali ed istologiche di carat-

(14) L. PETRI, *Lo stato attuale delle ricerche sul «mal del secco» dei limoni*. Ibidem, 10, 1930, p. 76.

(15) V. CARRANTE e G. RUGGIERI, *Esperienze di inoculazione della Deuterophoma tracheiphila Petri*. «Ann. Sper. Agr.», 1947 (in corso di stampa).

(16) G. GOIDÀNICH e G. RUGGIERI, *Una rapida riproduzione sperimentale del mal secco degli agrumi*. «Ann. Sper. Agr.», 1947 (in corso di stampa).

tere riparativo (tilli, meristemi cicatriziali) che contrastano la penetrazione degli elementi riproduttivi e vegetativi della *Deuterophoma*.

In secondo luogo il rapido effetto delle inoculazioni di picnospore è anche da mettere in relazione alla probabile diretta immissione di tali elementi nella corrente ascensionale dei succhi, analogamente a quel che è stato già constatato per altri agenti di tracheomicosi <sup>(17)</sup>.

5. SUL CARATTERE DELLA RESISTENZA DEI CITRUS <sup>(18)</sup>. - Esperienze con conidi e picnospore di *Deuterophoma* messi a germinare in goccia pendente in succhi estratti dal mantello corticale e dal cilindro legnoso di arancio dolce e di arancio amaro. - specie rispettivamente resistente e predisposta al mal secco - hanno rivelato che in tali succhi, senza apprezzabili differenze tra le due specie, sono contenute sostanze fortemente stimolatrici dell'energia germinativa e dell'ulteriore sviluppo del micelio. Quindi, l'idea che la resistenza sia legata al chemotropismo negativo di sostanze contenute nei tessuti della pianta, come succede per qualche altra malattia fungina <sup>(19)</sup>, risulta insostenibile allo stato attuale delle nostre ricerche e si ritiene invece che la resistenza sia dovuta ad una particolare reattività del citoplasma vivente di fronte alla diffusione del micelio; si tratta cioè di una *resistenza protoplasmatica* che si estrinseca particolarmente quando la pianta si trova in piena e normale attività vegetativa.

Nei soggetti molto resistenti il micelio resta lungamente paralizzato nella sua attività e si ritiene che possa subire un lento e graduale dissolvimento per cui le piante possono guarire dalle precedenti infezioni. Però, *guarigione non è immunità acquisita*: le piante possono subire in seguito nuove infezioni, specie quando sono molto giovani e non si trovino in piena e normale attività vegetativa, ossia quando i fattori di resistenza sono piuttosto deboli e la patogenicità della *Deuterophoma* è piuttosto forte.

Quando le infezioni, invece di avere un decorso discendente, come generalmente avviene, hanno un decorso ascendente allora la reattività della pianta viene man mano paralizzata dai prodotti tossici del metabolismo del fungo che vengono diffusi dalla corrente ascensionale dei succhi. Inoltre non è da escludere che la medesima corrente concorra a diffondere in alto gli elementi apparentemente conidiformi che si formano nei vasi <sup>(20)</sup>, moltiplicando così gli interni centri di infezione <sup>(21)</sup>.

(17) W. M. BANFIELD, *Distribution by the sap stream of spores of three fungi that induce vascular wilt diseases of Elm.* « J. Agric. Res. », 62, 1941, pp. 637-681. Recens. in « R. A. M. », XX, 1941, p. 608.

(18) G. GOIDÀNICH e G. RUGGIERI, loc. cit. (12).

(19) W. N. EZEKIEL, J. J. TAUBENHAUS e J. F. FUDGE, *Growth of Phymatotrichum omnivorum in plant juices as correlated with resistance of plants to root rot.* « Phytopathology », 22, 1932, pp. 459-474.

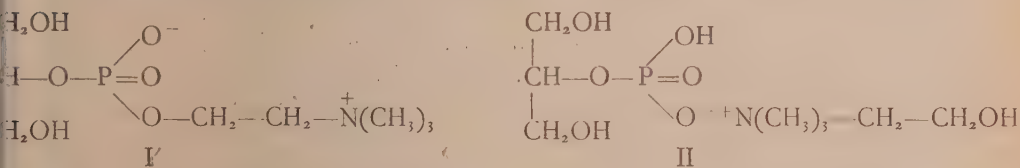
(20) G. GASSNER, *Untersuchungen über das « mal secco » oder « Kurutan » der Limonbäume.* « Phytopat. Zeitsch. », 13, 1940, p. 38.

(21) W. M. BANFIELD, loc. cit.

**Biologia** (Biochimica). — *L'ossidazione biologica della glicerilfosforilcolina* (\*). Nota (\*\*) di M. ALOISI e P. BUFFA, presentata dal Corrisp. G. VERNONI.

In una Nota precedente Aloisi [1] presentò i dati relativi alla ossidazione della sfingosilfosforilcolina da parte di diversi tessuti animali. L'estere in questione era stato ottenuto in via estrattiva dal pancreas di maiale.

Nel 1938-39 King e Aloisi [2] isolarono dallo stesso materiale un altro composto che aveva le caratteristiche analitiche della glicerilfosforilcolina (ed un altro che probabilmente era l'estere dicolinico dell'acido glicerofosforico) (1). Di questo materiale, per i tentativi successivi di purificazione, non si aveva quantità sufficiente per istituire delle ricerche metaboliche. Allo scopo di confrontare il metabolismo ossidativo dei tessuti in presenza di prodotti puri e dei composti più semplici di cui sono costituiti, abbiamo cercato di avere gli esteri  $\alpha$ - e  $\beta$ -glicerofosforici della colina per via sintetica. Dei risultati di questa indagine sarà detto in altra Nota; qui vogliamo solo far rilevare come i prodotti che in letteratura sono stati descritti come esteri glicerilfosforici della colina (Arnold [3], Mihalik e coll. [4], Ravazzoni e Fenaroli [5]) (2) o non sono in realtà esteri della colina, bensì sali dell'acido glicerofosforico con la colina, o sono comunque prodotti molto dubbi a questo riguardo [5]. Noi, per esempio, abbiamo ottenuto lo stesso prodotto cristallino che Arnold definisce come l'estere gliceril- $\beta$ -fosforilcolina (I), ma abbiamo potuto dimostrare che non è in realtà che il  $\beta$ -glicerofosfato di colina (II):



L'estere in parola si è potuto preparare facendo agire il glicerofosfato biargentico col picrato di bromocolina e *solo* con questo mezzo.

Abbiamo così avuto a disposizione i seguenti prodotti (di cui diremo le caratteristiche nella citata ulteriore Nota):  $\alpha$ -glicerofosfato di sodio (88% forma  $\alpha$  all'acido periodico);  $\beta$ -glicerofosfato di sodio (100% forma  $\beta$  all'acido periodico);  $\alpha$ -glicerofosfato di colina;  $\beta$ -glicerofosfato di colina;  $\alpha$ -glicerilfosforilcolina;  $\beta$ -glicerilfosforilcolina; colina cloruro.

(\*) Ricerche eseguite nel Centro di Studio per la Fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia generale dell'Università di Roma diretto dal prof. G. Vernoni.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1947.

(1) Queste ricerche furono pubblicate solo più tardi a causa dello stato di guerra intervenuto.

(2) Cfr. anche S. BELFANTI, A. ERCOLI e M. FRANCIOLI in E. BAMANN e K. MYRBÄCK, *Die Methoden der Fermentforschung*. G. Thieme, Leipzig, 1940.

Abbiamo voluto studiare il metabolismo ossidativo di vari tessuti animali *in vitro* di fronte a questi differenti substrati. Le condizioni di esperimento sono riportate a capo delle tabelle riassuntive dei risultati. Nella Tabella I si trovano i dati relativi al confronto fra  $\alpha$ - e  $\beta$ -glicerofosfato di sodio;  $\alpha$ - e  $\beta$ -glicerofosfato di colina e  $\alpha$ - e  $\beta$ -glicerilfosforilcolina di fronte al fegato, al rene ed al cervello di *Cavia cobaya*.

TABELLA I.

*Condizioni di esperimento:* substrato 0,0182 mMole; tampone  $\text{PO}_4$  M/15, pH 7,4, cc 1,5; sospensione di organo omogeneizzata (omogeneizzatore di Potter ed Elvehjem) contenente il 20 % di peso fresco in tampone fosfati 0,5 cc; NaOH 10 % (a parte) 0,2 cc; volume totale in vaschette di Warburg coniche 3,2 cc raggiunto con soluzione fisiologica di NaCl; gas = aria; temp. = 38° C.

Le cifre riportate si intendono relative al consumo di  $\text{O}_2$  per ora dovuto alla sola ossidazione del substrato, cioè ottenute dalla differenza tra respirazione totale e respirazione residua del tessuto.

Tessuto	Na glicerofosfato		glicerofosfato di colina		glicerilfosforilcolina	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
	mm <sup>3</sup> $\text{O}_2$ per ora					
Fegato	4.6	0	18.5	2	11.7	0
Rene (corticale)	39.4	2.4	33	0	21	5.2
Cervello (corteccia)	49.3	0	34.5	0	18.3	4

Da queste prove risulta in modo non equivoco che nelle nostre condizioni sperimentali gli  $\alpha$ -isomeri degli esteri, sia dei primari (glicerofosfati), sia dei secondari (glicerilfosforilcolina) sono abbastanza bene ossidati mentre non lo sono o quasi i  $\beta$ -isomeri. Da notare che, nelle nostre condizioni, il pH pressochè neutro e la forte concentrazione di joni  $\text{PO}_4$  potevano inibire l'attività fosfatase e impedire quindi una defosforilazione e rifosforilazione del glicerofosfato per passare dalla forma  $\beta$  inattiva a quella  $\alpha$  attiva. Tale trasformazione è ancora meno pensabile riguardo ai relativi esteri secondari. Dai dati esposti nella tabella si nota anche che il cervello ed il rene hanno maggiore capacità ossidante verso la glicerilfosforilcolina di quella dimostrata dal fegato il quale invece ossida più degli altri organi la sfingosilfosforilcolina come è riportato da Aloisi nella Nota citata [1]. Inoltre si può rilevare che mentre per il cervello e per il rene l'ossidazione del glicerofosfato semplice è sempre maggiore di quella del corrispondente estere secondario, il fegato dimostra un maggiore consumo di ossigeno con l'estere colinico che con



il semplice glicerofosfato di sodio (risultati costanti in tre prove). Ciò potrebbe attribuirsi alla presenza del radicale della colina sapendo che il fegato ha attività colino-ossidastica (Mann e coll. [6, 7]) e questa interpretazione potrebbe essere suffragata dal fatto che anche l' $\alpha$ -glicerofosfato di colina viene sempre ossidato dal fegato più attivamente dell' $\alpha$ -glicerofosfato di sodio. Tuttavia va tenuto presente che nella concentrazione da noi usata in queste prove (0,0182 mMole) la colina, anche da parte del fegato, viene assai scarsamente ossidata e nelle condizioni esposte non dà scarti manometrici superiori in valore assoluto agli errori stessi del metodo. Ciò apparirà chiaro dai risultati delle seguenti altre prove.

Se si pongono le sospensioni omogeneizzate di alcuni tessuti in presenza di maggiori quantità di substrato (0,054 mMole) si nota un comportamento diverso tra l'ossidazione del glicerofosfato di sodio e del glicerofosfato di colina nel senso che con quest'ultimo si ottengono valori maggiori di quelli forniti dal glicerofosfato di sodio anche quando vi si aggiungano quelli dovuti alla indipendente scarsa ossidazione della colina. Si osserva inoltre che anche con il  $\beta$ -glicerofosfato di colina si può avere un valore di ossigeno notevolmente superiore a quello relativo al  $\beta$ -glicerofosfato di sodio che, come sappiamo, è assai scarsamente o affatto attaccato in via ossidativa. Queste constatazioni sono riassunte nella tabella II.

TABELLA II.

*Condizioni di esperimento* come nella Tab. I; la quantità dei substrati in queste prove corrispondeva a 0,054 mMole. I valori di  $O_2$  si riferiscono alla sola ossidazione del substrato.

Tessuto	Na glicerofosfato		Colina glicérosfato		Colina cloruro
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	
	mm <sup>3</sup> O <sub>2</sub> per ora				
Fegato	15.9	0	29.6	25.9	4.2
»	12.7	0	29.9	15.6	3.6
Cervello (corteccia)	127.6	5.2	98.1	27.1	4.1
Surrene	34.8	0	37.9	8	6
Tessuti embrionali (sospensione 30 %)	34.2	0	32.8	12.8	0

Questo comportamento non è facile a interpretare; si possono fare due ipotesi: o che la presenza concomitante dell'acido glicerofosforico e della colina renda possibile ai tessuti di utilizzare meglio uno od ambedue questi substrati, compreso l'isomero  $\beta$  dell'acido glicerofosforico che da solo nelle

nostre condizioni non viene mai o assai scarsamente attaccato; o che la presenza della colina favorisca la mutazione dell'acido glicerosforico dalla forma inattiva (isomero  $\beta$  e forma stereoisomera inattiva dell'isomero  $\alpha$ ) in quella attiva. Su questo punto ritorneremo con una prossima Nota.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] ALOISI M., questi « Rendiconti », Serie VIII, vol. II, p. 98, 1947.
- [2] KING E. J. e ALOISI M., « Biochem. Journ. », 39, 470, 1945.
- [3] ARNOLD H., « Ber. deutsch. chem. Gesell. », 73, 87, 1940.
- [4] MIHALIK St., JENEY A. & v. URI J., « 11 Tagung d. ungar. physiol. Ges., Debrecen », 1941.
- [5] RAVAZZONI C. e FENAROLI A., « Ann. Chim. Appl. », 30, 318, 1940.
- [6] MANN P. J. G. e QUASTEL J. H., « Biochem. J. », 31, 869, 1937.
- [7] MANN P. J. G., WOODWARD H. E. e QUASTEL J. H., « Biochem. J. », 32, 1024, 1938.

**Biologia.** — *Note araneologiche.* — XXVII. *Su la maniera, usata da «Latrodectus I3-guttatus» Rossi, nel catturare la preda e considerazioni, relative a tale attività nell'ordine degli Araneidi<sup>(\*)</sup>.* Nota<sup>(\*\*)</sup> di B. MONTEROSSO e C. RONSISVALLE, presentata dal Socio A. RUSSO.

Riguardo ai modi e ai mezzi usati dai Ragni nell'impadronirsi della preda, si trovano sparse nella vasta bibliografia, concernente questo gruppo di Aracnidi, molte notizie, delle quali le più interessanti sono riportate dai trattatisti<sup>(1)</sup>. Nessun Autore, tuttavia, ha proposto, per quel che ci risulta, una partizione razionale dei modi e dei mezzi, di cui ci occupiamo; quelle, finora fatte, per vero, rispecchiano un criterio classificatore puramente artificiale. Ciò, riteniamo, dipende soprattutto dalle lacune ed incertezze, che si hanno nella conoscenza di questa fondamentale attività, che d'altro canto è certamente ed intimamente legata alla morfologia speciale e generale del corpo, nonchè alla cosiddetta industria, di cui son capaci molte specie, vale a dire al tipo strutturale della rete sericea, costruita dai rappresentanti di tali specie, all'estensione e alla posizione di essa; ovvero alla mancanza, o quasi, di detta industria, come avviene in altre specie.

Va ancora aggiunto che le modalità della caccia dipendono anche dalle abitudini e soprattutto dal tipo di locomozione, caratteristici della preda

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata e di Zoologia dell'Università di Catania.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1947.

(1) Cfr. specialmente U. GERHARDT e A. KAESTNER, *Ordnung der Arachnida*, in «Kükenthall, Hand. d. Zool.», III Bd., 2 Hälfte, 1 Teil, p. 394 e sgg. Una letteratura, che può dirsi completa e accuratissima si trova in P. BONNET, *Bibliographia araneorum*, t. I, Toulouse, 1945, p. 709 e sgg.

preferita: così, gli insetti alati, vengono in genere presi con mezzi differenti da quelli, che sono messi in uso per afferrare gli organismi camminatori.

La maggioranza degli studiosi, difatti, tiene, in primo luogo, conto della « sedentarietà » o del « vagabondaggio » dei Ragni, per dare idea sommaria dei vari sistemi di cattura della preda.

I ragni « sedentari » per afferrarla, attendono, che la vittima incappi nel tessuto, da essi stessi filato.

Secondo il modo poi, con cui si impadroniscono dell'animaletto irretito, è possibile fare varie suddivisioni, sulle quali non è d'uopo fermarsi qui, se non per fissare brevemente qualche carattere essenziale e differenziale<sup>(1)</sup>, che ci occorrerà ricordare più in là:

a) la preda viene senz'altro uccisa dal ragno e consumata, dopo che esso semplicemente abbia spezzato i fili di seta, che l'hanno fermata; a seconda delle specie araneologiche, poi, la utilizzazione può aver luogo sul posto stesso della cattura o altrove; ovvero

b) la preda impigliatasi viene, mediante inoculazione del veleno, che geme dai cheliceri, uccisa, prima o dopo essere stata avvolta da un insieme di fili, che nel secondo caso la immobilizzano, nell'altro invece rendono al predone più agevole l'utilizzazione, a scopo alimentare, del corpo, di cui s'è impadronito; taluni ragni financo rivestono la preda di un completo e fitto involucri a mo' di sudario.

Quanto agli « erranti » o « vagabondi » le seguenti modalità possono considerarsi come essenziali:

c) la preda viene raggiunta di corsa, chiusa con mossa repentina nella cerchia delle zampe e dei palpi e attanagliata con i cheliceri;

d) la vittima è spiata, indi avvicinata con mosse lente e guardinghe, fino a quella giusta distanza, che consenta al ragno di raggiungerla con un salto e afferrarla tra i cheliceri; ovvero

e) la preda spiata è avvicinata con ogni riguardo, fino a quella giusta distanza, che consenta al ragno di spruzzarvi sul corpo una sostanza agglutinante, che emerge dai cheliceri violentemente allo stato liquido e che, subitaneamente coagulando, l'appiccichi al suolo o per lo meno ne impastoi gli arti deambulatori, sì da toglierle la facoltà di sottrarsi all'insidiatore; indi viene facilmente uccisa e utilizzata.

Quest'ultima modalità fu messa in evidenza per la prima volta da uno di noi (Monterosso) già fin dal 1927 ed illustrata in diverse pubblicazioni<sup>(2)</sup>. Essa venne scoperta nei rappresentanti del genere *Scytodes* e primamente

(2) Lo schema, che segue, è stato fatto, ricavandone gli elementi da numerose notizie, sparse qua e là in trattati, note, memorie speciali, e basandoci anche sulla nostra esperienza diretta e sui nostri studi. Non si pretende che esaurisca l'argomento, sicchè va considerato come un primo saggio, che dovrà perfezionarsi ulteriormente.

(3) B. MONTEROSSO, *Osservazioni preliminari sulla biologia del gen. « Scytodes »*. Quest. i. « Rendiconti », vol. VI, 2ª ser., fasc. 5, 1927; *La biologia degli Scitodidi e la ghiandola glutinifera di essi*, « Arch. Zool. Ital. », vol. 12, 1928.

ritenuta esclusiva di questi; ma di recente fu confermata in *Loxosceles* sp. dallo stesso Autore<sup>(4)</sup>.

Va notato però che dalle *Scytodes* tale capacità è posseduta in sommo grado, mentre in *Loxosceles* appare evidentemente meno sviluppata, anzi si direbbe meno perfetta, per i seguenti motivi: la ghiandola glutinifera è poco appariscente, almeno all'esterno (cefalotorace; l'emissione dello schizzo occupa un tempuscolo brevissimo; i fili, in cui si concreta questo liquido, sono notevolmente sottili, sì da non essere visibili che mediante l'ausilio di lenti, sia pure di quelle comuni dei binoculari: sulla preda prendono posizione irregolare e disordinata, son corti e non formano di solito un unico tratto, mentre le *Scytodes* emettono in getto continuo uno spruzzo, che dà un filo a forma di linea spezzata e con caratteri particolari<sup>(5)</sup>; *Loxosceles*, infine, non lancia la sostanza da lontano, ma addirittura addosso alla preda, quando questa passa vicino ad esso, ovvero, quando, inseguita, viene raggiunta in corsa.

Poichè i generi *Scytodes* e *Loxosceles* sono molto affini, appartenendo allo stesso gruppo Sicariidae, si potrebbe pensare che le accennate differenze siano da attribuire a grado diverso di evoluzione filogenetica. Ma su tale problema, almeno per il momento, ci sembra prudente astenerci da ogni giudizio, anche perchè proprio ora abbiamo scoperto in altra specie, notevolmente lontana dalle due precedenti, la facoltà, sviluppata in misura cospicua, di investire la preda con getti di materiale liquido.

Avendo fatto catturare in Sardegna un certo numero di *Latrodectus I3-guttatus* Rossi, che, arrivati qui in ottime condizioni, sono stati posti in allevamento razionale per svolgere un predisposto piano di ricerche sulla biologia di questa interessante specie<sup>(6)</sup>, si è potuto già constatare un fatto abbastanza importante, la cui conoscenza sarà ulteriormente approfondita, ma di cui si dà qui appresso breve comunicazione preliminare.

L'animale adulto costruisce in cattività una rete, che non ha forma veramente irregolare, come si dice dagli Autori, che l'hanno osservato. Essa risulta di fili molto tesi, più o meno lunghi, notevolmente tenaci, di calibro relativamente grosso, collegati insieme a maglie romboidali e infine assicurati saldamente per gli estremi alle pareti del recipiente, qua e là, mediante estese piastre di adesione. Di solito, la parte inferiore dei fili verticali è rivestita da una speciale sostanza attaccaticcia, secondo il costume di molti Teridiidi<sup>(7)</sup>, per esempio di *Tentana*.

(4) B. MONTEROSSO, Note araneologiche. XXVI. Del modo con cui i Ragni dei gen. « *Scytodes* » e « *Loxosceles* », catturano la preda. Questi « Rendiconti », vol. II, fasc. 5, 1947.

(5) Cfr. MONTEROSSO, opere citate (1927 e 1928).

(6) Si utilizza all'uopo un contributo straordinario concesso dal C. N. R. per studi sulla biologia degli Aracnidi. Questa Direzione sente il dovere di rinnovare qui i suoi ringraziamenti all'On. prof. G. Colonnetti e al Comitato Naz. per la Biologia e la Medicina.

(7) Cfr. H. WIEHLE, Neue Beiträge zur Kenntniss der Fanggewebe der Spinnen aus der Fam. Argiopidae, Uloboridae und Theridiidae. « Zeit. Morph. Oekol. d. Tiere », 22 Bd., 2-3 Hefte, 1931.



Riservando a lavori successivi altre precisazioni sulla rete, ci preme qui comunicare che gli esemplari in allevamento sono estremamente sensibili a qualsiasi agente, che faccia sussultare, sia pure in misura minima, i fili della costruzione. Basta talora la vibrazione del terreno, causata da un passo, che si avvicini al tavolo, su cui è posta la gabbietta, perchè l'animale si agiti e percorra la rete, in cerca di preda. Sono voracissimi, sicchè vengono alimentati con mosconi e, quando riesce possibile, con piccoli acrididi, animali, che pare preferiscano ad ogni altro. Date le proprietà e la disposizione della rete, ogni organismo, che si introduca vivente nella prigione di *L. 13-guttatus*, non tarda ad impigliarvisi, attirando, già al primo contatto con i fili, la vigile attenzione del ragno, il quale immediatamente accorre e fulmineamente lo investe, in una o più riprese, con un abbondante getto liquido di sostanza estremamente vischiosa, i cui caratteri fisici e possibilmente chimici saranno studiati ed esposti in ulteriore pubblicazione. La preda, colpita da siffatto liquido, diventa istantaneamente immobile o quasi. Un acridio, anche abbastanza grosso, così trattato dal ragno, non ha mai il tempo di spezzare i fili, tra cui è incappato, perchè le sue forti zampe, specialmente le saltatrici, appiccicandosi al corpo, non sono più capaci di movimento.

Rendendo nota in queste pagine la facoltà, scoperta in *L. 13-guttatus*, dobbiamo richiamare anzitutto le partizioni, fatte in principio del presente scritto, riguardo al modo con cui i Ragni catturano la preda. Riuscirà evidente subito che il modo usato da *Latrodectus* non può includersi in alcuno dei casi, avanti prospettati, partecipando insieme di quello, che sopra abbiamo indicato con la lettera *b* e di quello, che è stato segnato con la *c*. Da ciò deriva che ogni rappresentante di questa specie si comporta nello stesso tempo come errante e come sedentario.

Non si vuole ora indagare e discutere le ragioni, per cui *L. 13-guttatus*, abitatore di una robusta ed estesa tela, non si avvalga, per la cattura degli animali, soltanto di essa; ma dobbiamo piuttosto riprendere in esame critico il convincimento, suggeritoci già dai precedenti reperti, fatti in *Scytodes* e in *Loxosceles*, secondo cui <sup>8)</sup> la facoltà di spruzzare<sup>2</sup> sarebbe da assumersi come prerogativa del tutto eccezionale delle specie, appartenenti a tali generi, e connessa con particolari morfologici, etologici, ecologici dei Ragni, capaci di produrre lo schizzo.

Ma, allo scopo di procedere a questo riesame, sarà bene preventivamente investigare le proprietà della sostanza agglutinante, emessa da *L. 13-guttatus*, e soprattutto la sua precisa derivazione, nonchè il meccanismo del lancio.

Quanto a quest'ultimo punto, però, possiamo fin d'ora precisare che la sostanza agglutinante non viene emessa da organi dell'apparato boccale, ma dalla estremità posteriore dell'addome, probabilmente dalle filiere, cioè

<sup>8)</sup> B. MONTEROSSO, op. cit., 1947.

che costituisce una differenza di non lieve momento con il luogo d'origine del getto agglutinante, che sono capaci di dare *Scytodes* e *Loxosceles*.

Concludendo, possiamo pertanto aggiungere allo schema, sopra esposto, sui modi di cattura, usati dai Ragni, la seguente proposizione:

*f)* la preda, appena tocca i fili della rete, viene ricoperta più o meno largamente di sostanza fortemente vischiosa, lanciata dall'estremo posteriore dell'addome, la quale impedisce all'animale impigliatosi, tutti i movimenti o parte di essi e non di rado lo attacca più saldamente alla rete, dando in ogni caso al ragno la possibilità di ucciderlo e quindi di avvolgerlo con i fili ordinari, emessi dagli appositi organi.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Sedute dell'8 novembre e del 13 dicembre 1947.*

*Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO*

## NOTE DI SOCI

**Matematica (Geometria).** — *Un nuovo metodo per lo scioglimento delle singolarità*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> del Corrisp. B. SEGRE.

1. In questa Nota vien dimostrato il seguente teorema.

Data in un  $S_r$  ( $r \geq 2$ ) una curva algebrica  $\mathcal{C}$  priva di parti multiple, definita sopra un qualunque corpo commutativo  $K$  di caratteristica arbitraria, si considerino: a) la curva  $\mathcal{C}'$  di  $S_r$ , ove  $r' = r + 3$ , trasformata di  $\mathcal{C}$  nella corrispondenza fra  $S_r$  e la  $V_r$  (di ordine 2) rappresentativa delle quadriche di  $S_r$ ; e b) la curva  $\mathcal{C}_1$  i cui punti rappresentano le tangenti di  $\mathcal{C}'$  sulla grassmanniana delle rette di  $S_r$ . Il procedimento descritto in a), b), si applica manifestamente nell'ambito di  $K$ , e stabilisce una corrispondenza birazionale fra  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_1$ ; la curva dedotta da  $\mathcal{C}$  coll'iterarlo un numero finito sufficientemente elevato di volte, risulta priva di punti multipli.

Il nuovo metodo che così si ottiene per lo scioglimento delle singolarità, anche a prescindere dalla semplicità della dimostrazione qui esposta nei nn. 2-4, presenta vari vantaggi sui metodi usuali. Anzitutto esso offre direttamente la possibilità di uno studio *intrinseco* delle singolarità delle curve dal punto di vista proiettivo, in quanto le curve  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{C}_1$ , dianzi definite, sono manifestamente covarianti proiettivi di  $\mathcal{C}$ .

In secondo luogo, applicando il procedimento a), b) suddetto un numero conveniente di volte alle singole curve, supposte prive di parti multiple, di una qualunque assegnata famiglia algebrica irriducibile, possiamo dedurne una famiglia di curve, trasformate birazionali delle date, la generica delle quali è a punti tutti semplici. Da questo punto di vista tale procedimento può venir accostato ad una notevole trasformazione ottenuta ed approfondita

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1947.

dita da Halphen nello studio delle evolute non euclidee delle curve piane<sup>(1)</sup>; la trasformazione di Halphen fu poi infatti utilizzata da Albanese per la riduzione delle singolarità di un sistema algebrico di curve piane algebriche<sup>(2)</sup>. Essa tuttavia non ha carattere proiettivo intrinseco, e si applica soltanto a curve piane.

Il metodo suesposto si estende poi subito dalle curve alle  $V_h$  ( $h \geq 2$ ), col valersi degli  $S_h$  tangenti in luogo delle rette tangenti, e fornisce così un nuovo strumento per lo studio, e fors'anche per lo scioglimento, delle *singolarità delle superficie e varietà superiori*; così, ad esempio, si vede subito che, per eliminare da queste le così dette singolarità ordinarie, basta applicare il procedimento *a)*, *b)* una sola volta. Il metodo può anche venire adoperato altrimenti, ma con fini analoghi, per esempio nel modo seguente. Si consideri su di una data superficie un fascio (razionale od irrazionale) di curve algebriche, e lo si trasformi - come indicato nel precedente capoverso - in una famiglia di curve generalmente prive di punti multipli; la superficie luogo di queste curve corrisponde birazionalmente alla data, e potrà avere singolarità di tipo più semplice se il fascio iniziale è stato scelto convenientemente.

Aggiungasi da ultimo che, applicando una volta il procedimento *a)*, *b)* alle curve di una famiglia  $\infty^1$ , di indice  $v$  e genere  $p$ , giacenti sopra una superficie  $F$ , si deduce una superficie  $F_1$  riferita alla  $F$  in una corrispondenza  $(v, 1)$  e contenente un fascio di genere  $p$ . Si prenda quindi genericamente su  $F_1$  una famiglia  $\infty^1$  di genere  $p_1$ , e la si trasformi in modo analogo, ecc. Si perviene così a delle *superficie contenenti un qualunque numero di fasci, di generi arbitrari, di curve algebriche*.

2. Allo scopo di stabilire il teorema enunciato nel n. 1, si osservi anzitutto che, in forza del n. 1, *a)*, fra  $S_r$  e  $V_r$  intercede una corrispondenza birazionale senza eccezioni, la quale trasforma  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{C}'$ ; i punti multipli di  $\mathcal{C}'$  sono dunque precisamente i trasformati dei punti multipli di  $\mathcal{C}$ , i quali d'altro canto, per ipotesi, sono in numero finito ed appartengono quindi ad un'estensione algebrica di  $K$ . In base ad una ben nota generalizzazione del teorema di Puiseux<sup>(3)</sup>, un qualunque punto  $O$  (semplice o multiplo) di  $\mathcal{C}$  è

(1) Cfr. G.-H. HALPHEN, *Sur une série de courbes analogues aux développées*. « Journ. de Math. », 2 (1876), 87, od *Oeuvres*, vol. I (Paris, Gauthier-Villars, 1916), 420-474. Ved. pure P. APPELL-É. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, 1<sup>a</sup> ed. (Paris, Gauthier-Villars, 1895), nn. 126-128 (la trasformazione di Halphen è stata omessa dalla seconda edizione, in due volumi, di questo trattato).

(2) Cfr. G. ALBANESE, *Sulle condizioni perchè una curva algebrica riducibile si possa considerare come limite di una curva algebrica irriducibile*. « Rend. Circ. Mat. Palermo », 52 (1928), 105-150, nn. 25-27.

(3) Per il caso in cui il corpo  $K$  delle costanti abbia caratteristica zero, ved. ad esempio B. L. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische Geometrie* (Berlin, Springer, 1939), § 14, od anche S. LEFSCHETZ, *Algebraic Geometry* (Planographed Lectures), Princeton University 1936-37, capitolo III. Per il caso in cui la caratteristica di  $K$  sia un numero primo arbitrario, cfr. G. ANCOHEA, *Courbes algébriques sur corps fermés de caractéristique quelconque*, « Acta Salmanticensia ». Serie de Ciencias (Salamanca, 1946).



origine di un numero finito ( $\geq 1$ ) di rami di  $\mathcal{C}$ . Uno  $\mathcal{L}$  qualsiasi di questi potrà rappresentarsi con equazioni della forma

$$(1) \quad x = t^\alpha, \quad y = ct^{\alpha+\beta} + \dots, \quad \dots \quad (c \neq 0),$$

nei cui secondi membri i termini omissi sono di grado maggiore di  $\alpha + \beta$  nella  $t$ ; all'uopo basta assumere il punto  $O$  come origine delle coordinate proiettive non omogenee  $(x, y, \dots)$  in  $S_r$ , e prendere la tangente ed il piano osculatore ad  $\mathcal{L}$  in  $O$  come asse  $x$  e come piano  $xy$ . I secondi membri delle (1) risultano serie di potenze nel parametro uniformizzante  $t$  <sup>(4)</sup>, i cui coefficienti appartengono ad un'estensione opportuna di  $K$ , e gli interi  $\alpha$  ( $\geq 1$ ) e  $\beta$  ( $\geq 1$ ) sono rispettivamente l'ordine ed il primo rango di  $\mathcal{L}$ ; il ramo  $\mathcal{L}$  è dunque lineare se, e soltanto se,  $\alpha = 1$ . Se invece  $\alpha > 1$ , non tutti gli esponenti della  $t$  nei termini a coefficiente non nullo di quelle serie sono divisibili per  $\alpha$ , poichè altrimenti  $t^\alpha$ , e non  $t$ , sarebbe un parametro uniformizzante; si denoti allora con  $\gamma$  ( $> \alpha$ ) il più piccolo di quegli esponenti che non sia divisibile per  $\alpha$ : è subito visto che questo carattere  $\gamma$  è un invariante proiettivo di  $\mathcal{L}$ .

Poichè il ramo  $\mathcal{L}'$  di  $\mathcal{C}'$  che corrisponde ad  $\mathcal{L}$  mediante  $\alpha$  può venir rappresentato in coordinate  $(x, y, \dots, u, v, w, \dots)$  aggregando alle (1) le

$$(2) \quad u = x^2 = t^{2\alpha}, \quad v = xy = ct^{2\alpha+\beta} + \dots, \quad w = y^2 = c^2 t^{2\alpha+2\beta} + \dots, \quad \dots,$$

così si vede che  $\mathcal{L}'$  ha l'ordine  $\alpha$ , ed il primo rango uguale al minore dei numeri  $\alpha, \beta$ ; inoltre, se  $\alpha > 1$ ,  $\mathcal{L}$  ed  $\mathcal{L}'$  hanno lo stesso carattere  $\gamma$ .

Aggiungasi che  $\mathcal{C}'$  non ammette bitangenti nè componenti rettilinee. Invero nessuna retta di  $S_r$  giace su  $V_r$  o tocca  $V_r$  in due punti distinti, in quanto le quadriche di  $S_r$  passanti per due punti distinti non hanno alcun punto ulteriore in comune, a distanza finita od infinitesima da questi, come già risulta considerando le quadriche spezzate in due iperpiani.

3. In virtù dei nn. 1, 2, fra le curve  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{C}_r$  intercede una corrispondenza birazionale nella quale ogni punto di  $\mathcal{C}_r$  proviene da uno ed un sol punto di  $\mathcal{C}'$ ; inoltre, un qualunque ramo  $\mathcal{L}'$  di  $\mathcal{C}'$  può per semplicità venir rappresentato ancora colle (1), ove però ora è  $\beta \leq \alpha$  e, se  $\beta = \alpha$ , lo sviluppo di  $y$  può, in base alla prima equazione (2), suporsi consistere soltanto del suo primo termine. Le equazioni del ramo  $\mathcal{L}_r$  trasformato di  $\mathcal{L}'$  possono allora scriversi nella forma:

$$X = y'/x' = c(1 + \beta/\alpha)t^\beta + \dots, \quad Y = (xv' - x'y)/x' = c(\beta/\alpha)t^{\beta+\alpha} + \dots, \quad \dots,$$

dove lo sviluppo di  $X$  si riduce al solo primo termine se  $\beta = \alpha$ , ed inoltre, se  $\alpha > 1$ , il più piccolo esponente di  $t$  non divisibile per  $\alpha$  vale  $\gamma_r = (\gamma - 1) - (\alpha - 1) = \gamma - \alpha < \gamma$ . Dunque in ogni caso  $\mathcal{L}_r$  ha l'ordine  $\beta$ , non superiore all'ordine  $\alpha$  del ramo  $\mathcal{L}$  corrispondente di  $\mathcal{C}$ ; qualora poi risulti  $\beta = \alpha > 1$ , il carattere  $\gamma_r$  di  $\mathcal{L}_r$  è inferiore al carattere  $\gamma$  di  $\mathcal{L}$ .

(4) Questo attributo significa più precisamente che dev'essere impossibile di esprimere le coordinate omogenee del punto del ramo come serie di potenze di un nuovo parametro  $\tau$ , che sia esso stesso una serie di potenze di  $t$  della forma  $\tau = kt^\gamma + \dots$  con  $k \neq 0, \gamma \geq 2$ .

Poichè quel carattere supera sempre l'ordine del ramo a cui è relativo (n. 2), così l'ultima eventualità può presentarsi soltanto un numero finito di volte quando si iterino a piacere le trasformazioni  $a$ ,  $b$  del n. 1. Con ciò dunque di finirà coll'abbassare l'ordine di ogni ramo superlineare, mutando sempre rami lineari in rami lineari, finchè si otterrà una curva  $\bar{C}$  dotata soltanto di rami lineari.

4. Se la curva  $\bar{C}$  suddetta ha ancora dei punti multipli, gli è perchè essa contiene qualche coppia di rami (lineari) coll'origine in comune. Questi rami possono ivi (i) ammettere *tangenti distinte*, oppure (ii) avere un *contatto d'ordine*  $k (\geq 1)$  finito.

Applicando a due dati rami siffatti le trasformazioni  $a$  e  $b$  del n. 1, si ottengono manifestamente nel caso (i) due rami lineari *non aventi punti a comune*. Nel caso (ii) i due rami assegnati sono rappresentabili con equazioni della forma (I), in cui  $\alpha = 1$ , le equazioni dell'un ramo coincidendo con quelle dell'altro fino ai termini di grado  $k$ , ma non fino ai termini di grado  $k + 1$ ; in virtù dei nn. 2, 3 si vede allora che i rami trasformati posseggono la stessa origine; ov'essi hanno *tangenti distinte* od ammettono un *contatto d'ordine*  $k - 1$  secondochè  $k = 1$  o  $k > 1$ .

Il teorema del n. 1 segue ormai in modo ovvio.

**Matematica.** — *Gli automorfismi del corpo complesso, ed un problema di Corrado Segre*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> del Corrisp. B. SEGRE.

1. In questa Nota, come nel primo volume delle mie *Lezioni di geometria moderna* (attualmente in corso di stampa presso l'Editore Zanichelli), uso la parola *collineazione* per denotare una corrispondenza biunivoca fra i punti di due spazi lineari di dimensione  $\geq 2$  che conservi gli allineamenti, e denomino *omografia* una collineazione in cui due qualunque quaterne omologhe di punti allineati abbiano lo stesso birapporto. Allora il così detto *teorema fondamentale della geometria proiettiva*<sup>(1)</sup> può enunciarsi dicendo che ogni collineazione fra due spazi reali è un'omografia. Questo teorema non si estende certamente tal quale al campo complesso, poichè fra due spazi complessi intercedono quelle collineazioni non omografiche, che qui chiamo *antiomografie*, introdotte da C. Segre col nome di *anticollineazioni*<sup>(2)</sup>, e di cui il coniugio costituisce l'esempio più semplice.

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1947.

(1) Stabilito dallo STAUDT nella sua *Geometrie der Lage*; la dimostrazione di questo A. contiene però una lacuna, rilevata dal Klein e colmata poi da G. DARBOUX, *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*. «Math. Ann.», 17 (1880), 55-61.

(2) C. SEGRE, *Un nuovo campo di ricerche geometriche* (Saggio in 4 Note). «Atti Acc. Sc. Torino», 25 (1889-90), 276-301, 430-457, 592-612 e 26 (1890-91), 35-71. — C. SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*. «Math. Ann.», 40 (1892), 413-467.

Lo stesso C. Segre, poggiando sul risultato di Darboux citato in <sup>(1)</sup>, ha mostrato che le *omografie* e le *antiomografie* sono le sole collineazioni fra spazi complessi che *siano continue* oppure che *mutino birapporti reali in birapporti reali*, ed ha posto il problema di *determinare se esistano collineazioni ulteriori, che pertanto non soddisfino nè all'una nè all'altra di queste condizioni* <sup>(3)</sup>. A tale problema, il Lebesgue dedicò un interessante lavoro <sup>(4)</sup>, che però — secondo un giudizio espresso da E. Cartan <sup>(5)</sup>, e come meglio preciseremo in seguito — non esaurisce la questione. Questa è stata recentemente ripresa dal Turri, il quale, in cinque Note <sup>(6)</sup> in diversi punti manchevoli (ove il lavoro di Lebesgue non trovasi neppure menzionato), ha creduto poterle dare risposta negativa. Che invece possa esserci una risposta affermativa, è lasciato vagamente intendere nell'ultimo libro di Coolidge <sup>(7)</sup>; ivi infatti l'A., relativamente all'eventualità che omografie ed antiomografie siano le sole collineazioni fra spazi complessi, si limita a dire: « I have been told that such is not the case, but have seen no proof ».

Non parrà quindi inopportuno ritornare sul problema di C. Segre, che notoriamente equivale alla *determinazione di tutti gli automorfismi del corpo complesso*, ossia di tutte le trasformazioni biunivoche  $z \rightarrow \varphi(z)$  sulla variabile complessa  $z = x + iy$  (con  $x, y$  reali) soddisfacenti alle due relazioni funzionali:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \\ (2) \quad & \varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2). \end{aligned}$$

Il Lebesgue <sup>(4)</sup> ha mostrato a questo riguardo che, ove si assuma il punto di vista ristretto che dal Du Bois-Reymond fu denominato empirista,

(3) Cfr. il n. 1 della 1<sup>a</sup> Nota cit. in (2), e la questione 322 nell'« Interméd. des Math. », 1 (1894), 182.

(4) H. LEBESGUE, *Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans, qu'on peut définir par des procédés analytiques* (extrait d'une lettre à M. C. Segre). « Atti Acc. Sc. Torino », 42 (1906-07), 532-539. È da notare che in nessuno dei lavori successivi, che si occupano di quel problema, è detto ch'esso è stato posto da C. Segre.

(5) Cfr. E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Paris, Gauthier-Villars, 1931), p. 7, dove, sebbene si citi quel lavoro, si afferma che « dans le cas complexe, le problème n'est pas résolu ».

(6) T. TURRI, *La non necessità della ipotesi della continuità delle trasformazioni conservanti i gruppi armonici*. « Rendic. Semin. Fac. Sc. Univ. Cagliari », 13 (1943), 5-10. — T. TURRI, *Sulla non necessità della ipotesi della continuità delle trasformazioni conservanti i gruppi armonici*. « Rendic. Semin. Fac. Sc. Univ. Cagliari », 14 (1944, fasc. 3-4 edito nel 1946), 53-54. — T. TURRI, *La continuità delle trasformazioni conservanti i gruppi armonici sulla retta proiettiva complessa e la continuità degli automorfismi del gruppo delle omografie in un  $S_n$  complesso*. « Rendic. Semin. Fac. Sc. Univ. Cagliari », 15 (1945, edito nel 1946-47), 1-13. — T. TURRI, *La continuità delle trasformazioni conservanti i gruppi armonici*, ibid., 90-97. — T. TURRI, *Semplificazione di dimostrazioni nella Nota: « La continuità delle trasformazioni conservanti i gruppi armonici »*, ibid., 216-222.

(7) J. L. COOLIDGE, *A history of the conic sections and quadric surfaces* (Oxford, The Clarendon Press, 1945), p. 63.

(8) Cfr. loc. cit. in (3) e (4). Nel n. 133 delle mie *Lezioni* citate, la connessione fra collineazioni ed automorfismi si troverà estesa a spazi sopra corpi commutativi qualsiasi.

non esistono altri automorfismi all'infuori di quelli espressi dalla  $\varphi(x + iy) = x + iy$  e dalla  $\varphi(x + iy) = x - iy$ , i quali rispettivamente conducono alle omografie ed alle antiomografie. Si possono però avere altri automorfismi (conducenti a collineazioni di altro tipo) se ci si pone dal punto di vista idealista, e precisamente ove si ammetta - come noi faremo - il postulato di Zermelo sulla ben ordinabilità del continuo. La dimostrazione che di tale fatto viene data in Lebesgue è insufficiente <sup>(9)</sup>; ma noi qui giungiamo agevolmente alla meta, poggiando sui profondi risultati ottenuti dallo Steinitz nella teoria dei corpi commutativi <sup>(10)</sup>. Precisamente, nei nn. 4, 5 stabiliamo il risultato nella forma più completa qui appresso enunciata, in relazione a cui svolgiamo poi nei nn. 6, 7 alcune considerazioni complementari:

*La totalità degli automorfismi del corpo complesso è infinita, ed è pure tale quella degli automorfismi involutori (ossia aventi per quadrato l'identità). A ciascuna di dette totalità compete lo stesso numero cardinale transfinito dell'insieme di tutte le funzioni.*

2. Allo scopo di non dovere più tardi interrompere l'esposizione, premettiamo alcune semplici osservazioni di teoria degli insiemi, che facilmente potrebbero venire estese a casi più generali. Denotiamo rispettivamente con  $\aleph$ ,  $\mathfrak{c}$  ed  $\mathfrak{f}$  i numeri cardinali transfiniti del numerabile, del continuo e della totalità delle funzioni (continue e discontinue, di uno o più argomenti reali o complessi), e rammentiamo che

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} \quad (11).$$

È chiaro che i numeri cardinali  $\aleph$ ,  $\mathfrak{c}$  spettanti alle totalità delle trasformazioni del continuo in sè che rispettivamente sono biunivoche od involutorie, soddisfanno alle

$$\aleph \leq \mathfrak{c} \leq \mathfrak{f}.$$

Se  $\mathcal{C}$  è un qualunque insieme avente la potenza  $\mathfrak{c}$  del continuo, talchè la totalità dei suoi sottoinsiemi ha la potenza  $2^{\mathfrak{c}}$ , ad ogni trasformazione biunivoca di  $\mathcal{C}$  in sè possiamo associare univocamente un sottoinsieme di  $\mathcal{C}$ , formato dagli elementi di  $\mathcal{C}$  che sono uniti per la trasformazione medesima. Poichè, viceversa, ogni sottoinsieme di  $\mathcal{C}$  - che non consti di tutti gli

(9) Infatti il Lebesgue determina in (4) una funzione  $\varphi(z)$  soddisfacente alle (1), (2), senza tuttavia preoccuparsi della sua invertibilità. Inoltre, per la legittimità di quella definizione di  $\varphi(z)$ , dovrebbe venire accertato che l'equazione (6) ivi considerata sussiste per ogni scelta di  $\varphi(z_0)$  soddisfacente alla (4), mentre colà invece viene soltanto stabilita la compatibilità delle (4), (6).

(10) Cfr. E. STEINITZ, *Algebraische Theorie der Körper*. « Journ. f. reine u. ang. Math. », 137 (1910), 167-308. Questa Memoria fondamentale è stata riprodotta in un volume a sè (Berlin, de Gruyter, 1930), con note ed un'appendice di R. BAER e H. HASSE.

(11) Cfr. ad esempio A. FRAENKEL, *Einführung in die Mengenlehre*, 3<sup>a</sup> ed. (Berlin, Springer, 1928), § 8, n. 5.



elementi di  $\mathcal{C}$  meno uno — proviene manifestamente in tal guisa da qualche trasformazione biunivoca di  $\mathcal{C}$ , così si ha  $b \geq 2^c - c = f - c = f$ , epperanto

$$b = f.$$

Decomponiamo ora  $\mathcal{C}$  nella somma di due insiemi disgiunti  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ , ciascuno dei quali abbia la potenza del continuo; e rileviamo che, in virtù di ciò che precede,  $b = f$  è la potenza dell'insieme formato dalle corrispondenze biunivoche fra  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ . La somma di una qualunque corrispondenza siffatta e della sua inversa definisce una trasformazione involutoria di  $\mathcal{C}$  in sè, scambiante  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ ; reciprocamente, ciascuna di tali trasformazioni involutorie proviene nel modo indicato da una ed una sola corrispondenza biunivoca fra  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ . Si ha dunque  $i \geq b = f$ , e quindi.

$$i = f.$$

3. Consideriamo il corpo  $C$  degli ordinari numeri complessi  $z = x + iy$ , e denotiamo con  $\alpha$  il numero cardinale spettante alla totalità degli automorfismi di  $C$ ; poichè ognuno di questi automorfismi non è che una trasformazione biunivoca di  $C$  in sè soddisfacente alle (1), (2), così, in virtù del n. 2, avremo

$$\alpha \leq b = f.$$

Possiamo subito stabilire l'esistenza di infiniti automorfismi, ed anzi provare che è  $\alpha \geq c$ , nel modo seguente. Rammentiamo che  $C$  è isomorfo al corpo  $F$  formato da tutte le funzioni algebriche  $f(z)^{(12)}$ , e notiamo che questo ammette un gruppo continuo di automorfismi

$$f(z) \rightarrow f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

dove  $a, b, c, d$  sono numeri complessi arbitrari soddisfacenti alla  $ad - bc \neq 0$ . Quanto asserito risulta subito da ciò che, mediante l'isomorfismo fra  $C$  ed  $F$ , ogni automorfismo di  $F$  si muta ovviamente in un automorfismo di  $C$  e viceversa.

4. Mostreremo ora che è  $\alpha \geq f$ , onde, in base al n. 3, seguirà l'uguaglianza  $\alpha = f$ , provante una parte del teorema enunciato alla fine del n. 1. All'uopo ci varremo del fatto che  $C$  è isomorfo al corpo  $K$  così definito <sup>(13)</sup>. Si parta dal corpo  $K_0$  dei numeri razionali, e da esso si deduca un corpo  $K_c$  mediante un'estensione trascendente pura avente il *grado assoluto di trascendenza*  $c$ , ossia si assuma

$$K_c = K_0(\mathcal{C}),$$

(12) Cfr. E. STEINITZ, op. cit. in (10), primo capoverso del § 24.

(13) Ved. E. STEINITZ, op. cit. in (10), § 23.

dove  $\mathcal{C}$  denota un insieme avente la potenza del continuo e che sia algebricamente irriducibile rispetto a  $K_0$ ; allora

$$K = \bar{K}_c$$

non è che la *chiusura algebrica* di  $K_c$ : in altri termini,  $K$  viene definito da  $K_c$ , a meno di un isomorfismo, quale il minimo corpo algebricamente chiuso contenente  $K_c$  <sup>(14)</sup>.

Poichè  $K_c = K_0(\mathcal{C})$  è un'estensione trascendente pura di  $K_0$ , ogni trasformazione biunivoca di  $\mathcal{C}$  in sè induce in  $K_c$  un automorfismo, definito univocamente dalla condizione di subordinare in  $\mathcal{C}$  quella trasformazione <sup>(15)</sup>. Tenuto conto del n. 2, vediamo così che la potenza dell'insieme degli automorfismi di  $K_c$  non è inferiore a  $\mathfrak{b} = \mathfrak{f}$ . D'altro canto, ogni automorfismo di  $K_c$  può venir esteso (in uno o più modi) in un automorfismo della chiusura algebrica  $K$  di  $K_c$  <sup>(16)</sup>. Dunque per il numero cardinale della totalità degli automorfismi di  $K$ , che uguaglia quello  $\alpha$  inerente a  $C$ , si ha effettivamente  $\alpha \geq \mathfrak{f}$ .

5. Consideriamo un *qualunque automorfismo*  $\Phi$  del corpo complesso  $C$ , e denotiamo con  $\omega$  il *coniugio*. Allora  $\omega^2 = 1$ ,  $\omega(i) = -i$ , ed inoltre  $\omega(\bar{z}) = z$  se e soltanto se  $z$  è reale; si ha poi  $[\Phi(i)]^2 = \Phi(i^2) = \Phi(-1) = -1$ , talchè  $\Phi(i)$  uguaglia  $+i$  o  $-i$ , e rispettivamente lo stesso è di  $\Phi^{-1}(i)$ .

Associando a  $\Phi$  l'automorfismo  $\varphi$  definito dalla

$$\varphi = \Phi^{-1} \omega \Phi,$$

risulta ovviamente.

$$(3) \quad \varphi^2 = 1, \quad (4) \quad \varphi(i) = -i;$$

dunque  $\varphi$  è un automorfismo non identico ed involutorio. Esaminiamo in quali casi può accadere che  $\varphi$  coincida col coniugio  $\omega$ ; in quest'ipotesi  $\Phi\omega = \omega\Phi$ , onde per ogni  $z$  reale si ha

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi[\omega(z)] = \omega[\Phi(z)]$$

e quindi  $\Phi(\bar{z})$  è reale. In base al risultato di Darboux citato nel n. 1, ciò implica che sia  $\Phi = 1$  oppure  $\Phi = \omega$ ; in ambo questi casi risulta poi effettivamente  $\varphi = \omega$ .

(14) Cfr. E. STEINITZ, op. cit., in <sup>(10)</sup>, § 21, n. 9.

Rileviamo che, nell'isomorfismo fra  $K$  e  $C$ , all'insieme  $\mathcal{C}$  di  $K$  corrisponde un sottoinsieme  $C^*$  di  $C$  godente delle seguenti proprietà: *a*)  $C^*$  ha la potenza del continuo; *b*) i numeri di  $C^*$  sono fra loro algebricamente indipendenti; *c*) il corpo  $C$  dei numeri complessi è la chiusura algebrica di  $K_0(C^*)$ . La determinazione dell'insieme  $C^*$ , così come la dimostrazione dei risultati dello Steinitz qui usati, involge l'uso del postulato di Zermelo; ed è probabile che non sia possibile ottenere un insieme  $C^*$  di numeri complessi soddisfacenti alle *a*), *b*), *c*), senza ricorrere a questo postulato. È notevole che un insieme di numeri complessi soddisfacente alle *a*) e *b*) soltanto, possa invece ottenersi senza impiegare il postulato di Zermelo; cfr. J. v. NEUMANN, *Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen*. «Math. Ann.», 99 (1928), 134-141.

(15) Ved. E. STEINITZ, op. cit. in <sup>(10)</sup>, § 22, n. 5.

(16) Ved. E. STEINITZ, op. cit. in <sup>(10)</sup>, § 21, nn. 8 e 9.

Ne consegue che  $\varphi$  resta associato nel modo indicato a due soli automorfismi,  $\Phi$  ed  $\omega\Phi$ . Ed invero, se  $\Psi$  è un qualunque automorfismo di  $C$ , e  $\psi = \Psi^{-1}\omega\Psi$  denota l'automorfismo involutorio ad esso associato, la  $\varphi = \psi$  equivale alla  $(\Phi\Psi^{-1})^{-1}\omega(\Phi\Psi^{-1}) = \omega$ , ciò che fornisce  $\Phi\Psi^{-1} = 1$  oppure  $\Phi\Psi^{-1} = \omega$ , ossia  $\Psi = \Phi$  o  $\Psi = \omega\Phi$ .

L'insieme degli automorfismi  $\varphi$  suddetti è dunque in corrispondenza (1,2) colla totalità degli automorfismi  $\Phi$  di  $C$ ; poichè questa ha il numero cardinale  $\alpha = f = 2^c$  (nn. 2, 4), così il numero cardinale di quell'insieme è  $2^c : 2 = 2^{c-1} = 2^c = f$ . La totalità degli automorfismi involutori di  $C$  ha quindi un numero cardinale che risulta in pari tempo  $\geq f$  e  $\leq f$ , e quindi uguaglia  $f$ . Il teorema enunciato alla fine del n. 1 è così completamente dimostrato.

6. Si è dianzi provato che esistono *infiniti automorfismi  $\varphi$  del corpo complesso soddisfacenti alle (1)–(4)*; con frase poco precisa, ma espressiva, possiamo inoltre dire (nn. 2, 5) che *questi automorfismi dipendono da una funzione arbitraria*, sebbene, a norma di un risultato di Lebesgue accennato nel n. 1, a prescindere dal coniugio nessuno di essi può esprimersi analiticamente a partire da un'infinità numerabile di costanti, mediante un numero finito od un'infinità numerabile di somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, estrazioni di radici e passaggi al limite. Va rilevato che la (3) implica già senz'altro l'invertibilità univoca della  $\varphi$ , essendo in virtù di essa  $\varphi^{-1} = \varphi$ .

Posto

$$(5) \quad \varphi(x) = \sigma(x) + i\tau(x),$$

ove  $x$  è una variabile reale e le  $\sigma, \tau$  denotano due funzioni ad un sol valore di variabile reale, la conoscenza di queste funzioni per ogni valore reale del loro argomento determina la  $\varphi$  anche per i valori  $z = x + iy$  complessi dell'argomento, avendosi in base alle (1), (2), (4), (5)

$$(6) \quad \varphi(z) = \varphi(x + iy) = \varphi(x) - i\varphi(y) = [\sigma(x) + \tau(y)] + i[\tau(x) - \sigma(y)].$$

Si vede agevolmente che, in forza della (6), le condizioni (1)–(4) si traducono nelle seguenti sei equazioni funzionali per le due suddette funzioni di variabile reale:

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y), & \tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y), \\ \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) - \tau(x)\tau(y), & \tau(xy) = \sigma(x)\tau(y) + \sigma(y)\tau(x), \\ \sigma[\tau(x)] = \tau[\sigma(x)], & \sigma[\sigma(x)] + \tau[\tau(x)] = x; \end{cases}$$

dunque, per ogni scelta di  $\sigma$  e  $\tau$  soddisfacenti alle (7), la (6) definisce un automorfismo del corpo complesso del tipo voluto.

Una soluzione immediata delle (7) è data dalle  $\sigma(x) = x, \tau(x) = 0$ , e conduce – mediante la (6) – al coniugio. Per ogni altra soluzione, in forza del risultato di Darboux richiamato nel n. 1 dev'essere  $\tau(c) \neq 0$  in corri-

spondenza a qualche valore reale (ed irrazionale) di  $c$ , onde la prima delle equazioni nella seconda riga fra le (7) fornisce

$$(8) \quad \tau(x) = a \sigma(x) + b \sigma(cx),$$

avendo posto per abbreviare  $a = \sigma(c) / \tau(c)$ ,  $b = -1 / \tau(c)$ . Le (7), tenuto conto della (8), riduconsi a *cinque relazioni funzionali nella sola  $\sigma$* , che qui non diamo esplicitamente per ragioni di spazio. È curioso che, a norma di quanto precede, la soluzione generale del sistema da esse formato possa ancora venire fatta dipendere da *una funzione arbitraria*; in corrispondenza ad ogni soluzione di tale sistema, le (6), (8) definiscono uno dei suddetti automorfismi involutori  $z \rightarrow \varphi(z)$ .

7. Riferiamoci da ultimo ad uno qualunque di questi automorfismi, che non sia il coniugio. Tenendo conto delle (7) si vede subito che, al variare di  $x$  nel campo reale, la (5) genera un *corpo di numeri complessi*  $\varphi(x)$  (*distinto dal corpo reale*), tale che ogni numero complesso  $z$  può scriversi in uno ed un sol modo nella forma

$$z = \varphi(x) + i \varphi(y).$$

Più precisamente, trasformando i due membri di questa relazione mediante la  $\varphi$ , si ottengono agevolmente per  $x$  ed  $y$  le espressioni reali

$$x = \sigma[\Re(z)] + \tau[\Im(z)] \quad , \quad y = \sigma[\Im(z)] - \tau[\Re(z)],$$

dove  $\Re(z)$  ed  $\Im(z)$  denotano la parte reale ed il coefficiente della  $i$  di  $z$ .

**Matematica (Geometria).** — *Una nuova caratterizzazione della sfera* <sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> del Corrisp. B. SEGRE.

Preso una superficie reale  $S$  dell'ordinario spazio euclideo, sia  $\mathcal{C}$  una qualunque curva chiusa che le appartenga, lungo la quale esistano continue tutte le derivate del punto fino al 3° ordine. Denotando con  $s$ ,  $\kappa$  e  $\tau$  rispettivamente la lunghezza d'arco, la curvatura e la torsione di  $\mathcal{C}$ , e supponendo che in nessun punto di  $\mathcal{C}$  la curvatura si annulli, proveremo che

*Se  $S$  è un piano od una sfera, ed allora soltanto, per ogni curva chiusa  $\mathcal{C}$  di  $S$  risulta*

$$(1) \quad \oint \frac{\tau}{\kappa} ds = 0.$$

La parte diretta di questo teorema è ovvia nel caso che  $S$  sia un piano, essendo allora identicamente  $\tau = 0$ . Se  $S$  è una sfera e la curva  $\mathcal{C}$  non è piana, questa soddisfa all'equazione intrinseca

$$\frac{\tau}{\kappa} + \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \frac{1}{\kappa} \right) = 0$$

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(\*\*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1947.



delle curve gobbe sferiche <sup>(1)</sup>, dalla quale — integrando lungo  $\mathcal{C}$  — segue subito la (1).

Per dimostrare la parte inversa del teorema, rappresentiamo  $S$  nell'intorno di un suo punto  $P$  generico coll'equazione

$$(2) \quad z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + \dots,$$

dove i puntini stanno per termini infinitesimi nelle  $x, y$  d'ordine maggiore di due, il punto  $P$  essendo posto nell'origine delle coordinate cartesiane ortogonali  $(x, y, z)$ . Fissato un numero  $r$  positivo sufficientemente piccolo, consideriamo su  $S$  la curva chiusa  $\mathcal{C}_r$  rappresentata dalla (2) e dalle

$$x = r \left( \cos \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right), \quad y = r \left( \sin \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right)$$

al variare del parametro  $\theta$  fra 0 e  $2\pi$ . Per tale  $\mathcal{C}_r$ , in base a note formule <sup>(2)</sup>, risulta con facile calcolo:

$$\begin{aligned} \oint \frac{\tau}{x} ds &= \oint (x'^2 + y'^2 + z'^2)^2 \left\{ \left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|^2 \right\}^{-\frac{3}{2}} \left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{matrix} \right\| d\theta = \\ &= ar^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta \sin \theta) (3 \cos \theta \sin \theta - 8 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 5 \sin^4 \theta) d\theta - \\ &- br^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta \sin \theta) (3 \cos \theta \sin \theta - 8 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos^4 \theta) d\theta + \dots = \\ &= \pi(a - b)r^2 + \dots, \end{aligned}$$

dove gli apici denotano derivazioni rapporto a  $\theta$  ed i puntini stanno per termini infinitesimi d'ordine maggiore al secondo rispetto ad  $r$ . Affinchè per ogni  $\mathcal{C}_r$  valga la (1) deve dunque risultare  $a = b$ , e cioè il generico punto  $P$  di  $S$  dev'essere planare o circolare, il che implica che la superficie  $S$  sia piana o sferica <sup>(3)</sup>.

Il teorema dianzi stabilito è analogo ad altro dovuto allo Scherrer <sup>(4)</sup>, l'enunciato del quale può ricavarsi dal precedente ponendo ivi la relazione  $\oint \tau ds = 0$  in luogo della (1).

(1) Cfr., ad esempio, L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3<sup>a</sup> ed., vol. I (Bologna, Zanichelli, 1927), p. 41.

(2) Ved., ad esempio, G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2<sup>a</sup> ed. vol. I (Paris, Gauthier-Villars, 1914), pp. 15-16.

(3) Cfr., ad esempio, L. BIANCHI, op. cit., pp. 188-9 e 194.

(4) W. SCHERRER, *Eine Kennzeichnung der Kugel* [« Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich », 85 (1940), Beiblatt. 32, pp. 40-46]. Cfr. altresì H. GEPPERT, *Sopra una carat-*

Va rilevato che non è lecito prescindere dalle condizioni ammesse per  $\mathcal{C}$ . Ad esempio non si potrebbero considerare curve  $\mathcal{C}$  aventi punti angolosi: infatti si vede subito che la (I) non sussiste generalmente per una curva chiusa  $\mathcal{C}$ , tracciata su di una sfera, che includa un arco piano un estremo del quale sia un punto angoloso di  $\mathcal{C}$ <sup>(5)</sup>.

**Matematica** (Geometria). — *Sulla torsione integrale delle curve chiuse sghembe*<sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> del Corrisp. B. SEGRE.

1. «È noto che l'integrale  $\oint \kappa ds$  della curvatura rispetto all'arco, esteso ad una curva chiusa dell'ordinario spazio euclideo, non è mai inferiore a  $2\pi$ , ed è uguale a  $2\pi$  per le sole linee piane convesse. Di questo bel risultato — dovuto al Fenchel<sup>(1)</sup> — diedi tempo addietro una dimostrazione estremamente semplice<sup>(2)</sup> fondata sul seguente lemma (di cui assegnai pure un'estensione):

*Una qualunque linea chiusa di Jordan giacente su di una sfera, che sia rettificabile e di lunghezza  $l$  non superiore a quella di un circolo massimo, e che non consti di due archi (distinti o sovrapposti) di circolo massimo cogli estremi in comune, appartiene sempre per intero a qualche calotta sferica di raggio sferico  $r < l/4$ .*

Qui nel n. 4, poggiando ancora sul medesimo lemma, dimostro che la torsione integrale di una curva chiusa sghemba  $\mathcal{C}$ , ossia l'integrale

$\oint |\tau| ds$  esteso a  $\mathcal{C}$ , ove  $s$  e  $\tau$  denotino l'arco e la torsione di questa curva, è sempre maggiore di una certa costante positiva definita da una sem-

terizzazione della sfera [«Annali di Mat.», (4) 20 (1941), pp. 59-66] ed A. SIGNORINI, *Sopra una caratterizzazione della sfera* [ibid., pp. 211-212].

La dimostrazione della parte inversa del teorema di Scherrer data nel n. 4 del lavoro di Geppert, è analoga (ma meno semplice) di quella esposta nel testo per la parte inversa del nostro teorema. Si può inoltre osservare che la parte diretta di quel teorema equivale all'elegante teorema di Jacobi affermando che l'indicatrice sferica delle normali principali di una qualunque curva chiusa sghemba dimezza la superficie della sfera; ved. C. G. J. JACOBI, *Ueber einige merkwürdige Curventheoreme* [«Schumacher Astron. Nach.», 20 (1842), pp. 115-120 = «Gesammelte Werke», vol. 7 (Berlin, Reimer, 1891), pp. 34-39], ed anche W. FENCHEL, *Ueber einen Jacobischen Satz der Kurventheorie* [«Tôhoku Math. Journ.», 39 (1934), pp. 95-97]; tale risultato di Jacobi è stato recentemente approfondito e precisato da W. SCHERRER, *Ueber das Hauptnormalenbild einer Raumkurve* [«Comment. Math. Helv.», 19 (1946-47), pp. 115-133].

(5) Un'avvertenza analoga è pure necessaria relativamente al teorema di Scherrer, onde la dimostrazione data dal Signorini nella Nota dianzi citata dovrebbe essere completata.

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(\*\*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) W. FENCHEL, *Ueber Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*. «Math. Ann.», 101 (1929), 238-252.

(2) B. SEGRE, *Sui circoli geodetici di una superficie a curvatura totale costante che contengono nell'interno una linea assegnata*. «Boll. Un. Mat. Ital.», 13 (1934), 279-283.

plice proprietà geometrica (n. 2). Questa costante è un invariante metrico di  $\mathcal{C}$ , che chiamo il *torcimento* della curva  $\mathcal{C}$ , la cui grandezza dà una misura globale di quanto questa si discosti dall'esser piana; una valutazione del torcimento per difetto vien fornita da un criterio di agevole applicazione pratica, stabilito nel n. 3 anche per curve aperte. Da ultimo, nel n. 5, mi soffermo un po' su di un esempio istruttivo, relativamente al quale constato che i risultati precedenti non possono venire migliorati.

2. Sia  $P$  un punto descrivente nello spazio una curva  $\mathcal{C}$  (aperta o chiusa, dotata di torsione  $\tau$  continua. Allora  $\mathcal{C}$  risulta orientata e rettificabile, ed ammette in ogni punto  $P$  un piano osculatore variante con continuità al muoversi di  $P$  su  $\mathcal{C}$ . Supporremo che  $\tau$  si annulli in al più un numero discreto di punti, che saranno i punti — detti *vertici* di  $\mathcal{C}$  — dove il piano osculatore risulta stazionario. Fissato nello spazio un punto  $O$ , e definito nel modo usuale il versore  $b$  binormale di  $\mathcal{C}$  in  $P$ , consideriamo il punto

$$Q = O + b.$$

Quando  $P$  si muove su  $\mathcal{C}$ , il punto  $Q$  varia con continuità sulla sfera  $S$  unitaria di centro  $O$ , descrivendo una curva  $\mathcal{D}$  che ha  $|\tau| ds$  per elemento d'arco, ove  $ds$  sia il corrispondente elemento d'arco di  $\mathcal{C}$ . È chiaro che  $\mathcal{D}$  risulta chiusa se tale è  $\mathcal{C}$ .

Notiamo che l'indicatrice sferica  $\mathcal{D}$  delle binormali di  $\mathcal{C}$  non può contenere nessun arco di curva piana, nè, tanto meno, ridursi ad un punto. Invero, se un arco di  $\mathcal{D}$  stesse in un piano, lungo il corrispondente arco di  $\mathcal{C}$  sarebbe  $b \times \dot{b} = 0$ , ove  $\dot{b} \neq 0$  denoti un vettore costante normale a quel piano. Derivando l'ultima relazione rispetto ad  $s$ , ed usando la terza formula di Frenet, ne seguirebbe che tutte le tangenti di quell'arco di  $\mathcal{C}$  sarebbero parallele a  $\dot{b}$ ; pertanto tale arco si ridurrebbe ad un segmento di retta parallelo a  $\dot{b}$ , sicchè lungo di esso sarebbe  $\tau = 0$ , contro il supposto.

Può darsi che la curva  $\mathcal{D}$  venga incontrata da tutti i circoli massimi di  $S$ , od altrimenti su  $S$  esiste qualche circolo massimo privo di punti a comune con  $\mathcal{D}$ . Il primo caso ha luogo se, e soltanto se, ogni piano dello spazio risulta parallelo a qualche binormale di  $\mathcal{C}$ , ossia quando ogni direzione dello spazio è ortogonale a qualche binormale di  $\mathcal{C}$ ; diremo allora che  $\mathcal{C}$  ha il *torcimento*

$$a = 2\pi.$$

Nel secondo caso vi è almeno un emisfero di  $S$  non avente punti interni od al contorno in comune con  $\mathcal{D}$ . Possiamo allora considerare il minimo  $r$  dei raggi sferici delle calotte di  $S$  contenenti  $\mathcal{D}$ , ed assumere

$$a = 4r$$

come *torcimento* di  $\mathcal{C}$ ; è chiaro che attualmente risulta

$$0 < a < 2\pi.$$

3. Diremo per brevità che *una direzione appartiene ad un diedro*, quando questo contiene una semiretta parallela ad essa ed avente l'origine in un punto del suo spigolo. Usando tale locuzione, e conservando le ipotesi e le notazioni del n. 2, proveremo che:

*Se esiste un diedro tale che ogni direzione che gli appartenga sia ortogonale a qualche binormale di  $\mathcal{C}$ , allora risulta*

$$(1) \quad a \geq 2\alpha,$$

dove  $a$  denoti il torcimento di  $\mathcal{C}$  ed  $\alpha$  sia la misura del diedro in radianti.

Ammettiamo per assurdo che non valga la (1), e cioè che sia  $a < 2\alpha$ . Sarà dunque  $a < 2\pi$ , in quanto è  $\alpha < \pi$ , onde (n. 2) la curva  $\mathcal{D}$  appartiene ad una calotta  $\Sigma$  di  $S$  avente raggio sferico  $r = a/4 < \pi/2$ . La calotta sferica supplementare di  $\Sigma$  avrà il diametro sferico

$$d = \pi - 2r = \pi - a/2 > \pi - \alpha;$$

potremo dunque considerare una calotta sferica  $\Sigma_1$  ad essa completamente interna, il cui diametro  $d_1$  soddisfi alle

$$(2) \quad d > d_1 > \pi - \alpha.$$

Ogni punto di  $\Sigma_1$  sta sopra un diametro di  $S$ , tale che il piano diametrale a questo ortogonale non ha punti in comune con  $\Sigma$ , e quindi neppure con  $\mathcal{D}$ . Ne consegue che la direzione di quel diametro non appartiene al diedro considerato nel precedente enunciato, e quindi appartiene al diedro a questo supplementare, di ampiezza  $\pi - \alpha$ . Ciò significa che la calotta  $\Sigma_1$ , di diametro sferico  $d_1$ , è contenuta in uno spicchio sferico determinato da due piani diametrali di  $S$  formanti fra loro l'angolo  $\pi - \alpha$ , il che implica la limitazione  $d_1 \leq \pi - \alpha$ . Questa contraddizione colle (2) prova la (1).

4. Suppongasi più particolarmente che la curva  $\mathcal{C}$  sia chiusa; allora (in virtù del n. 2) pure  $\mathcal{D}$  risulta chiusa, e di lunghezza  $l$  uguale alla torsione integrale di  $\mathcal{C}$ :

$$(3) \quad l = \oint |\tau| ds,$$

dove l'integrale va esteso alla curva  $\mathcal{C}$  percorsa una sola volta nel verso positivo. Dimosteremo che

*La torsione integrale di  $\mathcal{C}$  è sempre maggiore del torcimento  $a$  di  $\mathcal{C}$  ( $0 < a \leq 2\pi$ ), ossia in simboli:*

$$(4) \quad \oint |\tau| ds > a.$$

Combinando le (1), (4), seguirà quindi che, *nelle ipotesi del n. 3, risulta altresì*

$$(5) \quad \oint |\tau| ds > 2\alpha.$$



Ammettiamo per assurdo che non sussista la (4) e cioè, in forza della (3), che sia

$$l \leq a \leq 2\pi.$$

In virtù dei nn. 1, 2, la curva  $\mathfrak{D}$  appartiene conseguentemente per intero a qualche calotta sferica di raggio  $r < l/4$ ; questo raggio soddisfa pertanto alla  $r \leq a/4$ , il che è in disaccordo colla definizione del torcimento  $a$  (n. 2). Questa contraddizione prova la (4).

5. Consideriamo da ultimo il punto P avente le coordinate cartesiane ortogonali

$$x = ct\omega^{-1}, \quad y = (t^2 - 1)\omega^{-1}, \quad z = t^3\omega^{-1},$$

dovè  $c$  sia una costante positiva ed  $\omega$  denoti il polinomio definito positivo

$$(6) \quad \omega = t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 1.$$

Quando  $t$  varia nel campo reale fra  $-\infty$  e  $+\infty$ , il punto P descrive una curva chiusa  $\mathfrak{C}$  orientata e tutta al finito (costituente il ramo reale di una quartica di 2<sup>a</sup> specie). Si vede facilmente che  $\mathfrak{C}$  non possiede nè punti multipli, nè flessi, nè vertici (5).

Mediante un calcolo privo di difficoltà, si ottiene che  $\mathfrak{C}$  ha l'elemento d'arco

$$(7) \quad ds = \omega^{-2} \left\{ c^2 \left( 3t^4 - \frac{3}{2}t^2 - 1 \right)^2 + (2t^5 - 4t^3 + 1)^2 + \left( t^6 + \frac{3}{2}t^4 - 3t^2 \right)^2 \right\}^{1/2} dt,$$

e che nel punto P la binormale di  $\mathfrak{C}$  ha coseni direttori proporzionali ai numeri

$$(8) \quad \lambda = t^6 - 6t^4 - \frac{3}{2}t^2, \quad \mu = -c \left( 3t^5 + \frac{3}{2}t^3 + 3t \right), \quad \nu = c \left( 3t^4 + 6t^2 - \frac{1}{2} \right)$$

(i quali non sono mai simultaneamente nulli), mentre la torsione vale

$$(9) \quad \tau = 3c\omega^2 \frac{t^4 + 6t^2 + \frac{1}{2}}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

ed è dunque sempre positiva.

(3) Quest'ultima proprietà si legge sulla seguente formula (9), ed ha un certo interesse in quanto, per ampie categorie di curve chiuse sghembe, è noto ch'esse debbono avere qualche vertice [cfr. B. SEGRE, *Intorno alle ovali sghembe, e su di un'estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili*. « Mem. Acc. d'Italia », 7 (1936), 365-397, n. 14]. Un'altra classe di curve chiuse che sempre posseggono vertici è data dalle curve sferiche a torsione continua, perchè ciascuna di queste è necessariamente dotata di almeno due vertici. Invero la torsione  $\tau$  di una curva siffatta non può conservarsi sempre positiva nè sempre negativa, e quindi deve annullarsi almeno due volte, in quanto per ogni curva sferica chiusa

di curvatura  $\kappa > 0$  e torsione  $\tau$  continua risulta  $\oint \tau ds = 0$  ed  $\oint \frac{\tau}{\kappa} ds = 0$  [per la seconda

di queste uguaglianze cfr. B. SEGRE, *Una nuova caratterizzazione della sfera*, questo volume dei « Rendiconti », pp. 420-22, dove pure trovansi vari riferimenti bibliografici concernenti la prima uguaglianza].

La retta  $x/l = y/m = z/n$  ha direzione ortogonale alla binormale in P se vale la  $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$ , ossia la

$$lt^6 - 3cmt^5 + (3cn - 6l)t^4 - \frac{3}{2}cmt^3 + \left(6cn - \frac{3}{2}l\right)t^2 - 3cmt - \frac{1}{2}cn = 0.$$

Orbene quest'equazione algebrica di grado pari in  $t$  ha certamente delle radici reali se è  $ln > 0$ , poichè allora i suoi coefficienti estremi risultano di segni opposti. Siccome la  $ln > 0$  non fa che esprimere l'appartenenza della direzione suddetta al diedro  $x > 0, z > 0$  (n. 3), la cui misura in radianti vale

$$(10) \quad \alpha = \pi/2,$$

così in base alle (5)-(10) dovrà essere

$$(11) \quad \oint |\tau| ds = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3c \left( t^4 + 6t^2 + \frac{1}{2} \right) \left\{ c^2 \left( 3t^4 - \frac{3}{2}t^2 - 1 \right)^2 + (2t^5 - t^3 + t)^2 + \left( t^6 + \frac{3}{2}t^4 - 3t^2 \right)^2 \right\}^{1/2}}{\left( t^6 - 6t^4 - \frac{3}{2}t^2 \right)^2 + c^2 \left( 3t^5 + \frac{3}{2}t^3 + 3t \right)^2 + c^2 \left( 3t^4 + 6t^2 - \frac{1}{2} \right)^2} dt$$

per ogni  $c > 0$  (mentre per  $c = 0$  l'integrale definito che figura nella (11) manifestamente si annulla).

Proveremo che  $\pi$  è il limite inferiore dei valori assunti dal primo membro della (11) per  $c$  positivo, mostrando che

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \oint |\tau| ds = \pi.$$

All'uopo basta porre  $t = 3cu$  nell'integrale definito che compare nella (11), e passare al limite per  $c \rightarrow \infty$  dopo aver diviso per  $(3c)^{12}$  numeratore e denominatore della frazione sotto il segno d'integrale. Così infatti si ricava:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \oint |\tau| ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \pi.$$

Il risultato testè stabilito implica che, per le curve  $\mathcal{C}$  che stiamo considerando, la limitazione (5) non può venire migliorata. Avuto riguardo alle (1), (4), (10), si vede inoltre che  $\pi = 2\alpha$  è il limite inferiore del torcimento delle curve  $\mathcal{C}$  suddette (onde neppure il teorema del n. 3 può venir migliorato), e che

Per l'insieme di tutte le curve chiuse di torcimento  $\alpha \geq \pi$ , la torsione integrale  $\oint |\tau| ds$  è sprovvista di minimo ed ammette  $\pi$  come limite inferiore.

**Meccanica** (Fisica—matematica). — *Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità*<sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> del Socio M. PICONE.

Nella pur vasta produzione riguardante l'analisi del sistema di equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine che regge l'equilibrio elastico di un corpo isotropo e omogeneo non mi consta che sia stato osservato il semplice metodo d'integrazione del sistema stesso, all'esposizione del quale è dedicata la presente Nota. Onde evitare questioni di rigore che esulano dallo scopo che mi prefiggo col presente scritto e che richiederebbero una lunga trattazione, supporrò sempre, tacitamente, in ciò che segue, *analitiche* le funzioni, le curve, le superficie che prenderò in considerazione.

1. EQUAZIONI INTERCEDENTI FRA LE FORZE ESTERNE, LE ROTAZIONI E GLI SFORZI TANGENZIALI. — Supposto il corpo limitato, indicherò con  $D$  il dominio dello spazio  $(x, y, z)$  da esso occupato nel suo stato naturale, con  $\bar{D}$  la frontiera di  $D$ , con  $h$  e  $k$  le costanti di Lamè del corpo e, allo scopo di semplificare la scrittura, per le componenti  $X_n, Y_n, Z_n$  della pressione sulla faccetta piana, nel punto  $(x, y, z)$  del corpo, di asse normale  $n$ , porrò

$$X_n = \alpha \cos(x, n) + \nu \cos(y, n) + \mu \cos(z, n),$$

$$Y_n = \nu \cos(x, n) + \beta \cos(y, n) + \lambda \cos(z, n),$$

$$Z_n = \mu \cos(x, n) + \lambda \cos(y, n) + \gamma \cos(z, n),$$

talchè  $\alpha, \beta, \gamma$  denoteranno gli sforzi normali e  $\lambda, \mu, \nu$  quelli tangenziali. Indicherò poi con  $X, Y, Z$  le componenti della forza esterna (riferita all'unità di volume) applicata nel punto  $(x, y, z)$ , con  $u, v, w$  quelle dello spostamento subito da tal punto, con  $p, q, r$  quelle della rotazione nel punto stesso, e, per una qualsivoglia funzione  $f(x, y, z)$ , con le concise notazioni

$$f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, \dots,$$

rispettivamente le derivate parziali

$$\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z, \partial^2 f / \partial x^2, \partial^2 f / \partial x \partial y, \dots$$

Il sistema di equazioni dell'equilibrio elastico, che deve essere soddisfatto nell'interno di  $D$ , si scrive allora

$$(I) \quad \begin{cases} (I') & X + \alpha_x + \nu_y + \mu_z = 0, \dots, \dots, \\ (I'') & \alpha = 2h u_x + k(u_x + v_y + w_z), \dots, \dots, \\ (I''') & \lambda = h(v_z + w_y), \dots, \dots, \end{cases}$$

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1947.

ove, in ciascuna riga, negli spazi occupati dai tre puntini, devono intendersi scritte, ordinatamente, le equazioni che si ottengono da quella scritta nella stessa riga, operando, simultaneamente, sulle lettere  $X, Y, Z; x, y, z; u, v, w; \alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu$ , rispettivamente, le sostituzioni circolari  $(X, Y, Z); (x, y, z); (u, v, w); (\alpha, \beta, \gamma); (\lambda, \mu, \nu)$ . Si ha poi

$$(2) \quad w_y - v_z = 2p, \dots, \dots,$$

e dalle (1), derivando, per esempio, ambo i membri della seconda delle (1') rispetto a  $z$ , ambo i membri della terza rispetto a  $y$ , e sottraendo poscia membro a membro, si trae

$$(3) \quad 2h\Delta p + Z_y - Y_z = 0, \dots, \dots,$$

ove  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ , avendosi identicamente,

$$(4) \quad p_x + q_y + r_z = 0.$$

Dalle (1''') e (2) si ricava

$$(5) \quad \mu_y - \nu_z = 2h p_x, \dots, \dots,$$

$$(6) \quad w_y = \frac{\lambda}{2h} + p, \quad v_z = \frac{\lambda}{2h} - p; \dots, \dots,$$

e dalle (1'')

$$(7) \quad u_x = \frac{2(h+k)\alpha - k(\beta + \gamma)}{2h(2h+3k)}, \dots, \dots,$$

e pertanto

$$(8) \quad du = \frac{2(h+k)\alpha - k(\beta + \gamma)}{2h(2h+3k)} dx + \left(\frac{v}{2h} - r\right) dy + \left(\frac{\mu}{2h} + q\right) dz, \dots, \dots$$

Ne seguono le eguaglianze

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(h+k)\alpha - k(\beta + \gamma)}{2h(2h+3k)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{2h} - r\right), \dots, \dots,$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{2(h+k)\alpha - k(\beta + \gamma)}{2h(2h+3k)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{2h} + q\right), \dots, \dots,$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{2h} - r\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{2h} + q\right), \dots, \dots$$

Le (11) sono verificate in base alle (4) e (5). Le (9) e (10), ove si tenga conto delle (1'), si scrivono

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{2(h+k)\alpha_y - k\gamma_y}{2h(2h+3k)} = -r_x + \frac{2(h+k)}{2h(2h+3k)} v_x - \frac{k}{2h} \frac{Y + \lambda_z}{2h+3k}, \dots, \dots, \\ \frac{2(h+k)\alpha_z - k\beta_z}{2h(2h+3k)} = q_x + \frac{2(h+k)}{2h(2h+3k)} \mu_x - \frac{k}{2h} \frac{Z + \lambda_y}{2h+3k}, \dots, \dots \end{cases}$$

Queste equazioni, associate alle (1'), valgono ad esprimere tutte le derivate parziali del prim'ordine, delle  $\alpha, \beta, \gamma$ , mediante le  $X, Y, Z$  e quelle delle  $p, q, r$  e  $\lambda, \mu, \nu$ . Si trova



$$(13) \quad d\alpha = - \left( X + v_y + \mu_z \right) dx + \left( v_x - \frac{4b(b+k)}{2b+k} r_x + \frac{2bk}{2b+k} p_z - \frac{kY}{2b+k} \right) dy + \\ + \left( \mu_x + \frac{4b(b+k)}{2b+k} q_x - \frac{2bk}{2b+k} p_y - \frac{kZ}{2b+k} \right) dz, \dots, \dots$$

Se ora scriviamo le condizioni necessarie affinchè le forme differenziali lineari ai secondi membri delle (13) siano integrabili, troviamo, tenendo conto delle (3) e (4), che esse si riducono alle tre seguenti

$$(14') \quad \Delta\lambda = \frac{k}{2b+k} Y_z - Z_y - \frac{4b(b+k)}{2b+k} (p_{xz} - r_{xz}), \dots, \dots,$$

che equivalgono, sempre in base alle (3) e (4), alle

$$(14'') \quad \Delta\lambda = \frac{k}{2b+k} Z_y - Y_z + \frac{4b(b+k)}{2b+k} (p_{yy} - q_{xy}), \dots, \dots,$$

e forniscono  $\Delta\lambda, \Delta\mu, \Delta v$ , direttamente, in funzione di  $X, Y, Z$  e  $p, q, r$ .

Supponiamo ora che  $D$  sia tale che ogni poligonale semplice e chiusa tracciata in  $D - \mathfrak{F}D$  possa essere assunta come bordo di una superficie poliedrica contenuta in  $D - \mathfrak{F}D$  e che ivi siano verificate le (3), (4), (5) e (14). Le (13) forniscono allora, essendo soddisfatte le (3) e (4), le  $\alpha, \beta, \gamma$  non appena se ne siano, arbitrariamente, prescritti i valori  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  in un punto  $(x_1, y_1, z_1)$  di  $D - \mathfrak{F}D$  e tali  $\alpha, \beta, \gamma$  verificano le (1'). Esse verificano pure le (12), e quindi, tenendo conto delle (4) e (5), riescono soddisfatte le condizioni d'integrabilità delle forme differenziali lineari ai secondi membri delle (8). Queste (8) daranno, pertanto, le funzioni  $u, v, w$ , non appena si siano ad esse assegnati i valori  $u_0, v_0, w_0$ , in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  di  $D - \mathfrak{F}D$ . Con tali funzioni sono verificate le (2), (6) e (7) e quindi le (1'') e (1''').

Fissata una soluzione  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  delle (13), tutte quelle della stessa si ottengono ponendo  $\alpha = a + \bar{\alpha}$ ,  $\beta = b + \bar{\beta}$ ,  $\gamma = c + \bar{\gamma}$ , con  $a, b, c$  costanti arbitrarie. Dalle (8) si trae che le costanti  $a, b, c$  riescono determinate, anche quando si assegni, con lo spostamento  $(u_0, v_0, w_0)$  del punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , quello di un secondo punto  $(x_1, y_1, z_1)$ , purchè sia  $(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \neq 0$ .

2. LE FORZE ESTERNE SONO CONSERVATIVE. — In tale ipotesi, le (3) si riducono alle  $\Delta p = \Delta q = \Delta r = 0$  e pertanto se prescriviamo alla rotazione di essere costante su  $\mathfrak{F}D$ , sarà tale in tutto  $D$ , ed è dunque verificata la (4), laddove, detta  $F$  la funzione potenziale delle forze, le (5) e (14) si riducono alle

$$\mu_y - v_z = 0 \quad , \quad \Delta\lambda = \frac{-2bF_{\lambda z}}{2b+k}; \dots; \dots$$

Sia la  $F$  definita in un dominio rettangolare contenente  $D$  e decomponibile nella somma  $L(x) + M(y) + N(z)$  di tre funzioni, rispettivamente, della sola  $x$ , della sola  $y$ , della sola  $z$ , si avrà allora  $\Delta\lambda = \Delta\mu = \Delta v = 0$ , e quindi  $\lambda, \mu, v$  costanti in tutto  $D$ , se tali sono su tutta  $\mathfrak{F}D$ , con che risulta  $\lambda_x = \mu_y = v_z = 0$ . Indipendentemente da ogni ipotesi sulla connessione di  $D$ , si ha dunque il teorema:

I. — Se le forze esterne a cui è sottoposto il corpo derivano da un potenziale che può decomporrasi nella somma di tre funzioni  $L(x)$ ,  $M(y)$ ,  $N(z)$ , — in particolare, dunque, se il corpo è solo sottoposto al proprio peso — si possono arbitrariamente prescrivere sulla frontiera del corpo la rotazione costante e gli sforzi tangenziali costanti, in seguito a che le stesse costanti riescono, in tutto il corpo, la rotazione e gli sforzi tangenziali, laddove, per gli sforzi normali si trova

$$\alpha = a - L(x) - \frac{k}{2h+k} [M(y) + N(z)], \dots, \dots,$$

e per le componenti dello spostamento

$$u = u_0 + \frac{2(h+k)a - k(b+c)}{2h(2h+3k)}(x-x_0) + \left(\frac{v}{2h} - r\right)(y-y_0) + \left(\frac{\mu}{2h} + q\right)(z-z_0) - \frac{1}{2h+k} \int_{x_0}^x L(\xi) d\xi, \dots, \dots$$

3. LE COMPONENTI DELLE FORZE ESTERNE SONO POLINOMI NELLE COORDINATE DEI PUNTI D'APPLICAZIONE. — In tal caso, col procedimento seguito per dimostrare il teorema VI delle mie Note dal titolo *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali* [fasc. 4, 5 e 6 di questi Rendiconti, vol. II della serie VIII (1° sem. 1947)], si possono trovare tutte le soluzioni del sistema (1) nelle quali le componenti dello spostamento sono alla loro volta polinomii nelle  $x, y, z$ , ognuna di esse soluzioni risultando determinata col prescriverle, arbitrariamente, per esempio, i polinomii nelle  $y$  e  $z$  ai quali, per  $x=0$ , devono ridursi  $u, v, w, u_x, v_x, w_x$ . Alle soluzioni stesse si può pervenire, quale si sia la connessione di D e senza veruna quadratura, dalle (13) e (8), assegnando, affatto arbitrariamente, dei polinomii  $p, q, r, \lambda, \mu, \nu$ , verificanti le (3), (4), (5) e (14), per ottenere i quali si può procedere al modo seguente. Col metodo sopracitato si fissino dei polinomii  $p^*, q^*, r^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*$  verificanti le (3) e (14), ed allora tutte le soluzioni polinomiali delle stesse si ottengono ponendo

$p = p^* + P$ ,  $q = q^* + Q$ ,  $r = r^* + R$ ,  $\lambda = \lambda^* + L$ ,  $\mu = \mu^* + M$ ,  $\nu = \nu^* + N$ , designando  $P, Q, R, L, M, N$  arbitrari polinomii armonici. Come conseguenza delle (3) si trova

$$\Delta(p_x^* + q_y^* + r_z^* + P_x + Q_y + R_z) = 0,$$

e delle (3) e (14),

$$\Delta(\mu_y^* - \nu_x^* + M_y - N_x - 2hp_x) = 0, \dots, \dots$$

Saranno verificate le (4) e (5) se fissati, per esempio, i polinomii armonici  $Q, R, N$ , si determinano i rimanenti  $P, L, M$  in modo che si abbia

$$(4') \quad P_x = -p_x^* - q_y^* - r_z^* - Q_y - R_z,$$

$$(6') \quad M_y = \nu_x^* - \mu_y^* + N_x + 2hp_x,$$

$$(6'') \quad L_x = \nu_x^* - \lambda_x^* + N_x - 2hq_y.$$

Ora a ciò si perviene applicando un'elegante formola che vale la pena di notare. Si abbia, per esempio,

$$-p_x^* - q_y^* - r_z^* - Q_y - R_z = \sum_{s=0}^n f_s(x, y, z),$$

con  $f_s$  polinomio armonico omogeneo di grado  $s$ , si verifica la (4') ponendo

$$P = \sum_{s=0}^n g_{s+1}(x, y, z),$$

con  $g_{s+1}$  polinomio armonico omogeneo di grado  $s+1$ , tale che sia

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{s+1} = f_s.$$

Ora si ha (1)

$$f_s = \sum_{k=0}^s \rho^{s-k} X_s^{(k)} \left( \frac{x}{\rho} \right) \left[ a_k^{(s)} \frac{(y + iz)^k + (y - iz)^k}{2} + b_k^{(s)} \frac{(y + iz)^k - (y - iz)^k}{2i} \right],$$

essendo  $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  e designando,  $X_s(x)$  il polinomio di Legendre di grado  $s$ ,  $a_0^{(s)}, a_1^{(s)}, b_1^{(s)}, \dots, a_s^{(s)}, b_s^{(s)}$  costanti. Ebbene, secondo la formola sopracitata, si può porre, semplicemente,

$$g_{s+1} = \sum_{k=0}^s \frac{\rho^{s+1-k}}{s+1-k} X_{s+1}^{(k)} \left( \frac{x}{\rho} \right) \left[ a_k^{(s)} \frac{(y + iz)^k + (y - iz)^k}{2} + b_k^{(s)} \frac{(y + iz)^k - (y - iz)^k}{2i} \right].$$

Essa si dimostra valendosi della seguente identità

$$(s+1-k)xX_{s+1}^{(k)} - (s+1+k)X_s^{(k)} = (x^2-1)X_{s+1}^{(k+1)}.$$

4. INTEGRAZIONE DEL SISTEMA DELL'ELASTICITÀ, NEL CASO DI UN DOMINIO TRINORMALE. — Un dominio  $D$  è detto *normale* rispetto all'asse  $z$ , di base  $D_{xy}$  e relativo alle due funzioni  $\chi'(x, y)$  e  $\chi''(x, y)$ , se, essendo  $D_{xy}$  un dominio del piano  $(x, y)$ ,  $\chi'(x, y)$  e  $\chi''(x, y)$  due funzioni definite in  $D_{xy}$ , tali che si abbia  $\chi'(x, y) < \chi''(x, y)$ , quando il punto  $(x, y)$  è interno a  $D_{xy}$ , il dominio  $D$  è il luogo dei punti dello spazio, verificanti le condizioni:

$$\text{il punto } (x, y) \text{ è in } D_{xy} \quad , \quad \chi'(x, y) \leq z \leq \chi''(x, y).$$

Sia  $\chi(x, y)$  una funzione definita in  $D_{xy}$ , per la quale si abbia

$$(15) \quad \chi'(x, y) < \chi(x, y) < \chi''(x, y), \quad \text{quando il punto } (x, y) \text{ è interno a } D_{xy},$$

indicata con  $\mathfrak{F}D_{xy}$  la frontiera di  $D_{xy}$  nel piano  $(x, y)$ , la curva, dello spazio, luogo dei punti verificanti le condizioni:

$$\text{il punto } (x, y) \text{ è su } \mathfrak{F}D_{xy} \quad , \quad z = \chi(x, y),$$

sarà detta una *cintura del dominio  $D$  rispetto all'asse  $z$* . Tali cinture sono infinite, fa eccezione soltanto il caso che risulti  $\chi' \equiv \chi''$  su  $\mathfrak{F}D_{xy}$ , in cui

(1) Cfr., per esempio, i miei *Appunti d'Analisi superiore*, Cap. IV, n. 10 del § 2, [2ª edizione, vol. I, Rondinella, Napoli (1946)].

ve n'è una sola, consistente nel comune bordo delle due superficie  $\tilde{z} = \chi'(x, y)$  e  $z = \chi''(x, y)$ .

Il dominio  $D$  sarà detto *trinormale* se è tale rispetto a ciascuno dei piani coordinati. Supposto tale, con le basi  $D_{y\tilde{z}}, D_{\tilde{z}x}, D_{xy}$ , nei piani  $(y, \tilde{z})$ ,  $(\tilde{z}, x)$ ,  $(x, y)$  e relativo, rispettivamente, alle coppie di funzioni  $\varphi'(y, \tilde{z})$  e  $\varphi''(y, \tilde{z})$ ,  $\psi'(\tilde{z}, x)$  e  $\psi''(\tilde{z}, x)$ ,  $\chi'(x, y)$  e  $\chi''(x, y)$ , sussistendo per le funzioni  $\varphi(y, \tilde{z})$ ,  $\psi(\tilde{z}, x)$ ,  $\chi(x, y)$ , le (15) e quelle che da esse si deducono con le sostituzioni circolari  $(x, y, z)$  e  $(\varphi, \psi, \chi)$ , vogliamo procedere alla determinazione e al calcolo di una soluzione  $(p, q, r, \lambda, \mu, \nu)$  del sistema costituito dalle equazioni (3), (4), (5) e (14). Dalle (3) si ricava

$$(16) \quad 2h\Delta p_x + Z_{y\tilde{z}} - Y_{\tilde{z}x} = 0, \dots, \dots,$$

e pertanto, prescritti, arbitrariamente, i valori  $P^*$  e  $Q^*$ , su  $\mathfrak{F}D$ , rispettivamente a  $p_x$  e a  $q_y$ , dette  $P$  e  $Q$  le funzioni caratterizzate dalle equazioni

$$2h\Delta P + Z_{y\tilde{z}} - Y_{\tilde{z}x} = 0, \text{ in } D - \mathfrak{F}D \quad ; \quad P = P^* \text{ su } \mathfrak{F}D,$$

$$2h\Delta Q + X_{\tilde{z}y} - Z_{xy} = 0, \text{ in } D - \mathfrak{F}D \quad ; \quad Q = Q^* \text{ su } \mathfrak{F}D,$$

posto  $R = -P - Q$ , dovrà porsi, in  $D$ ,

$$(17) \quad p = e(y, \tilde{z}) + \int_{\varphi(y, \tilde{z})}^x P(\xi, y, \tilde{z}) d\xi, \quad q = f(\tilde{z}, x) + \int_{\psi(\tilde{z}, x)}^y Q(x, \eta, \tilde{z}) d\eta, \\ r = g(x, y) + \int_{\chi(x, y)}^{\tilde{z}} R(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Con ciò si soddisfano le (4) e (16), comunque si assumano le funzioni  $e, f, g$ . Dico che è possibile scegliere queste funzioni in guisa da verificare le (3). Si ricava, invero, per esempio, dalla terza delle (17),

$$2h\Delta r = 2h\Delta g + G(x, y) + 2hR_{\tilde{z}} + 2h \int_{\chi(x, y)}^{\tilde{z}} (R_{xx} + R_{yy}) d\zeta,$$

ove  $G(x, y)$  è una nota funzione di  $x$  e  $y$ . Ma  $2h(R_{xx} + R_{yy}) = X_{y\tilde{z}} - Y_{\tilde{z}x} - 2hR_{\tilde{z}\tilde{z}}$ , e quindi

$$2h\Delta r = 2h\Delta g + G(x, y) + X_y - Y_x - [X_y - Y_x - 2hR_{\tilde{z}}]_{\tilde{z}=\chi(x, y)},$$

e pertanto sarà soddisfatta la terza delle (3) se si assume  $g$  in modo che riesca, in  $D_{xy} - \mathfrak{F}D_{xy}$ ,

$$2h\Delta g + G(x, y) - [X_y - Y_x - 2hR_{\tilde{z}}]_{\tilde{z}=\chi(x, y)} = 0,$$

ciò che si può fare, prescrivendone, inoltre, arbitrariamente i valori su  $\mathfrak{F}D_{xy}$ , in seguito a che essa riesce determinata. Fissata una soluzione  $(p, q, r)$ , delle (3) e (4), passiamo alla determinazione e al calcolo di una soluzione  $(\lambda, \mu, \nu)$  del sistema costituito dalle (5) e (14). La prima delle (14') possiede una soluzione  $\lambda$  che riesce determinata, assegnandole, arbitrariamente, i valori



su  $\mathcal{F}D$ . Saranno poi verificate le (5) e le rimanenti delle (14') se, con queste, lo sono le due seguenti

$$v_z = \lambda_x + 2h q_y, \quad \mu_y = \lambda_x - 2h r_z,$$

se, cioè, si pone

$$(18) \quad v = g(x, y) + \int_{\chi(x, y)}^{\bar{\chi}} (\lambda_x + 2h q_y) d\zeta, \quad \mu = f(\zeta, x) + \int_{\psi(\zeta, x)}^{\bar{\psi}} (\lambda_x - 2h r_z) d\eta.$$

Ma si ha, per esempio, dalla prima delle (18), designando  $G$  un'assegnata funzione di  $x$  e  $y$ ,

$$\Delta v = \Delta g + G + \lambda_{xz} + 2h q_{yz} + \int_{\chi(x, y)}^{\bar{\chi}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{xx} + \lambda_{yy}) + 2h \frac{\partial}{\partial y} (q_{rx} + q_{zy}) \right] d\zeta,$$

dove, valendosi delle equazioni a cui soddisfa  $\lambda$ ,

$$\Delta v = \Delta g + G' + \frac{k}{2h+k} Y_x - X_y + \frac{4h(b+k)}{2h+k} (r_{xx} - p_{xz}),$$

ove  $G'$  indica una funzione di  $x$  e  $y$ , del pari assegnata. Sarà pertanto verificata la terza delle (14'') se si assume  $g$  in modo che riesca  $\Delta g + G' = 0$ , ciò che si può fare prescrivendo arbitrariamente i valori di  $g$  su  $\mathcal{F}D_{xy}$ . Si ha dunque il teorema finale:

II. — *Se il corpo elastico considerato, occupa, nel suo stato naturale, un dominio trinormale rispetto ad una determinata terna di assi ortogonali  $(x, y, z)$ , la sua deformazione, dovuta ad un qualsivoglia sistema di forze esterne, risulta determinata quando si assegni, arbitrariamente: a) in due suoi punti interni  $(x_0, y_0, z_0)$   $(x_1, y_1, z_1)$  lo spostamento e gli sforzi normali, oppure, se  $(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \neq 0$ , gli spostamenti in entrambi; b) sulla  $\mathcal{F}D$  le derivate  $p_x$  e  $q_y$  (oppure  $q_y$  e  $r_z$ , oppure  $r_z$  e  $p_x$ ) delle componenti  $p$  e  $q$  (oppure  $q$  e  $r$ , oppure  $r$  e  $p$ ) della rotazione e lo sforzo tangenziale  $\lambda$  (oppure  $\mu$ , oppure  $\nu$ ); c) su tre cinture di  $D$  rispetto agli assi  $x, y, z$ , arbitrariamente fissate, rispettivamente le componenti  $p, q, r$  della rotazione; d) su due cinture di  $D$ , rispetto agli assi  $y, z$  (oppure  $z$  e  $x$ , oppure  $x$  e  $y$ ), del pari arbitrariamente fissate, rispettivamente gli sforzi tangenziali  $\mu$  e  $\nu$  (oppure  $\nu$  e  $\lambda$ , oppure  $\lambda$  e  $\mu$ ). Gli elementi della deformazione si calcolano risolvendo tre problemi di Dirichlet nello spazio e cinque nel piano.*

In base a questo teorema possiamo ritenere nota la deformazione di un corpo elastico, comunque sollecitato, con i considerati elementi di essa, assegnati sul contorno del corpo e in due punti interni, quando il dominio  $D$ , essendo trinormale rispetto ad una determinata terna di assi coordinati, è inoltre tale che per esso e per le sue proiezioni sui piani coordinati, si possiedano formole risolutive dei relativi problemi di Dirichlet, suscettibili di pratico calcolo numerico. Questo è il caso della sfera, dell'ellissoide, del parallelepipedo, del cilindro circolare retto, a base circolare o ellittica, ecc. Le formole definitive che forniscono le componenti della rotazione per il

parallelepipedo sono molto semplici e vale la pena di scriverle<sup>(2)</sup>. Osserviamo, a tale scopo, che, supposto il parallelepipedo a lati paralleli agli assi coordinati, luogo dei punti per cui  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$ , ai dati al contorno per le  $p, q, r$ , contemplati nel teorema II, possono sostituirsi i valori di  $p, q, r$ , sulle facce di  $D$ , parallele, rispettivamente, agli assi  $x, y, z$ . Su quelle perpendicolari agli assi  $x, y, z$ , si conoscono allora, in base alla (4), rispettivamente, i valori di  $p_x, q_y, r_z$ . Designata con  $A(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$  la funzione di Green per il dominio  $D$ , competente all'operatore di Laplace e alle condizioni al contorno che assegnano i valori della soluzione sulle facce parallele all'asse  $x$  e quelli della derivata rispetto alla  $x$  sulle facce perpendicolari, si ha

$$(19) \quad p = - \int_0^a \int_0^b [A_z(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) p(\xi, \eta, \zeta)]_{\zeta=0}^{\zeta=c} d\xi d\eta - \\ \int_0^a \int_0^c [A_\eta(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) p(\xi, \eta, \zeta)]_{\eta=0}^{\eta=b} d\xi d\zeta + \\ \int_0^b \int_0^c [A(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) p_x(\xi, \eta, \zeta)]_{\xi=0}^{\xi=a} d\eta d\zeta + \\ \frac{1}{2b} \int_0^a \int_0^b \int_0^c A(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \{Z_y(\xi, \eta, \zeta) - Y_z(\xi, \eta, \zeta)\} d\xi d\eta d\zeta, \dots, \dots,$$

ove

$$(20) \quad A(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \\ \frac{8}{abc} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} x_i \frac{\sin \frac{j\pi y}{b} \sin \frac{l\pi z}{c} \cos \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi \eta}{b} \sin \frac{l\pi \zeta}{c} \cos \frac{i\pi \xi}{a}}{\pi^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \right)} = \\ \frac{4}{bc} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sin \frac{j\pi y}{b} \sin \frac{l\pi z}{c} \sin \frac{j\pi \eta}{b} \sin \frac{l\pi \zeta}{c} \begin{cases} \frac{\cosh x_{jl} \zeta \cosh x_{jl} (a - z)}{\sinh x_{jl} a}, & \text{per } \zeta \leq z, \\ \frac{\cosh x_{jl} z \cosh x_{jl} (a - \zeta)}{\sinh x_{jl} a}, & \text{per } \zeta \geq z, \end{cases} \\ \dots, \dots,$$

(2) Cfr. M. PICONE, *Alcuni teoremi di convergenza nella sommazione per rettangoli delle serie multiple e applicazioni al problema di Dirichlet*. [Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia (1936)]. In tale lavoro trovasi dimostrata la convergenza di serie multiple competenti alla funzione di Green per il problema di Dirichlet relativo a domini rettangolari di uno spazio a qualsivoglia numero di dimensioni e trovansi anche trasformazioni di dette serie in serie di ordine minore, assai rapidamente convergenti, utili al pratico calcolo numerico. Il metodo seguito in tale lavoro si modifica facilmente per l'ottenimento delle formule (19) e (20) del testo e si applica senz'altro allo studio della convergenza delle serie (20).

ove  $x_i \begin{cases} = 1/2, & \text{per } i = 0 \\ = 1, & \text{per } i > 0 \end{cases}$ ,  $x_{i1} = \pi \sqrt{j^2/b^2 + l^2/c^2}, \dots, \dots$ . Nel calcolo numerico

conviene sommare i primi termini delle serie che si ottengono dalle (19), sostituendovi  $A, A_0, A_n$  coi loro sviluppi in serie forniti dalle (20) e integrando, poi, termine a termine.

Osserviamo, infine, il teorema che subito si dimostra:

III. — *Se, nelle ipotesi del teorema precedente, le forze esterne derivano da un potenziale che può scomporsi nella somma di tre funzioni  $L(y, z)$ ,  $M(x, z)$ ,  $N(x, y)$ , dipendenti soltanto, rispettivamente, dalle coppie di variabili  $y, z$ ;  $x, z$ ;  $x, y$  — in particolare se il corpo è solo sottoposto al proprio peso — la sua deformazione risulta determinata e si calcola risolvendo sei problemi di Dirichlet nel piano, quando si prescriba che su  $\mathcal{F}D$  riesca  $p_x \equiv q_y \equiv r_z \equiv \lambda_x \equiv \mu_y \equiv \nu_z \equiv 0$  e arbitrariamente si assegni: a) in due punti  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$ , interni a  $D$ , lo spostamento e gli sforzi normali, oppure, se  $(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \neq 0$  gli spostamenti in entrambi; b) su tre cinture di  $D$ , rispetto agli assi  $x, y, z$ , arbitrariamente fissate, rispettivamente, le funzioni  $p$  e  $\lambda$ ,  $q$  e  $\mu$ ,  $\nu$  e  $r$ .*

**Fisica.** — *Teoria speciale della relatività e teoria balistica della luce.* Nota (\*) del Socio Q. MAJORANA.

La teoria speciale della relatività di Einstein nacque al fine di interpretare il risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley, pur tenendo conto degli altri fatti ottici precedentemente conosciuti. Fra questi, va ricordato particolarmente il cosiddetto *trascinamento della luce* per parte dei mezzi materiali trasparenti in moto, previsto, in conformità delle sue teorie, da Fresnel, dimostrato sperimentalmente da Fizeau e, più tardi, precisato da Michelson e da Lorentz e Zeeman.

Credo che, implicitamente, tanto Einstein, quanto tutti i fautori della sua teoria (che costituiscono oggi la stragrande maggioranza dei fisici teorici e sperimentali) sieno convinti che non vi sia altro modo di interpretare il detto *trascinamento* (che così si chiama perchè, apparentemente, solo una parte della velocità del mezzo materiale è conferita da questo alla luce che lo traversa, in aggiunta a quella sua propria), all'infuori di ricorrere, oltre che al *primo postulato* di Einstein (sulla indipendenza, cioè, dei fenomeni ottici dal moto uniforme relativo del sistema rigido di generazione ed osservazione, e ciò costituisce realmente la necessaria conseguenza della esperienza di Michelson e Morley) anche al *secondo postulato*, che fissa, in modo immutabile, il valore della velocità della luce nel vuoto,  $c$ , per qualsiasi osservatore in quiete od in moto uniforme rispetto alla sorgente.

È ben noto, come questo secondo postulato abbia dato luogo, in origine, ai più aspri contrasti. Oggi, mentre gran parte degli autorevoli oppositori

(\*) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1947.

della teoria speciale della relatività sono scomparsi, lo si accetta, si può dire, senza discussione alcuna, quale necessaria conseguenza di quanto si osserva, benchè esso voglia modificare in modo radicale i nostri criteri di interpretazione dei fatti esteriori; criteri che discendono dalla nostra più comune intuizione e dalla meccanica classica. Tali criteri ci dovrebbero portare in ogni caso ad ammettere che i fatti della natura si debbano appoggiare alle nozioni di spazio e di tempo, quali la nostra mente, in modo preciso, sa comprendere, partendo dalle sensazioni del nostro organismo. I fatti stessi, salvo circostanze speciali, se mai valutabili, ci dovrebbero sempre apparire indipendenti dalla nostra presenza, ed essere del tutto oggettivi. Per contro, si sa come il secondo postulato contraddica questo principio, che è fondamentale nello studio da noi perseguibile del mondo esteriore. Ma, d'altra parte, in vista della apparente rispondenza che la teoria di Einstein trova, sia nella dimostrazione dell'invarianza dei fenomeni elettromagnetici o delle loro equazioni, dal moto del luogo in cui essi si svolgono; sia in taluni fatti riguardanti la fisica corpuscolare; nessun conto si tiene più delle contraddizioni suaccennate. Si ritiene che esse sieno oggi del tutto superate, ascrivendole forse a difetto del nostro strumento mentale. I relativisti arrivano persino ad asserire che tale strumento è stato perfezionato dalla accettazione delle teorie di Einstein. I più cauti si accontentano di pensare che a noi debba bastare la verifica data apparentemente dai fatti, della giustezza della teoria relativista, senza cercare di approfondire i principii su cui essa si basa.

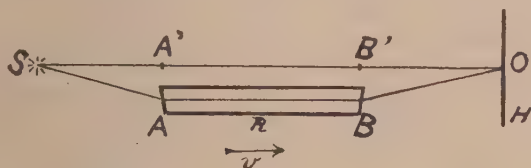
L'erroneità di un simile criterio ha qualche punto di contatto con quella dei fisici dell'800 che credevano, quasi, di poter presto *toccare con mano* l'etere cosmico, per quanto, all'esistenza dell'etere cosmico, nessuna obiezione di carattere logico si opponesse. E si deve dire che un'altra incomprensione domina oggi l'ottica dei corpi in moto. Essa si riferisce alla negata possibilità di ammissione della *teoria balistica della luce*, ideata da Ritz e sostenuta tanto vivacemente da La Rosa. Senza addentrarmi per ora in tale questione, mi basti rilevare che la principale opposizione alla detta teoria deriva dai fenomeni delle stelle variabili. In tale esame, non si tien conto però del fatto per cui le radiazioni luminose, emesse da sorgenti mobili (radiazioni costituite, secondo le moderne teorie, da *corpuscoli* o *quantì energetici*, detti *fotoni*), prima di giungere a noi sulla Terra, sieno rimaste in reciproca presenza o quasi quiete, per enormi lassi di tempo, valutabili a decine, centinaia di anni, od ancora più; e si ammette tuttavia che ciascun fotone o corpuscolo abbia rigorosamente conservato la sua velocità iniziale (costante per l'etere secondo la teoria classica; costante per osservatori diversi, secondo la relatività; diversa da caso a caso, secondo la teoria balistica). Ora, si domanda se sia lecito, ammetterè con audace extrapolazione, che i singoli corpuscoli in sì grande vicinanza tra loro e dopo sì lungo tempo, non si sieno reciprocamente influenzati. Potrebbe darsi infatti, che in tali condizioni, fotoni di diversa energia si aggruppino, in modo per noi imprecisabile, per formare degli enti complessi, moventisi con uguale velocità; tali enti se mai, in seguito



penetrando nella materia potrebbero dar luogo a fenomeni di rifrazione, diffrazione, ecc., scindendosi di nuovo nei quanti elementari.

E mentre non si hanno sicuri elementi per precisare un'ipotesi del genere, non si può approvare chi, con assoluta sicurezza, reputa inammissibile la teoria balistica della luce. Al lume delle ora formulate osservazioni, gran parte delle critiche fatte a quella teoria, andrebbero attentamente riesaminate. Credo che così le più gravi obiezioni mosse alla brillante (se pur giudicata in un primo tempo inammissibile) teoria di La Rosa, verrebbero a cadere. Ma su ciò, tornerò a suo tempo.

Intanto, nell'interesse del progresso delle nostre conoscenze, ritengo opportuno tener presente la teoria balistica della luce, nel cercar di interpretare i fenomeni ottici. Essa ha il vantaggio di rispettare i classici criteri spaziali e temporali; e per tal motivo desidero confrontarla con quella relativistica di Einstein. In particolare, nella presente Nota, farò vedere come la



teoria balistica sia in ottimo accordo pratico con il fenomeno del trascinamento ottico Fresnel-Fizeau. Da ciò, si potrà ricavare ulteriore motivo per la sua definitiva accettazione, in sostituzione della artificiosa, e, secondo il mio convincimento, falsa, teoria relativistica.

La considerazione di un semplice dispositivo interferenziale, che anni or sono fu da me ideato e sperimentato<sup>(1)</sup>, permette di eseguire e discutere, questa volta *a priori* (cioè senza eseguire esperienza alcuna) un'indagine di tal genere. Richiamo schematicamente in che cosa consista tal dispositivo. Una sorgente di luce monocromatica S (v. figura), di frequenza  $\nu$  e di lunghezza d'onda, nel vuoto,  $\lambda$ , invia due raggi o fascetti SA'B'O ed SABO, in un punto O, dove è l'occhio dell'osservatore, oppure uno schermo H, od ancora una pellicola fotografica. Il primo di tali raggi è rettilineo, e traversa l'aria ambiente. Il secondo è spezzato, giacchè traversa un prisma di vetro R, oppure a liquido rifrangente, AB, di lunghezza AB = L, ed indice di rifrazione  $n$ . Le due piccole facce piane A, B, formano un angolo rifrangente dell'ordine di qualche primo d'arco, i due raggi, o sottili fasci luminosi, generano in O delle frangie interferenziali, perpendicolari al piano della figura. Chiamai a suo tempo il dispositivo *monoprismo* (quantunque per semplicità potrò dire anche, il *prisma* R), per distinguerlo dal *biprisma* di Fresnel. Esso, a differenza di questo, dà luogo a frangie di alto ordine interferenziale, in causa

(1) V. questi « Rendiconti », vol. XIX, p. 754 (1934); cfr. pure « Nuovo Cimento », stesso anno, e « Revue d'Optiques », t. 13, p. 393 (1934).

della diversità fra i cammini dei due raggi. È facile vedere che essendo dapprima le parti S, R ed O, in reciproca quiete, tale ordine è dato da:

$$(1) \quad M = \frac{L}{\lambda}(n-1).$$

Non intervenendo nessuna condizione di moto, questo valore è ammesso da qualunque teoria, classica-eterea, relativistica speciale di Einstein, balistica.

Si può ora cercare di usare tale dispositivo per ricavare motivi di scelta di una di tali teorie. Ma, per quanto la cosa sia possibile, non mi fermo ad esaminare come esso possa prestarsi a ripetere una esperienza analoga (nella sua finalità) a quella di Michelson e Morley, tendente cioè a controllare o meno la esistenza dell'etere cosmico. Ritengo infatti, che la questione sia ormai superata, in causa dell'esito negativo di tale esperienza. I fenomeni ottici, dunque, in un qualsiasi sistema di riferimento, si svolgono indipendentemente dalle sue condizioni di quiete o di moto uniforme, rispetto ad un qualunque altro sistema. Per cui, *l'etere non esiste*. Non rimane perciò che ad esaminare col monoprisma a quali risultati si pervenga, usando la teoria relativistica o quella balistica.

Per procedere in tale indagine, supponiamo che il prisma R venga dotato di una certa velocità  $v$ , rispetto alla sorgente. L'osservatore O e lo schermo H (o pellicola fotografica) possono indifferentemente considerarsi in quiete con la sorgente S o in moto insieme col prisma. Chiarirò ciò in seguito. Si tratta di prevedere quale spostamento deve subire una determinata frangia sullo schermo H, in conseguenza di quella velocità  $v$ , del prisma R. Basta, all'uopo rendersi conto di quante lunghezze d'onda entrano in AB, e di quante nel corrispondente tratto esterno A'B' (nell'aria, o meglio nel vuoto). Tale tratto, sempre uguale ad AB, si muove idealmente con questo. La differenza fra queste due valutazioni,  $M'$ , sarà in generale differente dal valore M, dato dalla (1); sicchè uno spostamento di frangie,  $k$ , sarà osservato, per il passaggio di R dalla quiete al moto, o viceversa.

Per una previsione del genere, serviamoci prima della teoria relativistica. Per semplicità, supponiamo che realmente lo schermo, H, e l'osservatore, O, sieno solidali con R, che, come si è detto è in moto con la velocità  $v$ . Il relativista è d'avviso che nel tratto A'B', esterno al prisma, la luce viaggia con la velocità  $c$ ; nell'interno del prisma la velocità è per lui ridotta a  $c/n$ . Inoltre, è un fatto comune a tutte le teorie, la riduzione della frequenza, per l'osservatore in moto (fuori o dentro il prisma), ed in conseguenza dell'effetto Doppler, (salvo in certi casi, termini di second'ordine) da  $v$  a:

$$(2) \quad v' = v \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{c}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Le lunghezze d'onda che egli così valuta in A'B' ed AB sono perciò:

$$\lambda' = \frac{c}{v'} = \frac{\lambda}{1 - \frac{v}{c}} \quad ; \quad \lambda'' = \frac{c}{nv'} = \frac{\lambda}{n \left(1 - \frac{v}{c}\right)}.$$

Nei due tratti A'B' ed AB, entrambi uguali ad L, entrano dei numeri d'onde dati da:

$$N' = \frac{L}{\lambda'} = \frac{L}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad ; \quad N'' = \frac{L}{\lambda''} = \frac{nL}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

L'ordine di interferenza, che il relativista giudica corrispondere ad una frangia in H, è dato da:

$$M' = N'' - N' = \frac{L}{\lambda} \left[ n - 1 - (n-1) \frac{v}{c} \right].$$

Per cui, egli, per il passaggio del prisma dalla quiete al moto, prevede uno spostamento di frangie dato da:

$$(3) \quad k_r = M - M' = \frac{L}{\lambda} (n-1) \frac{v}{c}.$$

Vediamo ora la previsione che si può fare, servendoci della teoria balistica. È superfluo osservare che, scartata l'ipotesi eterea, se non ci si vuol servire della teoria della relatività di Einstein, si cade inevitabilmente in quella balistica. Il *balistico*, a differenza del *relativista*, applica in pieno la cinematica classica. Egli, muovendosi il prisma R, alla velocità  $v$ , ed egli essendo solidale col prisma stesso, vede allontanarsi la sorgente, con tale velocità. Per cui ritiene che la velocità della luce, nel tratto A'B' (aria, o meglio vuoto) sia  $c-v$ . Per quel che riguarda la velocità della luce nell'interno del prisma R, egli sa che deve avvenire il trascinamento Fresnel-Fizeau; e che un osservatore fermo rispetto alla sorgente, giudica (confortato dalle esperienze di Fizeau, Michelson, Zeeman), che la velocità della luce, nell'interno del prisma, sia:

$$(4) \quad c' = \frac{c}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2} v^{(2)}.$$

Ma poichè il balistico sa di muoversi con la velocità  $v$ , concluderà, per la cinematica classica, che la luce, nel prisma, si muove con la velocità:

$$c'' = c' - v = \frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}.$$

Per il balistico, come per il relativista, si manifesta nella stessa misura l'effetto Doppler, dato dalla (2). Per cui, le lunghezze d'onda che il balistico valuta in A'B ed AB, sono:

$$\lambda''' = \frac{c-v}{\frac{c}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \lambda \quad ; \quad \lambda'' = \frac{\frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}}{\frac{c}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \frac{\lambda}{n} \left[ 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{v}{c} \right].$$

(2) Si prescinde dalla correzione di LORENTZ, che corrisponde ad aggiungere un termine in  $dn/d\lambda$ , diverso da zero se il mezzo è dotato di potere dispersivo. Vedi: P. ZEEMAN, Arch. Néer. des Sciences Exac. et Nat., t. X, p. 132 (1927).

Di questi valori, il secondo è scritto a meno di termini superiori a  $v/c$ . In conseguenza, nei tratti A'B' ed AB, entrano dei numeri di onde, dati da:

$$N''' = \frac{L}{\lambda} \quad ; \quad N^{IV} = \frac{L}{\lambda^{IV}} = \frac{L}{\lambda} \left[ n - (n-1) \frac{v}{c} \right].$$

L'ordine di interferenza, giudicato dal balistico è perciò:

$$M'' = N^{IV} - N''' = \frac{L}{\lambda} \left[ n - 1 - (n-1) \frac{v}{c} \right].$$

E, finalmente, egli prevede così, per il passaggio del prisma dalla quiete al moto, uno spostamento di frangie dato da:

$$(5) \quad k_b = M - M'' = \frac{L}{\lambda} (n-1) \frac{v}{c} = k_r,$$

e cioè la sua previsione coincide con quella del relativista.

È facile inoltre vedere, che se non si trascura il termine superiore a  $v/c$ , il balistico trova:

$$(6) \quad k_b = \frac{L}{\lambda} \left[ (n-1) \frac{v}{c} + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \frac{v^2}{c^2} \right].$$

Cioè la conclusione data dalla (5) è vera dentro l'approssimazione dei termini in  $v/c$ .

Si potrebbe pensare di trar partito dalla rilevata piccola differenza tra i valori espressi da (3) e (6), per realizzare una pratica esperienza al fine di controllare la giustezza delle fatte considerazioni, e decidere così circa la scelta fra teoria relativistica e quella balistica. All'uopo, si può anzitutto rilevare che non vi ha alcun bisogno che l'osservatore si muova con R. Egli può restare fisso con la sorgente di luce ed esaminare le frangie su H, mentre R viene ad esser dotato della velocità  $v$ . Ciò potrebbe venir ottenuto mediante oscillazioni rapide, da imprimere ad R. Con opportuno artificio, si lascerebbe cadere la luce su H, soltanto in determinati istanti, delle corse del prisma in un senso. Il dispositivo sarebbe analogo a quello di Zeeman, di cui ho già citato il lavoro. L'osservazione delle frangie potrebbe esser fatta fotograficamente; in tal caso, sarebbe più conveniente sistemare la pellicola fotografica rigidamente con R. Comunque, si rileva che se H (insieme con la pellicola) rimane immobile, mentre R si muove, lo spostamento di questo prisma durante un'illuminazione, può essere reso piccolo a piacere. Durante questo tempo, non può avvenire alcuno spostamento di frangie, e la fotografia rileverà soltanto quello dovuto al moto del prisma, se esso c'è. Inoltre, è da scartare il dubbio per cui, trattandosi di un'esperienza relativistica, nel caso dell'osservatore fermo in O, la lunghezza  $L$  debba venir considerata alquanto ridotta, perchè occorre moltiplicarla per  $\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Se così si volesse fare, ciò non dovrebbe alterare le conclusioni relativistiche (che io non so



seguir bene). Infatti, nella formula (3) si dovrebbe effettuare quella moltiplicazione, tanto per  $L$ , che per  $\lambda$ : il valore di  $k_r$  rimarrebbe così inalterato. Si osserva ora che si potrebbe esser spinti ad eseguire un'indagine sperimentale del genere qui intravisto, anche seguendo il criterio di Michelson e Morley, da loro adottato nella celebre esperienza. In essa, come è noto, si cercava di sorprendere una variazione data da un termine in  $v^2/c^2$ . Ma comunque, l'analogia non è completa. Infatti, nell'esperienza dei fisici americani, il  $v$  era costituito dalla velocità della Terra intorno al Sole (30 km/sec.); mentre il valore della velocità che potrebbe difficilmente darsi al prisma R, non supererebbe i 100 m/sec., cioè non arriverebbe che al 1/300 dell'altro. Una esperienza da progettarsi su tali basi, dovrebbe perciò permettere di svelare uno spostamento di frangie (dipendente dal quadrato di  $v/c$ ) circa 100.000 volte più piccolo di quello di Michelson e Morley. Ciò è assolutamente impossibile.

Per confermare la inutilità di una esperienza del genere, si può osservare ancora che le relazioni, trovate per il caso dell'osservazione balistica, si basano sull'ammissione della formula di Fresnel-Fizeau data dalla (4). Ora, come già aveva rilevato Laue, questa ammissione è valevole anche per la relatività speciale; ma ciò è vero soltanto con l'approssimazione in  $v/c$ . Per cui, se coincidenza vi ha, in prima approssimazione tra le conclusioni del relativista e del balistico, implicitamente ciò si deve alla ammissione ora detta, non del tutto precisa. Da tutto ciò si deduce che non vale la pena di preoccuparsi dei termini in  $v^2/c^2$ , e concludere che *la relatività e la teoria balistica sono praticamente equivalenti nell'interpretare i fenomeni ottici*. Per tale ragione è evidente che vi sia vantaggio a servirsi della teoria balistica in tale studio, rispettando essa in pieno la meccanica classica.

Rimosse, come già ho accennato, e come meglio chiarirò in seguito, le obiezioni, nel campo dell'astronomia, fatte alla teoria balistica, deve essere agevole e lieto servirsi con ogni successo di tale teoria, in tutti i casi in cui si è creduto rilevare una verifica della teoria speciale della relatività, compresi quelli della fisica corpuscolare.

Infine, si può spendere qualche parola, per spiegare l'equivoco della relatività einsteiniana. Riferiamoci al caso trattato del monoprismo, con l'osservatore trascinato da R. Il relativista dice che le due velocità della luce, esterna ed interna al prisma, sono  $c$  e  $\frac{c}{n}$ . Il balistico invece afferma che esse sono  $c - v$  e  $\frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}$ . Vale a dire che il balistico ha sottratto le quantità

$v$  e  $\frac{v}{n^2}$ , rispettivamente, ai valori del relativista. Algebricamente, come si è visto, ciò porta alla coincidenza dei risultati finali, circa lo spostamento di frangie (a meno di termini in  $v^2/c^2$  ed oltre). Ma nessuna ragione basantesi sulla cinematica classica, autorizza la scelta dei valori relativistici.

Per contro, Einstein li ha ammessi, perchè con ciò ha ritrovato le formule di trasformazione di Lorentz, che questi aveva scritto partendo da un

concetto del tutto diverso, quale quello della contrazione della materia movendosi attraverso l'etere. Dal punto di vista logico, ciò non poteva bastare.

Infine, per quanto si sia rilevata la equivalenza pratica della teoria relativistica con quella balistica, va ancora osservato che la prima ammette, rispetto alla seconda, degli aumenti, nella velocità della luce, nel vuoto e nel mezzo rifrangente in moto, secondo i rapporti  $1:v/c$  e  $1:v/nc$ . Su questa semplice ma ingiustificata differenza, si basa tutto il costrutto relativistico.

**Chimica Generale.** — *Sul calcolo dei coefficienti di attività degli elettroliti forti in soluzione concentrata* (\*). Nota di G. B. BONINO e E. MARIANI, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

Nella teoria di Debye e Hückel (1) per le soluzioni di elettroliti forti si calcola il potenziale elettrostatico dovuto agli ioni circostanti rispetto ad un ione considerato  $i$  mediante l'espressione

$$(1) \quad \psi_i = - \frac{e\zeta_i}{D} \frac{\chi_0}{1 + \chi_0 a_i}$$

dove  $\psi_i$  è il detto potenziale,  $e$  la carica dell'elettrone in valore assoluto,  $\zeta_i$  la elettrovalenza dell'ione  $i$ ,  $D$  la costante dielettrica del mezzo,  $1/\chi_0$  il così detto «spessore medio dell'atmosfera ionica»;  $a_i$  il «raggio ionico» caratteristico della teoria di Debye. Queste due grandezze  $1/\chi_0$  e  $a_i$  sono omogenee ambedue con una lunghezza e costituiscono grandezze «caratteristiche» della teoria di Debye-Hückel. Si sa che:

$$(2) \quad \chi_0^2 = \frac{4\pi \sum N_i \zeta_i^2 e^2}{VD_0 kT}$$

dove  $V$  è il volume della soluzione,  $k$  la costante di Boltzmann,  $T$  la temperatura assoluta,  $N_i$  il numero di ioni della specie  $i$  presenti. La soluzione (1) costituisce una approssimazione valida soltanto quando:

$$\frac{e\psi}{kT} \ll 1$$

ed a rigore quindi sarebbe soltanto applicabile per soluzioni diluite (se pur necessariamente «reali»).

Una delle vie seguite per estendere la utilizzazione pratica della (1) anche alle soluzioni concentrate per un calcolo semiempirico dei coefficienti di attività e dei coefficienti osmotici, è stata quella proposta da Hückel e consiste nel sostituire alla costante dielettrica  $D_0$  del solvente nella (1) un

(\*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) «Phys. Zeits.», 24, 185 (1923).

valore  $D$  « efficace » che Hückel senz'altro presenta come la costante dielettrica media della soluzione.

Hückel nel suo lavoro <sup>(2)</sup> pone una relazione semiempirica tra  $D$ ,  $D_0$  e le concentrazioni  $c_i$  degli ioni in soluzione e cioè

$$(3) \quad D = D_0 \left( 1 - \sum \frac{\delta_i c_i}{D_0} \right) = D_0 (1 - \mu)$$

dove  $c_i$  sono le concentrazioni in mol/litro dei singoli ioni e  $\delta_i$  sarebbero delle grandezze individuali caratteristiche per gli ioni stessi.

È facile vedere che queste grandezze  $\delta_i$  hanno le dimensioni di un volume. Hückel mette in relazione questi « volumi caratteristici »  $\delta_i$  con i volumi delle « sfere di saturazione dielettrica » della teoria di Debye-Sack <sup>(3)</sup>. Dunque la grandezza  $\mu$  della (3) corrisponde dimensionalmente al rapporto tra la somma dei suddetti volumi « caratteristici » degli ioni ed il volume totale della soluzione. Con ciò Hückel introduce nei calcoli un nuovo tipo di grandezze « caratteristiche » (empiriche) e cioè i  $\delta_i$  oltre alle grandezze  $a_i$  (raggi ionici di Debye) attorno alle quali si sviluppa la classica teoria di Debye-Hückel.

Per concentrazioni relativamente forti e per ioni che abbiano valori di  $\delta_i$  abbastanza elevati, la teoria di Hückel porta a valori di  $\mu$  maggiori dell'unità e cioè conduce all'assurdo di una « costante dielettrica efficace » negativa. Questo grave inconveniente è già stato notato nella letteratura dell'argomento. A tal proposito perciò Scatchard <sup>(4)</sup> ha proposto una nuova relazione semiempirica che *a priori* esclude la possibilità di giungere a valori negativi della costante dielettrica efficace

$$(4) \quad D = \frac{D_0}{1 + \beta c}$$

Anche questa relazione di Scatchard vale però in pratica per soluzioni non molto concentrate.

Ambedue le teorie al limite per soluzioni diluite si possono ridurre alla stessa equazione differenziale e cioè:

$$(5) \quad \frac{dD}{D} = - \frac{dA}{D_0}$$

dove  $A$  è una funzione della temperatura, della concentrazione e della costante dielettrica del solvente.

Differenziando la (3) posta sotto forma logaritmica e considerando la soluzione tanto diluita da avere  $\frac{\sum \delta_i c_i}{D_0}$  molto piccolo di fronte all'unità, si ottiene

$$dA = d \sum \delta_i c_i.$$

(2) « Phys. Zeits. », 26, 93 (1925).

(3) V. per esempio DEBYE, *Polare molekeln*, p. 128, Hirzel, 1929; oppure anche SACK, « Phys. Zeits. », 28, 199 (1927).

(4) « Phys. Zeits. », 33, 22 (1932).

Così dalla (4) differenziando e considerando il caso in cui  $\beta c$  sia molto più piccolo dell'unità, ne verrà

$$dA = D_0 \beta dc.$$

In ambo i casi  $A$  è dunque proporzionale ad una potenza (nelle due teorie sovranominata risulterebbe la terza potenza) del rapporto di due lunghezze, una corrispondente al raggio dello ione (considerato come circondato da uno speciale strato di solvente) e l'altra  $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\sum n_i}}\right)$  alla distanza media fra ione e ione in soluzione. Onde rendere più omogenea la teoria e sostenendo in pari tempo l'ipotesi che le relazioni empiriche di Hückel (3) e Scatchard (4) abbiano un significato soltanto nel caso di soluzioni diluite, e che la (5) rappresenti invece l'equazione differenziale appropriata per questa « correzione » della teoria di Debye-Hückel, abbiamo tentato di sostituire in  $A$  una potenza del rapporto delle due « lunghezze caratteristiche » della classica teoria di Debye-Hückel e cioè appunto del « raggio ionico di Debye » e dello « spessore medio dell'atmosfera ionica ».

Con ciò non si è fatto altro che analizzare il significato dimensionale delle nuove grandezze introdotte da Hückel e da Scatchard e trovarle corrispondenti ad una potenza del rapporto tra lunghezze individuali ioniche e lunghezze relative all'ambiente, si è sostituito ad un rapporto di grandezze empiriche il rapporto delle corrispondenti grandezze che sono caratteristiche nella teoria di Debye.

Si è ottenuto ciò scrivendo:

$$(6) \quad A = \bar{\eta} \sum \gamma_i (a_i \chi_0)^\varphi$$

dove:

$$\gamma_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \dots}$$

e gli  $n_i$  indicano i numeri di ioni presenti,  $\bar{\eta}$  una costante e  $\varphi$  un esponente da determinarsi.

La costante  $\bar{\eta}$  corrisponde, come facilmente si vede, alla funzione  $A$  in una soluzione per la quale il « volume ionico medio »  $\frac{4\pi}{3} a^3$  di Debye sia eguale al volume medio della cosiddetta « atmosfera ionica »  $\frac{4\pi}{3 \chi_0^3}$ . La teoria di Debye-Sack sulla costante dielettrica delle soluzioni diluite di elettroliti forti permette anche di dare un significato fisico alla costante  $\bar{\eta}$  come sarà dimostrato in un prossimo lavoro.

La esperienza mostra che, nonostante la grossolanità della teoria, la grandezza  $\bar{\eta}$  risulta effettivamente costante ed indipendente dalla concentrazione ionica, attribuendo però all'esponente  $\varphi$  il valore di  $5/2$ . Questo è un valore vicino a 3, e cioè a quel valore dell'esponente  $\varphi$  che darebbe alla grandezza caratteristica della nuova teoria  $(a_i \chi_0)^\varphi$  il significato vero e



proprio di un rapporto tra il volume della « sfera ionica di Debye » ed il « volume medio dell'atmosfera ionica ».

Integrando la (5) senza fare altre speciali ipotesi per la funzione A, si otterrà la relazione esponenziale

$$(7) \quad D = D_0 e^{-\frac{A}{D_0}}.$$

Si può mostrare come con questa « correzione esponenziale » si giunga a calcolare in modo soddisfacente i valori di abbassamenti crioscopici, innalzamenti ebullioscopici, forze elettromotrici di elettrodi reversibili, ecc. in molti casi anche quando si tratti di soluzioni molto concentrate di elettroliti forti.

La relazione proposta da uno di noi in collaborazione col prof. Centola (vedi <sup>(5)</sup> equazione 23 a pag. 435) nei tentativi di calcolo dei coefficienti di attività ed osmotici in soluzioni concentrate di elettroliti forti, si può dunque considerare come un caso speciale della (7) quando la soluzione, specie per determinati elettroliti, possiede particolari valori della concentrazione per cui  $\mu$  risulta abbastanza piccolo di fronte all'unità tanto da poter porre:

$$e^{-\frac{A}{D_0}} = 1 - \frac{A}{D_0} \quad \text{con} \quad \frac{A}{D_0} = \mu.$$

In prossimi lavori svilupperemo le considerazioni riassunte in questa comunicazione e daremo i dettagli del calcolo quali sono necessari per affrontare una previsione numerica di coefficienti di attività e di coefficienti osmotici in soluzioni concentrate di elettroliti forti.

**Chimica Generale.** — *Sul calcolo dell'effetto cinetico primario di sale* <sup>(\*)</sup>. Nota di G. B. BONINO e M. ROLLA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. B. BONINO.

In un recente lavoro in collaborazione con E. Mariani si è data una particolare interpretazione della relazione <sup>(1)</sup> di Hückel  $D = D_0 (1 - \mu)$  per il calcolo semiempirico della « costante dielettrica efficace » agli effetti della previsione dei coefficienti di attività nelle soluzioni di elettroliti forti.

(5) « Mem. R. Acc. d'Italia », vol. IV, n. 13, p. 435 (1933).

(\*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

Questa breve Nota preventiva abbozzata nell'estate del 1943 in attesa di proseguire e concludere le ricerche delle quali in essa si fa cenno, non si è potuta pubblicare per il precipitare degli eventi bellici dell'ultimo periodo 1943-44. Dopo il trasferimento di uno di noi (Bonino) all'Università di Pavia, con la collaborazione di G. Ghielmetti è stato ripreso lo studio dell'argomento che si sta ora più ampiamente sviluppando in collaborazione con M. Rolla presso questo Centro Studi del C. N. R. a Bologna, come verrà pubblicato in ulteriori Note.

(\*\*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) « Phys. Zeits. », 26, 93 (1925).

La stessa relazione aveva già trovato, in precedenti lavori di Bonino e Bonino-Centola <sup>(2)</sup>, un chiarimento ed una precisazione nel senso di ricondurre la funzione  $\mu$  alle costanti fondamentali dei singoli ioni presenti ed alle proprietà dell'elettrolita considerato, preso allo stato cristallino. Bonino e Mariani hanno interpretato la « funzione correttiva » ( $1 - \mu$ ) come la somma dei primi due termini dello sviluppo dell'esponenziale  $e^{-\mu}$ .

Questo ha permesso di spingere con successo i calcoli dei coefficienti di attività al campo di soluzioni molto concentrate e per elettroliti ai quali le precedenti trattazioni non riuscivano applicabili. Bonino e Mariani in base a delle considerazioni dimensionali hanno posto la funzione  $\mu$  come proporzionale ad una potenza del rapporto tra il volume medio ionico di Debye  $\frac{4\pi}{3} a_i^3$  ed il volume medio dell'atmosfera ionica  $\frac{4\pi}{3 \chi_0}$ , grandezza anche questa caratteristica della teoria di Debye-Hückel. Sostituendo nei calcoli alla costante dielettrica del solvente questa costante dielettrica « efficace »  $D_0 e^{-\mu}$  si possono calcolare i coefficienti di attività ed i coefficienti osmotici di soluzioni assai concentrate di elettroliti forti.

In base a particolari considerazioni, per le quali rimandiamo ai lavori originali, Bonino e Mariani pongono per la funzione  $\mu$  l'espressione

$$\mu = \frac{A}{D_0} = \frac{1}{D_0} (\bar{\eta} \chi_0^{5/2} \sum \gamma_i a_i^{5/2})$$

dove  $\bar{\eta}$  è una costante,  $1/\chi_0$  lo spessore medio dell'atmosfera ionica secondo Debye,  $D_0$  la costante dielettrica del solvente,  $a_i$  i raggi ionici di Debye e  $\gamma_i = n_i/\sum n_j$  (la sommatoria estesa solo agli ioni soluti e non al solvente).

La nuova relazione di Bonino e Mariani permette di tentare di risolvere anche altri problemi nel campo delle soluzioni concentrate di elettroliti forti.

Abbiamo fissato la nostra attenzione sul calcolo del così detto « effetto cinetico primario di sale » e cioè dell'effetto della concentrazione di un elettrolita forte « estraneo » sulla velocità di una reazione che avviene tra ioni. Chiameremo questo effetto col nome di « effetto Broenstedt » dal nome dell'Autore che con particolare interesse si è occupato di esso chiarendone il significato dal punto di vista della teoria dell'attività <sup>(3)</sup>.

Secondo l'interpretazione statistica di questo effetto data da Scatchard <sup>(4)</sup> si parte dalla posizione che la velocità di una reazione tra due particelle di tipo A e B elettricamente cariche (ioni) in soluzione, sia proporzionale al numero di particelle A e B presenti nell'unità di volume e che, nell'unità di tempo, si avvicinano al di sotto di una distanza critica  $r$ .

Le particelle di tipo B che si avvicinano nell'unità di tempo ad una distanza  $r$  dalle corrispettive particelle A, saranno quelle che nell'unità di

(2) « Mem. R. Acc. d'Italia », Nr. 14, vol. IV, p. 445 (1933).

(3) « Zeit. Phys. Chem. », 102, 109 (1922); 115, 337 (1925).

(4) « Chem. Rev. », 10, 233 (1932).

tempo raggiungeranno un valore determinato dell'energia. Sulla base della statistica di Boltzmann, chiamato  $n_B$  il numero di ioni B contenuti nell'unità di volume e  $\psi(r)$  il potenziale elettrostatico alla distanza  $r$  dall'ione A, si avrà che la densità degli ioni B che si avvicinano alla distanza  $r$  dagli ioni A sarà uguale a

$$1) \quad n_B \cdot e^{-\frac{z_B |e| \psi(r)}{kT}}$$

essendo  $z$  la valenza elettrolitica dell'ione ed  $|e|$  la carica dell'elettrone in valore assoluto. E perciò la velocità della reazione sarà proporzionale a

$$2) \quad n_A n_B e^{-\frac{z_B |e| \psi(r)}{kT}}$$

La teoria di Debye-Hückel<sup>(5)</sup> permette di calcolare il potenziale  $\psi(r)$  attorno all'ione A:

$$3) \quad \psi(r) = \frac{z_A |e| e^{-\kappa(r-a)}}{D r (1 + \kappa a)}$$

dove  $1/\kappa$  è lo spessore medio della « nuvola ionica di Debye »,  $a$  il « raggio ionico » di Debye e  $D$  la costante dielettrica del mezzo. Le difficoltà che si incontrano per poter studiare con questo metodo le velocità di reazione in soluzioni concentrate di elettroliti sono di ordine analogo a quelle che si incontrano nello studio dei coefficienti di attività dato che la (3) vale solo per soluzioni diluite. Ma qui, e cioè nel campo cinetico, le difficoltà sono maggiori, direi, anche per ragioni tecniche di calcolo. Per esempio se si vuole affrontare lo studio con la teoria di Hückel o con quella di Bonino-Centola per le soluzioni concentrate di elettroliti ponendo in (3), anziché la costante dielettrica del solvente  $D_0$ , una costante dielettrica « efficace » dedotta con la relazione  $D = D_0(1 - \mu)$  si può andare incontro, per speciali concentrazioni di determinati elettroliti, ad incongruenze del tutto inaccettabili, quando  $\mu$  si avvicina all'unità o peggio la supera.

Se si fa l'ipotesi che la distanza critica di avvicinamento degli ioni reagenti, agli effetti del compiersi della relazione, sia  $a$ , l'effetto Brönstedt, e cioè la differenza tra i logaritmi delle costanti di velocità della reazione in presenza ed in assenza di elettroliti estranei, risulta dalle (2) e (3)

$$\log k_c - \log k_c^0 = \frac{z_A z_B |e|^2}{D a k T} \left\{ \frac{\kappa a}{1 + \kappa a} \right\}$$

dove  $k_c$  e  $k_c^0$  sono le costanti cinetiche rispettivamente in presenza ed in assenza dell'elettrolita « estraneo ».

Dunque all'approssimarsi di  $\mu$  all'unità e cioè, formalmente, di  $D$  a zero, l'effetto dovrà tendere a  $+\infty$ . Ma appena invertito il segno di  $D$  l'effetto, dovrebbe saltare a  $-\infty$  e ciò a parte l'ulteriore incongruenza

(5) « Phys. Zeits. », 24, 185 (1923).

data dal fatto che per valori di  $D$  formalmente negativi  $\chi$  diventa immaginario.

Abbiamo perciò iniziato una serie di ricerche su queste reazioni onde constatare se utilizzando la relazione esponenziale  $D = D_0 e^{-\mu}$  proposta da Bonino e Mariani si possa giungere con maggior successo anche al calcolo di grandezze cinetiche quali i valori degli «effetti Brönstedt» oltre che a quello di grandezze termodinamiche, quali sono i coefficienti di attività e i coefficienti osmotici, nel caso di soluzioni concentrate di elettroliti forti. I risultati che esporremo in prossimi lavori sono incoraggianti e meritano di essere discussi.

**Chimica.** — *Ricerche ossidimetriche e polarografiche sui complessi cianidrici del nichel*<sup>(\*)</sup>. Nota di V. CAGLIOTI, G. SARTORI, P. SILVESTRONI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal corrisp. V. CAGLIOTI.

I risultati delle ricerche riportati nella presente comunicazione fanno parte di un gruppo di indagini strutturali ed elettrochimiche sui complessi, dirette a definire le relazioni fra numero di coordinazione, grandezza, polarità di ioni, gruppi o radicali coordinati e stabilità delle diverse forme di valenza dell'atomo o ione coordinante.

Le ricerche tendono in definitiva a stabilire le regolarità che si riscontrano nella costituzione e nel comportamento chimico di molti composti inorganici e di alcuni composti organici ad alto peso molecolare che possono essere considerati come complessi di radicali.

Nel presente lavoro si rende conto dei risultati finora ottenuti dall'esame ossidimetrico e polarografico dei complessi del nichel mono e bivalente,  $K_2[Ni(CN)_3]$  e  $K_2[Ni(CN)_4]$ .

**METODO DI RICERCA.** — Per prima cosa abbiamo esaminato il comportamento polarografico del complesso  $K_2[Ni(CN)_3]$ .

Il sale è stato preparato secondo Bellucci<sup>(1)</sup> riducendo nella stessa cella polarografica  $K_2[Ni(CN)_4]$  con amalgama di sodio. La soluzione rossa che si ha per riduzione presenta una sola onda di ossidazione ed un potenziale di circa  $-0,6$  volt.

Non si riesce ad effettuare la riduzione del complesso  $K_2[Ni(CN)_3]$ ; essa dovrà quindi verificarsi a potenziale superiore a quello di scarica degli alcalini.

Parallelamente con le misure polarografiche sono state eseguite determinazioni coulombometriche per completare e interpretare i dati polaro-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università. Centro di Chimica Generale del C. N. R., Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) BELLUCCI e CORELLI, «Gazz. Chim. Ital.», 43, 569 (1913); idem, 49, 70 (1919).



grafici. A tale scopo sono state adoperate celle secondo Lingane<sup>(2)</sup>; una con liquido anodico separato dal catodico mediante setto poroso; l'altra con gli elettrodi non separati.

Come catodo rinnovantesi è stata usata una superficie di mercurio di circa 30 cm<sup>2</sup> e come anodo un elettrodo di grafite, data l'impossibilità di usare il cloruro d'argento in presenza di ioni CN<sup>-</sup>. L'anodo di riferimento era in ogni caso calomelano saturo. Nello spazio catodico della cella era immerso il capillare del polarografo per il rilevamento delle curve polarografiche che veniva fatto col procedere dell'elettrolisi. Le modalità di misura erano le seguenti: si introduceva nella cella la soluzione di partenza a titolo noto in K<sub>2</sub>[Ni(CN)<sub>4</sub>], si ricopriva il liquido catodico con uno spesso strato di olio di vaselina e si eseguiva un primo polarogramma sul nichel totale bivalente presente.

Indi, al potenziale di depolarizzazione corrispondente a quello di semionda, si eseguiva l'elettrolisi interponendo in serie, sul circuito, il coulombometro a gas tonante. Dopo che la riduzione era stata condotta per un certo tempo, si ripeteva il polarogramma; quindi si prelevava dalla cella un volume noto di soluzione, si lasciava riossidare all'aria e si procedeva ad una nuova determinazione polarografica. Le determinazioni sono state eseguite prima di tutto in ambiente di NaOH normale cui venivano aggiunte quantità crescenti di KCN; poi erano eseguite diverse prove direttamente in soluzione normale di KCN. Per controllo sono state anche esaminate soluzioni di solfato di nichel in cloruro di litio saturo ed in cloruro di potassio normale.

**RISULTATI DELLE RICERCHE.** - Qualitativamente i risultati si possono così riassumere:

Solfato di nichel in cloruro di litio saturo o in cloruro di potassio normale con spazi elettrodici separati e anodo di cloruro d'argento: si osserva scarica dello ione nichel e quindi formazione di amalgama. Durante l'elettrolisi il liquido si intorbida per idrolisi. I rendimenti di corrente al coulombometro sono molto bassi.

K<sub>2</sub>[Ni(CN)<sub>4</sub>] in KCN normale: la soluzione ridotta parzialmente con amalgama di sodio presenta l'onda di ossidazione di K<sub>2</sub>[Ni(CN)<sub>3</sub>] e l'onda di riduzione di K<sub>2</sub>[Ni(CN)<sub>4</sub>].

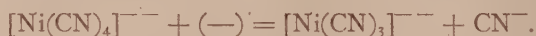
Eseguendo la riduzione elettrolitica nella cella coulombometrica, essa procede regolarmente con spazi elettrodici separati o meno. I polarogrammi, eseguiti a intervalli di tempo, mostrano le due onde che derivano dalla presenza contemporanea degli ioni [Ni(CN)<sub>3</sub>]<sup>-</sup> ed [Ni(CN)<sub>4</sub>]<sup>-</sup>.

Prelevando in un momento qualsiasi della riduzione un campione di liquido e lasciando riossidare, si ottiene un'onda sola, quella di riduzione di [Ni(CN)<sub>4</sub>]<sup>-</sup>, di altezza pari a quella iniziale. Quando sono presenti i due ioni ossidato e ridotto, la somma delle altezze delle due onde è uguale all'al-

(2) « Journ. Am. Chem. Soc. », 65, 1348 (1943).

tezza dell'onda di partenza. Questi fatti dimostrano che non scompare nichel dalla soluzione e quindi non si ha deposizione, ma solo riduzione.

Il fatto che la somma delle due onde, quella di riduzione di  $[\text{Ni}(\text{CN})_4]^{--}$  e quella di ossidazione di  $[\text{Ni}(\text{CN})_4]^{--}$  corrisponda all'altezza dell'onda di riduzione del nichel totale fa ammettere senz'altro che il processo elettrolitico è di primo ordine:



I rendimenti di corrente danno nei casi migliori circa l'85 %, il ch  si spiega con l'ossidabilit  di  $[\text{Ni}(\text{CN})_3]^{--}$  in acqua.

Visti questi risultati qualitativi, sono state eseguite delle prove con criteri quantitativi nel modo seguente: nella cella ad ambiente unico sono stati introdotti 120 cc. di KOH normale e 0,5783 gr. di  $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_4]$ ; ricoperta al solito la soluzione con olio di vaselina,   stato rilevato il polarogramma iniziale. Il potenziale di riduzione del complesso bivalente dedotto dal polarogramma    $-1,442$  volt. A questo potenziale, maggiorato di 0,005 volt,   stata eseguita l'elettrolisi in coulombometro per un'ora, dopo di che si   ripetuto il polarogramma che mostrava 2 onde: quella di ossidazione di  $[\text{Ni}(\text{CN})_3]^{--}$  e quella di riduzione di  $[\text{Ni}(\text{CN})_4]^{--}$ .

Prelevati 5 cc. della soluzione sono stati ossidati all'aria; polarografati a loro volta, han dato un'onda di riduzione di altezza uguale alla prima.

Alla soluzione rimanente, sono state aggiunte diverse quantit  note di KCN solido e sono stati ripetuti i polarogrammi come sopra. I dati sono elencati nella tabella seguente:

$\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_4]$	$\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$	$\text{CN}^-$	$\pi_1$	$\pi_2$
0,0235	—	—	—	— 1,442
0,0156	0,0079	0,0079	— 0,613	— 1,421
0,0169	0,0066	0,0238	— 0,666	— 1,424
0,0170	0,0065	0,0768	— 0,769	— 1,412
0,0201	0,0034	0,1966	— 0,805	— 1,411
0,0231	0,0004	0,5775	— 0,828	— 1,418

DISCUSSIONI DEI RISULTATI. — I risultati delle nostre ricerche confermano anzitutto un precedente studio di Emelianova <sup>(3)</sup>, che attribuiva l'onda di riduzione polarografica di  $[\text{Ni}(\text{CN})_4]^{--}$ , in ambiente di KCN alla riduzione del complesso a monovalente.

L'affermazione di questo Autore era basata sul fatto che con amalgama di sodio si ottiene  $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$ , e poich  il potenziale dell'amalgama    $-2$  volt circa rispetto al calomelano saturo, ad una tensione inferiore non si poteva avere una riduzione pi  spinta.

Il potenziale dell'onda polarografica del nichel in soluzione cianidrica in funzione della concentrazione varia difatti in media di 50-55 mV per una

(3) « Rec. Trav. Chim. Pays Bas », 44, 528, 1925.

unità di esponente della potenza del 10; tale variazione corrisponde, quindi, ad un processo di primo ordine.

Dai nostri dati risulta che sull'elettrodo a mercurio i potenziali di ossidazione e riduzione non coincidono; non si può quindi, nelle condizioni in cui si è operato, parlare di equilibrio di ossido riduzione.

Il potenziale di riduzione di  $[\text{Ni}(\text{CN})_4]^{--}$  ad  $[\text{Ni}(\text{CN})_3]^{--}$  si sposta verso valori più positivi per aggiunte di KCN inferiori alla molarità. Ciò era stato già notato da Hockstein<sup>(4)</sup> e, quantunque la irreversibilità del fenomeno non permetta di applicare le comuni formule termodinamiche per la riduzione polarografica dei complessi, pure si può spiegare questo fatto ricordando che la differenza fra il potenziale di riduzione dello ione nichel bivalente complesso e quello dello ione non complesso, in presenza di ioni  $\text{CN}^-$  liberi, dovrebbe seguire l'espressione di Heyrowsky:

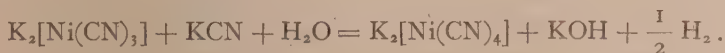
$$(1) \quad \pi_{\text{compl.}} - \pi_{\text{non compl.}} = 0,059 \log \frac{K_o}{K_r} - 0,059 \log [\text{CN}^-]$$

nella quale  $K_o$  e  $K_r$  sono le costanti di dissociazione della forma ossidata e ridotta del complesso. Il segno della variazione del potenziale di riduzione dipende quindi dal rapporto  $K_o/K_r$  e dal  $\log [\text{CN}^-]$ .

Nel nostro caso  $\log [\text{CN}^-]$  è sempre inferiore all'unità, quindi l'ultimo termine della (1) è sempre positivo: ciò porta ad una diminuzione del potenziale di riduzione di  $K_2[\text{Ni}(\text{CN})_4]$  con l'aumentare delle concentrazioni degli ioni  $\text{CN}^-$ .

Se si aggiungono quantità elevate di cianuro, il potenziale di riduzione si sposta verso valori più negativi e cioè si stabilizza la forma ossidata.

Per quanto riguarda il potenziale di ossidazione di  $[\text{Ni}(\text{CN})_3]^{--}$ , questo anche per piccole aggiunte di ioni  $\text{CN}^-$  diventa più negativo; il che corrisponde ad una maggiore ossidabilità del sale. Ciò è in accordo con le previsioni e può essere spiegato col fatto che gli ioni  $\text{CN}^-$  favoriscono la reazione di ossidazione, secondo lo schema:



CONCLUSIONE. — È studiato il comportamento polarografico degli ioni  $[\text{Ni}(\text{CN})_4]^{--}$  e  $[\text{Ni}(\text{CN})_3]^{--}$ , sono stati determinati i potenziali di riduzione e di ossidazione e sono state tratte alcune considerazioni sulla stabilità dei due ioni.

(4) « Jour. Gen. Chem. U.R.S.S. », 7, 2486, 1937.

**Cristallo-chimica.** — *Ricerche sulle Emoglobine cristallizzate.* — II<sup>(\*)</sup>. *Cristalli di emoglobina negli incroci del cavallo e dell'asino*<sup>(\*\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*\*)</sup> di C. PERRIER e G. LOMBARDI, presentata dal Corrisp. C. PERRIER.

La Cristallografia, che tanti aiuti ha dato, seguita ora a daré e sempre darà alla soluzione di importanti questioni chimiche, ha portato pure notevoli contributi alla trattazione di questioni biologiche, in un campo, quindi, dove meno evidenti potevano sembrare le sue applicazioni.

Così Reichert e Brown in un esteso e pregevolissimo studio<sup>(1)</sup> (anche se oramai meritevole, in qualche parte, di revisione e completamento con nuovi metodi) hanno mostrato che i cristalli di emoglobina ( $Hb$  = emoglobina ridotta;  $Hb \cdot O_2$  = ossiemoglobina;  $Hb \cdot CO$  = carbossiemoglobina;  $Hb \cdot OH$  = metaemoglobina) sono nettamente diversi da genere a genere, mentre le corrispondenti emoglobine sono molto simili nelle varie specie dello stesso genere. R. e B. dicono, anzi, che in questo caso esse sarebbero *isomorfe*, ma mancando ancora la prova della loro sincristallizzazione, è più prudente definirle solo come *omeomorfe* od *isotipe*. Su questa regola (potremmo chiamarla «regola di R. e B.») essi ritengono che si possano più convenientemente basare i criteri per la classificazione di certi gruppi di animali. Più tardi Perrier e Jannelli<sup>(\*)</sup> hanno provato che esiste differenza fra l'emoglobina dell'uomo adulto e quella del neonato, e l'hanno messa in relazione con la diversità dell'organo ematopoietico, rispettivamente il midollo osseo e il fegato. Ovvio è anche l'importanza di queste ricerche dal punto di vista medico-legale.

Molti, però, sono ancora i problemi biologici cui le ricerche sui cristalli di emoglobina possono portare un contributo: in questa Nota esamineremo, quale è il carattere dell'emoglobina nei nati da incroci, cosa assai interessante dal punto di vista dell'ereditarietà.

Abbiamo preso, a questo scopo, in esame alcuni termini della famiglia degli «Equidi», anche perchè riusciva abbastanza facile procurarsi il sangue dei loro incroci «Mulo» (*equus mulus* = nato dall'asino, padre, e dalla cavalla, madre) «Bardotto» (*equus hynnus* = nato dal cavallo, padre, e dall'asina, madre). Di questo gruppo R. e B. avevano studiato solo il cavallo ed il mulo, ed anche incompletamente.

La tecnica impiegata per le misure è quella stessa già impiegata da uno di noi<sup>(\*)</sup>, migliorata nel senso di determinare direttamente l'angolo delle faccie, anzichè dedurlo dalle proiezioni stereografiche. Si determinò anche

(\*) Nota I. — C. PERRIER e P. JANNELLI, *Differenze cristallografiche fra l'emoglobina dell'uomo adulto e quella del neonato*. «Archivio di Fisiologia», Firenze; XXIX, 289 (1931).

(\*\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(\*\*\*) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1947.

(1) E. T. REICHERT e A. P. BROWN, *The Crystallography of Haemoglobins*. «Carnegie Institution of Washington», Pubbl. n. 116 (1909).



l'indice di rifrazione medio dei cristalli seguendo un metodo già proposto da Nikitin <sup>(2)</sup> ma, poi, non adoperato, per non essere stato ancora messo a punto. Siccome, molto approssimativamente, risultò per tutte le emoglobine studiate  $n = 1,50$ , così vennero impiegati segmenti sferici con  $N = 1,516$ .

Anche i preparati furono ottenuti con il solito metodo, però fu aggiunto NaF per ritardare la riduzione dell'Hb·O<sub>2</sub>. Di fronte al metodo dell'ossalato di NH<sub>4</sub> (R. e B.) esso ha il vantaggio di non dare cristalli birifrangenti che possono disturbare, di favorire la formazione di cristalli unici e grossi, riducendo quella dei geminati, ma sembra faciliti la comparsa dell'Hb·OH. Siccome però nemmeno l'ossalato l'impedisce, così preferimmo sempre impiegare il NaF, tanto più che l'Hb·OH è strettamente isogona dell'Hb·O<sub>2</sub>, con la quale dà, poi, cristalli misti, forse, in tutti i rapporti (i due corpi sono, quindi, anche *isomorfi*) e perciò, praticamente, non influenza i valori angolari. Purtroppo essa influenza molto il valore di  $2V$ : vedremo più tardi come si risolse la difficoltà in vista dello scopo da ottenere. Dell'Hb·OH neutra del cavallo furono anche preparati cristalli per lenta diffusione dell'emoglobina in una soluzione di (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> e (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>HPO<sub>4</sub> <sup>(3)</sup>.

Come già avevano trovato R. e B. (cosa confermata da Bernal <sup>(4)</sup> per via röntgenografica per l'Hb·OH) i cristalli di Hb·O<sub>2</sub> sono monoclini, con *habitus* quasi sempre semplicissimo: tabulari secondo (001) e costante presenza degli sfenoidi (110) e (1 $\bar{1}$ 0). Nel caso dell'Hb·O<sub>2</sub> del cavallo si notarono anche le forme (100) e (010), la prima notata già da R. e B. nell'Hb·O<sub>2</sub> del mulo. Frequenti i geminati secondo (001) emitropia normale, e le emitropie parallele secondo [110] e [1 $\bar{1}$ 0] con piano di contatto (010): non infrequenti i trigeminati secondo queste due ultime leggi.

Nell'Hb·OH osservammo facilissima sfaldatura secondo (110), (1 $\bar{1}$ 0) e secondo (001). Il carattere morfologico porterebbe ad assegnare questi cristalli alla classe prismatic, ma poichè l'emoglobina è sostanza munita di potere rotatorio ed il piano degli assi ottici coincide con (001), l'unica classe possibile è la sfenoidica.

L'uso del NaF ci ha evitato la comparsa di cristalli di emoglobina ridotta, della quale, quindi, non ci siamo occupati. Analogamente non ci occupammo in modo particolare delle forme  $\alpha$  (rombiche) già notate da R. e B., perchè poco si prestavano allo scopo delle nostre indagini.

Il colore dei cristalli è rosso vivo per quelli di Hb·O<sub>2</sub> e Hb·CO, rosso scuro o rosso giallastro (color sepie caratteristico) per quelli di Hb·OH: i colori di pleocroismo sono quelli già descritti da R. e B., e cioè per l'Hb·O<sub>2</sub> e Hb·CO,  $\alpha$  è rosso chiaro, e  $\beta$  e  $\gamma$  sensibilmente uguali, rosso scuri; per l'Hb·OH è  $\alpha$  rosso giallastro  $\beta$  e  $\gamma$  rosso cupi, tendenti al brunastro. È da

(2) *La méthode universelle de Fedoroff*. Paris, Béranger. Il modo di esecuzione che qui si trovò più conveniente, verrà esposto in altro lavoro.

(3) PERUTZ, «Nature», 143, 731 (1939). Soluzione satura di (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, 3 parti e parti 1 di soluzione molare di (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>HPO<sub>4</sub>; Ph = 6,3.

(4) BERNAL, FRANKUCHEN, PERUTZ, «Nature», 141, 523 (1938). La conferma vale in quanto Hb·O<sub>2</sub> e Hb·OH danno, come è stato detto, cristalli misti, forse, in tutti i rapporti.

notare, però, che se in massa l'Hb·OH si differenzia nettamente per il colore dalla Hb·O<sub>2</sub> e della Hb·CO, non altrettanto succede con i cristalli isolati. Allo spettroscopio si riconoscono le bande tipiche delle varie emoglobine, cosicchè, per questa via, la loro differenziazione risulta facile, ma sulle loro caratteristiche si riferirà in altro lavoro.

TABELLA DEI VALORI ANGOLARI. - I.

Cavallo					
Hb·O <sub>2</sub>					
$\begin{array}{c} \text{110} \quad \text{1}\bar{1}\text{0} \\ \text{110} \quad \text{001} \end{array} \quad (1)$	7	115° - 117°	115° 56'	—	115° 24' (2)
$\begin{array}{c} \text{110} \quad \text{001} \end{array} \quad (1)$	12	77° 5' - 79° 14'	78° 36'	—	78° 39' (2)
$\begin{array}{c} \text{100} \quad \text{001} \\ \text{010} \quad \text{001} \end{array}$	3	68° 23' - 67° 44'	68° 6'	68° 5'	—
	2		90°	90°	—
Hb·OH					
$\begin{array}{c} \text{110} \quad \text{1}\bar{1}\text{0} \\ \text{110} \quad \text{001} \end{array} \quad (1)$	5	115° 12' - 116° 48'	115° 14'	—	—
	3	78° - 78° 48'	78° 30'	—	—
Hb·CO					
$\begin{array}{c} \text{110} \quad \text{1}\bar{1}\text{0} \\ \text{110} \quad \text{001} \end{array} \quad (1)$	9	117° 12' - 120°	118°	—	—
	26	78° 12' - 78° 48'	78° 38'	—	—
Mulo					
Hb·O <sub>2</sub>					
$\begin{array}{c} \text{110} \quad \text{1}\bar{1}\text{0} \\ \text{110} \quad \text{001} \end{array} \quad (1)$	37	114° 42' - 115° 48'	115° 24'	—	—
	21	77° 42' - 78° 48'	78° 38'	—	—
Asino					
Hb·O <sub>2</sub>					
$\begin{array}{c} \text{110} \quad \text{1}\bar{1}\text{0} \\ \text{110} \quad \text{001} \end{array} \quad (1)$	9	113° 48' - 115° 48'	115° 24'	—	115° 8' (3)
	25	77° - 81° 18'	79° 15'	—	79° 19' (3)
Bardotto					
Hb·O <sub>2</sub>					
$\begin{array}{c} \text{110} \quad \text{1}\bar{1}\text{0} \end{array} \quad (1)$	36	113° 30' - 116° 24'	115° 12'	—	—
$\begin{array}{c} \text{110} \quad \text{001} \end{array}$	55	77° 6' - 80° 48'	79° 15'	—	—

(1) Con 110 001 sono riuniti gli angoli 110 001.

(2) Medie della coppia cavallo-mulo.

(3) Medie della coppia asino-bardotto.

In questi cristalli notammo spesso comparsa di facce vicinali: così la (010) è talvolta sostituita da una vicinale che fa con la (001) un angolo di ca. 5° diverso da 90°.

Così pure le faccie di (110) o di (110) sono, spesso, sostituite (per fortuna, in genere, solo quelle di una forma o dell'altra) da facce deviate nella zona  $\alpha$

di ca.  $2^{\circ}$ – $3^{\circ}$ ; ciò può riconoscersi dagli angoli di estinzione misurati sopra (001) rispetto agli spigoli  $[(110):(001)]$  e  $[(1\bar{1}0):(001)]$  che, allora, non sono più eguali. Si cercò di evitare, in vari ed opportuni modi, l'inconveniente e specialmente si cercò di eliminare quelle misure fatte su cristalli cui non corrispondeva un'estinzione simmetrica, ma ciò rese più lungo il lavoro.

Dai dati ottenuti e contenuti nella tabella dei valori angolari, scaturì dapprima, essendosi cominciate le indagini con l'Hb·O<sub>2</sub>, una notevole confusione di risultati; l'angolo  $110^{\circ}\widehat{1\bar{1}0}$  risultava approssimativamente eguale per tutti e quattro gli animali, invece per quello  $001^{\circ}\widehat{110}$  sembrava esserci una discreta tendenza a riunirsi in due gruppi distinti: uno per la coppia cavallo-mulo, l'altro per la coppia asino-bardotto. Analogamente l'angolo degli assi ottici (pur essendosi tenuto conto solo di quei cristalli nei quali entrambi gli assi erano accessibili) oscillava entro limiti così ampi (con eccezione dell'asino) che non si poteva giungere ad alcuna conclusione definitiva <sup>(5)</sup> (Tabella II).

TABELLA DELLE COSTANTI E DEI CARATTERI OTTICI. – II.

	$\beta - \text{Hb} \cdot \text{O}_2$				
	$a : b : c$	$\beta$	+ 2V	$\chi \widehat{\gamma}^{(5)}$	Piano $\alpha - \gamma$
Cavallo . . . .	$1,72_{27}^{(1)} : 1 : ?$	$111^{\circ} 55'^{(1)}$	$60^{\circ} - 80^{\circ}$	$\sim 10$	$010$
Mulo . . . . .	$1,70_{50}^{(2)} : 1 : ?$	$111^{\circ} 55'^{(2)}$	$66^{\circ} - 85^{\circ}$	$\sim 9^{\circ} - 10^{\circ}$	"
Asino . . . . .	$1,66_{85} : 1 : ?$	$110^{\circ} 16'$	$83,5^{\circ}$	$\sim 9^{\circ}$	"
Bardotto . . . .	$1,68_{09} : 1 : ?$	$110^{\circ} 22'$	$65^{\circ} - 86^{\circ}$	$\sim 11^{\circ}$	"
	$\beta - \text{Hb} \cdot \text{OH}$				
	$a : b : c$	$\beta$	+ 2V	$\chi \widehat{\gamma}^{(5)}$	Piano $\alpha - \gamma$
Cavallo . . . .	$1,72_{40}^{(3)} : 1 : ?$	$111^{\circ} 31'^{(3)}$	$82^{\circ}$	$\sim 10^{\circ}$	"
	$\beta - \text{Hb} \cdot \text{CO}$				
	$a : b : c$	$\beta$	+ 2V	$\chi \widehat{\gamma}^{(5)}$	Piano $\alpha - \gamma$
Cavallo . . . . .	$1,80_{74}^{(4)} : 1 : ?$	$112^{\circ} 30'^{(4)}$	$68^{\circ}$	$\sim 10$	"
Mulo . . . . .	? : 1 : ?	?	$67,5^{\circ}$	?	?
Asino . . . . .	? : 1 : ?	?	$83,5^{\circ}$	?	?
Bardotto . . . .	? : 1 : ?	?	$83,6^{\circ}$	?	?

(1) R. e B. danno  $a=1,69_{76}$  e  $\beta=108^{\circ}$  nei geminati, ma  $a=1,600$  nei cristalli singoli.

(2) R. e B. danno  $a=1,71_{47}$  e  $\beta=108$ .

(3) Dai lavori röntgenografici di Bernal si deduce  $a=1,72$  e  $\beta=112^{\circ}$ .

(4) R. e B. danno  $a=1,66_4$  e  $\beta=112^{\circ}$ .

(5) L'angolo di estinzione è misurato nell'angolo ottuso  $\beta$ .

(5) Queste ricerche furono iniziate nel 1942 insieme alla laureanda Sig.na Abruzzese; in esse, per la scarsità di tempo, disponibile, venne tenuto conto essenzialmente di 2V, ma le indicate oscillazioni non permisero, allora, nessuna sicura conclusione. Dato lo stato di guerra

Queste oscillazioni di  $2V$  provavano, però, in modo indubbio che i cristalli di  $Hb \cdot O_2$  non dovevano essere puri, ma, piuttosto formati da una miscela di almeno due sostanze, fatto questo non rilevato da R. e B., pur così minuziosi. Fra le sostanze passibili di dare cristalli misti con  $Hb \cdot O_2$  le più ovvie dovevano essere  $Hb$  (ridotta) e, specialmente,  $Hb \cdot OH$ ; l'esame spettroscopico confermò, attraverso la comparsa della banda tipica, tra  $600-630 \mu$ , la presenza costante della cosiddetta *meta emoglobina neutra* insieme alla  $Hb \cdot O_2$ . Si prepararono allora, cristalli (in vitro e per diffusione) di  $Hb \cdot OH$  del cavallo e si ottenne per  $2V$  un valore ben costante e di un valore tale che spiegava perfettamente, almeno nel caso di questo animale, le oscillazioni osservate (Tabella II).

Per eliminare l'inconveniente in maniera integrale, pensammo di esaminare le  $Hb \cdot CO$ , di cui, però, solo quella del cavallo poté, fino ad ora, essere ottenuta in cristalli ben conformati, le altre avendo dati cristalli, unici sì, ma mal delimitati. L'angolo  $2V$  risultò, allora ben costante nelle singole  $Hb \cdot CO$ , provando che adesso si aveva veramente a che fare con cristalli di un'unica sostanza (Tabella II).

Dal complesso delle indagini eseguite e dai valori ottenuti e riassunti nelle due tabelle possiamo tirare alcune importanti conclusioni:

I. Le emoglobine del cavallo e dell'asino, in quanto appartengono a due diverse specie dello stesso genere, sono *isotipe* (regola di R. e B.), cioè hanno la stessa distribuzione spaziale delle unità molecolari costituenti i leptoni del reticolo. Esse, però, non sembrano *isomorfe* non avendo noi potuto ottenere sincristallizzazione dell' $Hb \cdot CO$  del cavallo e dell'asino.

II. Nel passaggio dall' $Hb \cdot O_2$  del cavallo a quella dell'asino, gli angoli della zona  $[001]$  resterebbero sostanzialmente invariati, mentre varierebbero sensibilmente quelli della zona  $[010]$ ; significato e possibili cause di questa variazione verranno discussi in altro lavoro.

III. Poichè le costanti cristallografiche risultano tutte molto simili il carattere differenziativo più importante, e, del resto, molto comodo e sicuro, è  $2V$ .

IV. Data la facilità della formazione dell' $Hb \cdot OH$  e la sua sincristallizzabilità con la corrispondente  $Hb \cdot O_2$ , il modo più sicuro per differenziare questi sangui è preparare i cristalli di  $Hb \cdot CO$  e determinare  $2V$ .

V. I cristalli di emoglobina del mulo sono identici a quelli del cavallo e quelli del bardotto identici a quelli dell'asino: facendo, per  $Hb \cdot O_2$ , le medie fra i valori angolari di ogni coppia, avremo le costanti:

$$\text{Cavallo-Mulo} \quad a:b:c = 1,70_{68} : 1 : ? \quad ; \quad \beta = 111^\circ 52'$$

$$\text{Asino-Bardotto} \quad a:b:c = 1,67_{62} : 1 : ? \quad ; \quad \beta = 110^\circ 20'.$$

che oltre tutto rendeva anche più difficile procurarsi il sangue di bardotto (abbastanza frequente in Sicilia, ma eccezionale in alta Italia) le ricerche furono interrotte, e riprese nel 1946 con il laureando Lombardi Giordano.



I nostri risultati si scostano, quindi, notevolmente da quelli di R. e B, ma, dato il metodo assai più perfezionato da noi seguito per le misure e data la concordanza dei nostri risultati con quelli parziali di Bernal, riteniamo i nostri valori assai più attendibili. Del resto che le misure di R. e B. non siano troppo precise è provato dalla differenza da essi riscontrate nei valori di  $a$  (Cfr. note (1) e (2) della Tabella delle costanti) nel caso dei *geminati* e dei cristalli *singoli* di  $\text{Hb} \cdot \text{O}_2$  del cavallo — rispettivamente 1,70 e 1,60 — mentre per i cristalli *singoli* del mulo danno 1,71. Per l'angolo degli assi ottici essi dovettero limitarsi a valori di  $2E$ , e, per di più, questi furono misurati anche solo approssimativamente, e tutto ciò, congiunto con il fatto, da essi non osservato, della costante presenza, ed in quantità anche considerevoli, di  $\text{Hb} \cdot \text{OH}$  nei cristalli di  $\text{Hb} \cdot \text{O}_2$  (è possibile che, talvolta, la trasformazione  $\text{Hb} \cdot \text{O}_2 \rightarrow \text{Hb} \cdot \text{OH}$  sia presso che completa), spiega molto facilmente perchè ad essi sia sfuggita l'identità dell'emoglobina del cavallo e del mulo.

VI. Dal punto di vista dell'ereditarietà, l'eguaglianza delle emoglobine riscontrata nelle coppie sopraindicate, prova, che qui si ha trasmissione di *un carattere ereditario*, che non apparirebbe somma di caratteri minori, e che tale trasmissione avviene per via materna. È interessante notare anche il parallelismo fra questo carattere e le masse del tessuto osteo-muscolare nella coppia cavallo-mulo ed asino-bardotto, il che induce a ritenere analogo parallelismo per l'ematopoiesi.

Noi abbiamo potuto avere i numerosi campioni di sangue che ci furono necessari mercè la cortesia del dott. Giuseppe Morel Negro, veterinario Direttore del locale mattatoio; un campione di sangue di bardotto ci fu fornito dal prof. Ajello, della Facoltà di Veterinaria dell'Università di Messina: ad entrambi vada il nostro più vivo ringraziamento.

**Cristallo-chimica.** — *Proprietà fisiche dei cristalli misti. — Deduzione della regola di Retgers da quella di Petterson-Tschermak e loro incompatibilità con quella di Vegard* (\*). Nota (\*\*) del Corrisp. C. PERRIER.

È nota, e correntemente usata per individuare la composizione di un cristallo misto binario, la regola di Retgers secondo la quale il volume specifico di un cristallo misto varierebbe linearmente con la composizione in peso dei componenti

$$(I) \quad v_{sm} = v_{sB} x + v_{sA} (1 - x) = (v_{sB} - v_{sA}) x + v_{sA}.$$

Retgers credette di dare un fondamento teorico a questa regola di addittività dei volumi specifici ammettendo una struttura lamellare per i cristalli

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1947.

misti, dimentico, forse, dell'antica affermazione di Beudant, essere i cristalli misti mescolanze fisiche e non miscele meccaniche, come in sostanza presupporrebbe Retgers; del resto, strutturistivamente, la sua concezione non ha, adesso, più nessun valore, salvo casi particolari, che, del resto, qui non interessano.

La regola di Petterson-Tschermak è nota piuttosto come la *regola dei volumi molecolari*: secondo questa sarebbe il volume molecolare del cristallo misto quello che varierebbe linearmente con il variare della composizione espressa, però, in *per centi molecolari*.

$$(2) \quad V_m = (V_B - V_A) y + V_A.$$

Se questa ha avuto in pratica solo scarsa applicazione, ciò deriva specialmente dal fatto che, essendo i volumi molecolari delle sostanze isomorfe *quasi sempre assai simili*, la pendenza della retta rappresentativa risulta per lo più minima.

Data la interdipendenza fra volumi specifici e volumi molecolari ci si può domandare se la validità di una di esse porti effettivamente anche alla validità dell'altra oppure no ed in questo caso quale relazione le leghi; per quanto questa questione sia assai vecchia non mi pare che una tale relazione abbia fino ad ora trovato una espressione concreta, così da potersi passare da una all'altra: la cosa è invece assai semplice.

È chiaro che, venuto a mancare il primitivo, ipotetico fondamento teorico alla regola di Retgers, se ne esiste uno, esso dovrà trovarsi nel campo strutturistico vero e proprio.

Poichè nelle celle elementari delle sostanze isomorfe tipiche (che danno cristalli misti in estesi rapporti) è contenuto lo stesso numero di molecole (giusto le condizioni di omeomorfismo di Goldschmidt<sup>(1)</sup>, le quali costituiscono anche la necessaria premessa dell'isomorfismo); sussiste certamente la relazione:

$$(3) \quad V : v_e = N : p$$

( $N$  = numero di Avogadro;  $p$  = numero delle molecole per cella) cosicchè dovrà anche essere valida la

$$(4) \quad v_{em} = (v_{eB} - v_{eA}) y + v_{eA}$$

dove si fa riferimento alle celle elementari e  $v_{em}$  è il volume teorico della cella elementare del cristallo misto calcolato in base alla legge della additività; se questa fosse valida il suo valore dovrebbe coincidere con quello determinato in base ai parametri statistici del cristallo misto stesso (per semplicità ci riferiremo ad un cristallo cubico).

Se  $g_m$  è il peso di una cella elementare del cristallo misto sarà manifestamente

$$(5) \quad v_{sm} = \frac{v_{em}}{g_m}$$

(1) C. PERRIER, *Regola di Zamborini e condizioni di isomorfismo*. « Rend. Acc. Lincei », II [8] (1947), 246.

e poichè sussiste l'addittività dei pesi, avremo

$$(6) \quad g_m = pby + pa(1 - y) = p[(b - a)y + a]$$

con  $a = M_A/N$  e  $b = M_B/N$  ( $M$  = peso molecolare).

Riferendo le quantità di A e di B a 1 gr. invece che a  $g_m$  gr. avremo

$$g_m : pby = 1 : x.$$

e quindi

$$(7) \quad x = \frac{by}{(b - a)y + a}$$

dà cui

$$(8) \quad y = \frac{ax}{(a - b)x + b}.$$

Sostituendo in (5) il valore di  $v_{em}$  dato dalla (4) ed il valore di  $g_m$  dato dalla (6) avremo

$$(9) \quad v_{em} = \frac{(v_{eB} - v_{eA})y + v_{eA}}{p[(b - a)y + a]}$$

e sostituendo il valore di  $y$  dato dalla (8) avremo

$$(10) \quad v_{em} = \frac{(v_{eB} \cdot a - v_{eA} \cdot b)x + v_{eA} \cdot b}{pab} = \left( \frac{v_{eB}}{pb} - \frac{v_{eA}}{pa} \right)x + \frac{v_{eA}}{pa}$$

ma essendo manifestamente  $pa = g_A$  e  $pb = g_B$ , avremo, tenendo conto della (5).

$$(11) \quad v_{em} = \left( \frac{v_{eB}}{g_B} - \frac{v_{eA}}{g_A} \right)x + \frac{v_{eA}}{g_A} = (v_{eB} - v_{eA})x + v_{eA}.$$

Ciò mostra che le regole di Retgers e di Petterson Tschermak si equivalgono perfettamente, sono entrambe l'espressione di uno stesso fenomeno fondamentale ipotetico: variazione lineare dei volumi delle celle elementari.

Entrambe queste regole sono, però, incompatibili con la regola di Vegard: *variazione lineare dei parametri della cella elementare dei cristalli misti con il variare della composizione molecolare.*

$$(12) \quad l_m = (l_B - l_A)y + l_A.$$

Considerandosi anche solo il caso di un reticolo cubico si avrebbe

$$(13) \quad v_{em} = l_m^3 = [(l_B - l_A)y + l_A]^3.$$

È chiaro che la variazione di  $v_{em}$  non sarebbe più rappresentata da una relazione lineare e questo prova l'incompatibilità indicata cosicché può apparire strano che Hassel<sup>(2)</sup> asserisca che nelle sostanze saline la regola di Vegard sia spesso verificata « con notevole esattezza » mentre è proprio già in questo caso che si ammette valida quella di Retgers.

(2) Hassel non fa che ripetere quanto dicono ARNE WESTGREN e ARNE ALMIN: « Zeit. phys. Ch. », (B) V (1929), 14.

Wallerant nel suo trattato <sup>(3)</sup> discute in quali casi si debba fare riferimento a percenti molecolari e quando a per centi in peso: è chiaro che nella trattazione scientifica di una questione nella quale siano coinvolte sostituzioni di leptoni l'unica variabile indipendente alla quale si possa fare riferimento deve essere quella dei percenti molecolari, l'altra potrà essere impiegata solo quando si abbiano delle relazioni biunivoche come quella sopra dimostrata, oppure quando sia già stata dimostrata la forma della variazione. Ma ciò potrà variare da caso a caso, cosicchè il suo impiego risulterà giustificato solo a posteriori.

Le nostre conoscenze intorno alla dinamica del reticolo dei cristalli misti sono, per il momento, estremamente scarse: al riguardo si ha, forse il solo lavoro di Herzfeld e Grimm <sup>(4)</sup>, in realtà ancora poco conclusivo, avendo questi A. A. impostato il calcolo dell'energia di reticolato dei cristalli misti sulla primitiva espressione di Born, indubbiamente ancora troppo approssimata per questo scopo.

Noi non abbiamo, perciò, attualmente nessuna possibilità di determinare una qualche legge teorica per la variazione delle proprietà fisiche nei cristalli misti e quindi dobbiamo limitarci a ricercare i tipi delle variazioni sulla solita base di dati statistici, ma con essi non potremo mai stabilire delle leggi, ma solo delle regole che potremo, talvolta, vedere fallire con il raffinarsi dei metodi di indagine.

Secondo Vegard <sup>(5)</sup> poichè le particelle isomorfe hanno dimensioni diverse, quando esse entrano nei cristalli misti, cioè quando si ha formazione di vere miscele isomorfe, si possono dare queste due alternative:

1° se esse si comportano come sfere rigide, devono intervenire deformazioni geometriche del reticolo;

2° se esse si comportano come sfere elastiche, mancano le deformazioni del reticolo, ma si hanno deformazioni delle particelle.

Certamente se al concetto di deformazione elastica viene collegato un significato geometrico nel senso di una variazione dei raggi degli joni, non bisogna dimenticare che, siccome qui si tratta di raggi di sfere d'azione, essi saranno sempre dipendenti dallo stato fisico degli joni, stato fisico il quale, a sua volta, dipenderà dalle azioni di tutti gli joni circostanti. Per questa loro interdipendenza bisognerà, quindi, al significato di variazione geometrica collegare un significato fisico, da intendersi nel senso di una variazione dello stato fisico degli joni. Conseguentemente anche le bande più o meno larghe, nelle quali si dissolvono i livelli energetici degli joni (atomi) isolati nello spazio quando essi entrano in un reticolo, risentiranno della azione di tutti gli altri joni: è, però, da notare che essi risentiranno anche di più di certe particolari condizioni nelle quali lo jone può venirsi a trovare, nell'interno del reticolo stesso (difetti reticolari).

(3) F. WALLERANT, *Cristallographie*. Paris, Béranger, 1909, pp. 405-409.

(4) H. G. GRIMM u. K. F. HERZFELD, *Ueber Gitterenergie u. Gitterabstand von Mischkristallen*. « Zeit. f. Phys. », XVI (1923), 77.

(5) L. VEGARD, « Physich. Zeit. », 93 (1917); « Zeit f. Phys. », 5 (1921), 17.



Ciò posto e tenendo anche presenti alcune interessantissime ricerche di Smekal<sup>(6)</sup> è, forse, possibile stabilire quale possa essere l'importanza relativa delle due alternative: secondo questo A. le piccole quantità di KCl che possono stare disciolte nel NaCl non hanno nessun effetto sulle proprietà strutturalmente sensibili di quest'ultimo, come avverrebbe senz'altro se il K ingenerasse difetti reticolari.

Diversamente succede, ad esempio, con il  $\text{SrCl}_2$  che può essere pure contenuto in piccola quantità nello stesso NaCl; per quanto lo Sr vi sia atomicamente disperso, esso non vi entra allo stato di cristallo misto, cosicchè ingenera ulteriori difetti reticolari, che agiscono sulle proprietà strutturalmente sensibili, sommando la loro azione con quella dei difetti reticolari ordinari.

Per quanto, qui, la parola difetto abbia piuttosto significato di lacuna reticolare resta sempre il fatto che, non ostante la forte differenza dei raggi ionici fra  $\text{K}^{1+}$  e  $\text{Na}^{1+}$ , il reticolo del NaCl seguita a restare perfettamente normale<sup>(7)</sup>.

D'altra parte i reticoli dei cristalli misti riflettono come reticoli unici, i riflessi non sono mai doppi come se provenissero da due differenti strutture ma singoli come quelli di una sostanza pura e non si ha un loro allargamento od una loro anormale diminuzione di intensità, come farebbe prevedere un calcolo sviluppato da Vergard<sup>(8)</sup> con la supposizione di joni rigidi. Lo stesso Ringdal<sup>(9)</sup>, il quale cercò di applicarlo nel caso dei cristalli misti dei nitrati di Ca, Sr e Ba, ottenne risultati contraddittori, perchè positivi nel caso della coppia Sr-Ba ma negativi in quella Ca-Sr. Il dubbio sul significato dei risultati positivi è, poi, ancora accresciuto dal fatto che, mentre nel sistema Ca-Ba si ha lacuna di miscibilità fra il 10 ed il 55% di Ca, ciò non di meno entro di essa, per quanto i riflessi siano sfumati (anche più che nella coppia Sr-Ba), i parametri della cella che da essi si calcolano seguirebbero la regola dell'addittività di Vegard.

Tutto sommato, visto che difetti reticolari (lacune) vengono esclusi nei cristalli misti dalle ricerche di Smekal, mentre dalle ricerche röntgenografiche vengono esclusi (almeno in modo notevole) i semplici disturbi reticolari (deviazione dei filari dalla rettilinearità) possiamo concludere che è la seconda ipotesi quella che ha, normalmente, la maggiore importanza, ma che, in ogni caso, si ha sicuramente deformazione delle particelle. Del resto è noto che le dimensioni di un jone dipendono anche dal numero di coordinazione che esso presenta, dal tipo di reticolo in cui esso si trova. Così nel passaggio dal tipo Cs Cl al tipo NaCl si ha, negli alogenuri alcalini, una contrazione delle distanze che arriva al 5% e forse più: ciò prova la loro suscettibilità di variare di dimensioni.

(6) A. SMEKAL, *Adsorbtiver Einbau u. Mischkristallbildung*. «Phys. Zeit.», 35 (1934), 643.

(7) Un riassunto un po' esteso di questa questione si trova in PERRIER, *Corso di Mineralogia*. Genova, Bozzi 1946, p. 579 e sgg.

(8) L. VEGARD, «Vidensk. Selsk. Skr.», Oslo, N. 6 (1921), p. 25.

(9) H. TH. RINGDAL, «Zeit. f. Krist.», 82 (1930), 50.

Dalle ricerche di Fajans ed allievi si sa che la costante  $\alpha$  di polarizzabilità di un jone isolato nello spazio muta valore anche quando esso entra in un reticolo ad alta simmetria: ciò significa che lo stato dello jone non è più identico a quello di prima, perchè ogni jone risentirà delle azioni di tutti gli altri. Ma lo stato di un jone in un cristallo misto sarà in condizioni e quindi in stato, per quanto si è detto, ancora un poco diverso da quello in cui esso si trova nei componenti puri, cosicchè reagirà in modo diverso alle azioni esterne; in altri termini, esso presenterà nel cristallo misto proprietà più o meno diverse da quelle che esso presenta nel composto puro: ciò conferma quanto si disse precedentemente.

Come deduzione logica potremo dire che nessuna proprietà potrà essere mai rigorosamente addittiva.

Se una proprietà non è addittiva, se ne può tuttavia calcolare il valore, per un cristallo misto di una data composizione, se si conoscono quelli che *idealmente* i composti puri presenterebbero *in quel momento*.

Questi valori prendono il nome di *grandezze parziali* e siccome in questi casi la variazione delle proprietà è rappresentata da una curva, tali grandezze possono essere o calcolate se si conosce l'equazione di essa, oppure determinate graficamente in base all'intersezione della tangente alla curva nel punto dato con le ordinate agli estremi (composti puri).

Si tenga presente, poi, che queste grandezze parziali non sono specifiche di un corpo in sè e per sè, ma solo *del corpo quando è in quel determinato cristallo misto* e che naturalmente esse variano con il variare della composizione di questo.

Ora l'esperienza insegna che, in pratica, spesso qualche proprietà segue la legge dell'addittività, mentre la maggior parte non la seguono; ciò vuol dire che le prime non ammettono grandezze parziali, le altre sì.

Chiameremo le prime *stechiometricamente insensibili* le seconde *stechiometricamente sensibili*.

È chiaro da quanto si è detto che, *teoricamente*, tutte dovrebbero appartenere al secondo gruppo, se, talvolta, sembrano appartenere al primo, ciò deve dipendere solo dal fatto che noi non sappiamo arrivare a differenziare sperimentalmente i due valori, parziali e normali.

Nei casi di composti a molecole poliatomiche solo pochi atomi contribuiscono alla deformazione complessiva dei leptoni ed in conseguenza certe proprietà, specie quelle geometriche che già passano per le meno sensibili dal punto di vista strutturale, finiranno anche per risultare stechiometricamente insensibili.

Da ciò deriva la frequente validità pratica delle regole di Retgers o di Vegard, che però normalmente falliscono, come risulta dalle ricerche di Bellanca<sup>(10)</sup>, quando i cristalli misti sono formati da corpi con molecola assai semplice.

(10) A. BELLANCA, « Periodico di Mineralogia », X (1939), 3; X (1939), 253; X (1939), 405; « Giornale di Sc. nat. ed economiche di Palermo », XLI (1940), fasc. 2.

Invece, con tutte quelle proprietà per cui i nostri metodi di indagine sono sufficientemente raffinati, noi vediamo che compaiono di regola grandezze parziali, cosicchè esse sono, per lo più, di tipo stechiometricamente sensibile.

Ricorderemo fra queste proprietà la durezza, la resistenza elettrica, le proprietà ottiche in genere, dove, se la regola di Dufet qualche volta fu trovata valida, spesso lo fu non facendo riferimento alla variabile veramente indipendente, la composizione molecolare, oppure in casi nei quali la molecola era assai complessa.

### Geologia. — *L'Abissolittismo*. Nota (\*) del Socio F. SACCO.

Quando, nel lontano 1887, iniziando il rilevamento geologico sommario dell'Appennino ligure-piemontese v'incontrai le « Argille scagliose » sul versante padano e gli Argilloscisti o « Galestri » sul versante tirreno, tutti ofiolitiferi, rimasi alquanto perplesso di fronte ai varî problemi che essi presentano circa la loro età, tettonica, origine, ecc.

Fortunatamente, ben presto l'incontro di rari ma caratteristici fossili (come *Cycadeoidea*, Radiolarie di tipo mesozoico, varî Inocerami, diverse *Hamites*, varie Ammonitidi (*Acanthoceras*, *Desmoceras*, *Pachydiscus*, *Schloembachia*, ecc.); denti di molti Squalidi (determinatimi dal Bassani come cretacei); di parecchi Pticosi, di Itiosauri, ecc. e più tardi resti di *Uinacrinini*, di *Scaphites*, di *Toxoceras*, di *Ancyloceras*, di *Baculites*, di *Turritelites*, ecc. fra detti Argilloscisti ofiolitiferi mi convinsero della loro età cretacea (malgrado che fossero ritenuti generalmente eocenici) a speciale facies: *modeniana* p. p. (Pareto, 1865), *appenninica* (Capellini, 1876) o *infra-liguriana* (Issel, 1887), *fliscioide*, ecc.

Viceversa molti geologi stranieri, specialmente tedeschi, trovando Calpionelle nei calcari argillosi, detti *Alberesi* (Savi, 1845) compresi fra detti argilloscisti e ritenendole fossili-guida del Giura-Cretaceo inferiore (mentre hanno valore essenzialmente batimetrico), li riferirono per lo più al Giurese, essendo così obbligati ad attribuire al Cretaceo i sopraggiacenti tipici e potenti Calcari a fucoidi dell'Eocene (*Liguriano*).

Non tratto della *Tettonica* degli Argilloscisti ofiolitiferi perchè fuori luogo in questa Nota e già l'esaminai nel lavoro sopra *I problemi delle formazioni ofiolitifere delle Alpi e dell'Appennino* (« Boll. Com. geol. it. », LIX, 1934), solo ricordando che, mentre mi risultò dai rilevamenti che l'Appennino è una regione essenzialmente a pieghe di corrugamento, spesso fortemente sollevate od anche rovesciate (come segnai in moltissime *Sezioni geologiche*), i suddetti geologi stranieri l'interpretarono specialmente come una regione a grandi carreggiamenti, anche di centinaia di chilometri di sviluppo, seguiti in tali idee da alcuni geologi italiani.

(\*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1947.



Stabilita l'età cretacea degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino e quindi la loro sottoposizione originaria alla potente serie eocenica a calcari, marne e arenarie (*Macigno*), ciò che, per la loro plasticità, spiega l'intenso corrugamento di questa regione, si presentava il problema della loro *origine*; per la quale si pensava da alcuni, come Mantovani nel 1875, Taramelli nel 1878, ecc., a qualcosa di eruttivo, per esempio grandiosi vulcani di fango, od a sedimenti plutonizzati da azioni idrotermali (Bombicci, 1882), da vapori caldi (Kalkowski), ecc., ciò che ha qualche analogia colla idea delle colonne montanti mineralizzatrici di De Launay (1906) e di Termier (1901).

Ma se esaminiamo gli Argilloscisti in questione, colle loro tinte brune talora, rossiccie, inglobanti calcari a Globigerine e Calpionelle, nonché scisti silicei (Diaspri, Ftaniti) o Radiolariti, sparsi noduli di ossidi di ferro e di manganese, concrezioni baritiche ed aragonitiche o silicee (Spongoniti) ed altri minerali, vi possiamo constatare una grandissima analogia coi depositi batiabissali che si formano ora nelle cosiddette fosse oceaniche (scendenti anche sotto i 4000-9000 e più metri) ed in vaste zone oceaniche assai profonde, colle loro fanghiglie argillose variegate (*Red Mud*, *Red Clay*, *Rotetiefscestone*, ecc.), colle fanghiglie calcaree a Coccoliti (*Globigerina Ooze*, *Abyssal Ooze*) o silicee a Radiolarie, noduli di ossidi di ferro o di manganese, concrezioni baritiche, aragonitiche, con resti di Crinoidi e di Bivalvi, rostri di Cefalopodi, innumerevoli denti di Squalidi, casse timpaniche di Cetacei, ecc.; per cui possiamo dedurre con sicurezza che gli argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino e di tante analoghe regioni della Terra rappresentano depositi batiabissali o eupelagici, dell'epoca cretacea.

Passando dall'Appennino alle Alpi, specialmente Occidentali, vi vediamo apparire vastissime e potentissime formazioni aventi parecchie analogie cogli argilloscisti appenninici, ma con facies metamorfica molto più intensa, cristallina; tanto che per lungo tempo esse furono credute arcaiche (da Sterry Hunt, Gastaldi, Zaccagna, ecc.), mentre che, per i rari fossili ritrovati qua e là, come Radiolarie, resti di Crinoidi (*Pentacrinus*), valve di Grifee, Aptici, Ammonitidi (*Arietites*), Belemniti, ecc. si debbono riferire al Mesozoico medio (essenzialmente al *Lias* l. s.).

Sono formazioni scistoso-cristalline che ricevettero diversi nomi, come: Calcescisti, Calcemicascisti, Schistes lustrés (Lory, 1861), Kalkphyllite, Schistes satinés, Micaliti, Micafilliti, Sericitoscisti, Metascisti, Bundnerschiefer (Erscher e Studer, 1837), Glanzschiefer (Gerlach), Thonschiefer, Cassannaschiefer di Theobald, Berisalschiefer di Schmidt, Grundschiefer, Schieferhülle (p. p.), Glimmerschiefer, Kalkglimmerschiefer e tanti altri Schiefer, che rappresentano una facies speciale del Mesozoico, detta *Zona delle Pietri Verdi* dal Gastaldi (1878), *retica* o *pontina* da Steinmann 1897, *piemontese* da Haug (1909), *pennina* da Argand (1909), *cristallina* da Franchi (1898), ecc. Formazioni variamente micascistose che sono anche comuni altrove come: Athenerschiefer, Teschenschiefer; Giumalshales dell'Asia; Abissiti della Nuova Zelanda; Schisti a Teralita, Californian o Franciscan



Clays, Skaly Clay, ecc., coll'accompagnamento talora di Talcoscisti, di Cloritescisti, di Anfiboloscisti, ecc.; nonchè con minerali di ferro e di manganese, Pirite, Marcassite, Magnetite, concrezioni e noduli silicei, Kiesel-Knolle, Kornstein, Cherts, Flint, Diaspri, Radiolariti, Spongoliti, Ftaniti, persino qualche lente grafitica che, come certi argilloscisti carboniosi ofiolitiferi, potrebbe ricordare le impregnazioni petroleifere delle Argille scagliose.

Tali differenze litomineralogiche dei Calcemicascisti alpini dagli Argilloscisti appenninici, si possono spiegare essenzialmente per differenze di grado nel metamorfismo che negli scisti galestrini è essenzialmente di pietrificazione o cementazione, cioè di indurimento (ciò che denomino Sclerometamorfismo), ma può anche essere idrotermale pneumatolitico che si compie nella Epizona, forse talora con discesa sino alla Mesozona superiore quando si giunge ai micascisti gneissici; aggiundovisi anche un dinamometamorfismo<sup>(1)</sup> più prolungato e più intenso che dalla semplice scistosità (per esempio delle ardesie, dei galestri, perfino delle filladi) porta alla laminazione, per esempio dei Micascisti in generale e perfino degli Gneiss e delle rocce endogene (Serpentinoscisti, Gabbroscisti, Prasiniti, ecc.) che vi sono collegate, connesse e talora interstratificate.

Ma, tenuto conto di detta intensa azione metamorfica, anche questi Scisti cristallini con Pietre Verdi si possono considerare come originati da depositi batiabissali. Ciò può anche ripetersi per terreni analoghi più antichi, come indicai in un lavoro speciale sulla *Origine abissale di gran parte dei terreni arcaici* («Mem. Soc. geol. ital.», vol. I, 1931), al quale rimando, solo accennando che invece di *abissale* un po' ristretto sarebbe forse meglio usare il termine, più comprensivo, di bati-abissale e che i loro depositi sono forse meno estesi nell'Arcaico che nel Mesozoico, per il più grande sviluppo allora delle formazioni sialiche sovrapposte alle simiche.

Se poi passiamo dai terreni sedimentari a quelli endogeni vediamo analogie e differenze consimili a quelle sovraccennate. A parte l'idea assurda di emersioni di rocce verdi antiche attraverso ad argilloscisti più giovani (ciò che spostava, ma non scioglieva il problema), riconosciuta l'erroneità dell'idea dell'origine di tali rocce da depositi molto magnesiaci (Serry Hunt) o da azioni consimili (Bombicci, 1882), si dovette ammetterne invece l'origine endogena; cioè le Ofoliti appenniniche (Diabasi, Epidiabasi, Lherzoliti o Peridotiti, Metabasalti, Serpentine, Gabbri [Eufotidi] e tufi vari, col loro ricco corteo minerario) mentre sono analoghe da una parte alle Pietre Verdi o Grundstein, alpine (solo che fra queste per ulteriore metamorfismo termo-idrico-pneumatolitico dell'epizona compaiono

(1) Prove del dinamorfismo, oltre che negli intensi, grandiosi e ripetuti corrugamenti, veggonsi in dettaglio nelle mille contorsioni d'ogni genere e, specialmente bene (nelle Argille scagliose) nella frantumazione caotica che compare particolarmente tra le formazioni sedimentarie e quelle compatte litoidi endogene; fenomeni che ricevettero varie espressive denominazioni, come: a torrone, a trucioli, lardellati, farciti, breccie, *mörtelstruktur*, ecc., rappresentanti della nota struttura cataclastica, milonitica, ecc. che osservasi anche al microscopio nelle rocce cristalline.

anche Prasiniti anfiboliche, epidotiche, cloritiche, Eclogiti, Glaucofaniti, nonché maggior ricchezza mineralogica e metallifera [di tipo ferrifero, ramifero e cromonichelifero] e maggior laminazione per maggior dinamometamorfismo, d'altra parte presentano pure analogie con rocce basaltoidi, simiche endogene recenti come Basalti, spesso olivinici, Basaniti, Limburgiti, Ankaramiti, Oceaniti, Diabasi ontiche od oliviniche, Gabbri a Nefelina o Teraliti, ecc.) con tufi basici spesso palagonitizzati.

Alcune di queste formazioni basiche attuali compaiono bensì talora attraverso la crosta sialica della Terra, per profonde fratture (come ad esempio le gigantesche espansioni basaltiche dell'Abissinia, fuoriuscite attraverso le grandiose paraclasi dell'Africa orientale o, un po' analogamente, in piccola scala, nelle penetrazioni delle argille scagliose attraverso il *Masigno* dell'alta Val Tiberina, quasi per una specie di diapirismo, ma più ampiamente e comunemente esse si sviluppano nelle maggiori profondità e nelle sinclinali degli Oceani, salvo poi a sollevarsi come « la Catena medio-atlantica » (Atti Acc. Sc. Torino, 75, 1940) ed infine emergere come le catene alpino-appenniniche. Per i successivi diastrofismi le formazioni litoidi basiche e loro diramazioni vennero spesso spostate, trascinate, stirate, fratturate, sparpagliate, ecc., ciò che spiega certi loro fenomeni di dispersione, nonché di breccie e simili assai caratteristiche.

Purtroppo i fenomeni che si verificano in questa attuale endogenia di profondità ci rimangono, per la loro ubicazione, in parte ignoti; ma li possiamo, in parte almeno, riconoscere, per i tempi passati, esaminandone il loro modo di presentarsi per quanto metamorfosati, pietrificati e tettonicamente tormentati in vari terreni delle regioni oggi emerse, cioè in quel complesso di fenomeni che si possono denominare di *Abissolittismo*, *Laccolittismo*, o delle *Laccoliti* (l. s. di Gilbert con tante variazioni che ricevettero il nome di *Bismoliti* Idding, *Sfenoliti* Filippi, *Lopoliti* Grout, *Facoliti* Harker, *Abissoliti* in genere Daly, 1933, nonché perfino di *Filonistrati*, *Filoniletti*, *Ribbons*, ecc., quando dette rocce endogene si presentano intercalate, anche per chilometri, fra i terreni sedimentari, come verificasi, per esempio, presso Voltaggio, Carrodano, Rezoaglio, Ottone, ecc., nell'Appennino; alla Grivola, alla Tersiva, presso Alagna, ecc., nelle Alpi. In questi casi, invece di intrusioni fra i terreni sedimentari è probabile trattarsi piuttosto di estrusioni simiche estese largamente in fondo al mare e poi coperte da successive sedimentazioni, anche in più riprese successive. L'enorme sviluppo della serpentinnizzazione (cioè idratazione) di parte notevole delle sovraccennate formazioni basiche del Mesozoico (per esempio nel Gruppo di Voltri) potrebbe far pensare, piuttosto che a vapori caldi connessi col magma originario, alle prementi masse acquie oceaniche sovraincombenti alle masse simiche extravasate, sui fondi batibassali e facilitandone l'idratazione.

Esempi di vere intrusioni di argille scagliose fra i terreni sedimentari li vediamo nelle marne plioceniche di alcune regioni subappennine dell'Emilia.

I centri di queste grandi protrusioni ed espansioni simiche possono essere segnati dai maggiori ammassi ofiolitici o di Pietre Verdi, come per esempio il M. Ajona, il M. Penna, il M. Buc, il M. Ragola, la Garfagnana, ecc., nell'Appennino, il gruppo di Voltri, il Monviso, le basse Valli di Lanzo, la media Valle d'Aosta, il Gran Pilastro, ecc., nelle Alpi.

La mancanza quasi completa di fenomeni di contatto fra i terreni sedimentari e le inglobate rocce endogene ne indicano la temperatura originaria non molta alta.

Concludendo, i problemi che si affacciarono agli studiosi circa l'età e l'origine degli argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino e degli Scisti cristallini con Pietre Verdi delle Alpi poterono essere sciolti coll'aiuto dei rari fossili, del metamorfismo e dell'abissolittismo o laccolittismo.

Inoltre l'esame di formazioni analoghe in altre regioni della Terra, se ben riconosciute essere di detto tipo abissolitico, potrà servire per segnare le fosse geosinclinaliche verificatesi nelle epoche geologiche trascorse, specialmente nel Mesozoico, giacchè nelle Ere primaria ed arcaica l'abissolittismo fu forse meno accentuato che non nell'Era mesozoica.

**Geologia.** — *Ancora dell'età del macigno.* Nota (\*) del Socio G. ROVERETO.

È di attualità trattare dell'età del macigno dell'Appennino. Per contribuire, sia pure in piccola parte, alla soluzione del problema, ripeto qui alcune constatazioni tratte dalle mie osservazioni fatte in Liguria, e che non si conciliano con quelle degli altri autori.

Innanzitutto bisogna ripetere che non si tratta di un macigno di una sola età, ma di parecchie: il più antico è il *pseudomacigno*, dai nostri posto in serie con le rocce del verrucano, dagli stranieri considerato pertinente (nella regione delle Alpi Apuane e del Promontorio Orientale del Golfo della Spezia) all'eocene, e formante la base di una falda secondaria, in facioide; bisogna però dire che l'esistenza di questa facioide è molto problematica.

Nel Promontorio Occidentale dello stesso Golfo della Spezia, è esteso il notissimo macigno eocenico, che nella regione contermina ha nummuliti dell'eocene medio, e forse qualcuna dell'eocene inferiore, che posa sulla scaglia senoniana, ed è a sua volta ricoperto dalla falda a scisti argillosi e ofiolitiferi o ligure-toscana, in prevalenza cretacea: è quindi un macigno eocenico, con base cretacea, affiorante da finestre.

Intercalati fra il macigno e gli scisti della falda ligure-toscana, esistono ancora, sempre nell'Appennino Ligure Orientale, dei calcari del luteziano superiore, che sono nummulitiferi a M. Carevolo e a M. Pennice, i quali viemmeglio stabiliscono l'età del macigno spezzino, e di quello affiorante

\* Presentata nella seduta del 13 dicembre 1947.



in Val Gordana-Taro e in Val d'Aveto-Trebbia. In essi, come nel classico nummulitico di La Mortola, di lepidocicline non vi è traccia.

Al di sopra della falda ligure-toscana, compresi nella serie che ho distinta come neoautoctona, esistono altri due livelli di macigno, che sono lateralmente sostituiti, e superiormente ricoperti, da altri scisti argillosi. Il giacimento più notevole dell'uno è quello di M. Ramaceto, che posa a sua volta sulla scaglia vinata, e dell'altro è quello di M. Caucaso, compreso per intero negli scisti argillosi.

Sopra gli scisti argillosi vi è un terzo livello di scaglia, ed un quarto e limitato livello di macigno, che sono sottostanti ai calcari marnosi a fucoidi ed elmintoidee dei Monti di Genova e dell'Antola, pur essi considerati da me neoautoctoni, e che sono l'ultimo termine della serie eocenica delle due Riviere; al di sopra, a grande discordanza, succede l'oligocene.

Questo oligocene è per gran parte costituito da materiali sciolti, o appena costipati, raramente cementati, anzi nell'area ligure conosco un unico esempio di una cementazione originante un vero macigno, che è quello delle cave di Vicoforte, dalle quali è stato tratto il materiale che riveste le basi del grande Santuario omonimo. Tale eccezionale macigno è compreso in un insieme di sabbioni silicei, pertinenti all'oligocene superiore, distesi lungo tutto il piede settentrionale delle Alpi Liguri, benchè non siano rappresentati nella Carta Geologica.

All'altro estremo dei Monti Liguri, presso il Passo della Cisa, che divide l'Appennino Ligure Orientale dall'Appennino Lunigianese, esiste il grande accumulo oligocenico di M. Barigazzo, che, come il restante dell'oligocene ligure, non prende parte alle vere pieghe della catena, e la cui serie litologica non ha tracce di quel semimetamorfismo che si osserva nei vari macigni dell'eocene ligure, i quali nell'oligocene sono sostituiti da mollasse e da conglomerati. Ma dalla vetta del Barigazzo, guardando verso oriente, si scorge la grande pila di macigno dei Monti della Lunigiana, ampiamente piegata, pila che oggi si riconferma oligocenica; quindi, il Passo della Cisa sta fra due condizioni orogenetiche: l'una, quella dell'area ligure, che è terminata prima dell'oligocene, con una fase parossismica; l'altra, quella dell'area lunigianese, che si è continuata, o ripresa, posteriormente all'oligocene superiore (cattiano), come orogenesi attenuata od epirogenesi. Ed essendo relativamente recente, questa epirogenesi ha un'influenza morfologica diretta, e il suo più alto inarcamento corrisponde allo spartiacque appenninico, e se per la parte mediana della catena si arresta al Passo della Cisa, si continua però lateralmente, lungo il versante settentrionale dell'Appennino Ligure Orientale, sino al Vogherese, come si riconosce da lembi oligocenici sparsi qua e là, e compresi in sinclinali secondari.

Il riferimento di questo macigno dell'Alta Lunigiana all'oligocene, anzi al cattiano, è basata sulla presenza di lepidocicline, che chi vuole continuare nel vecchio ordinamento dice rimaneggiate, oppure prive di valore cronologico.

Ora bisogna mettere avanti questo fatto, che l'oligocene ligure presenta la più interessante serie di lepidocicline, in varia associazione con nummu-



liti, che sino ad ora sia stata segnalata; ed è questa serie, e non altre di regioni lontane, che deve valere per lo studio dei terreni appenninici.

I particolari sono i seguenti (ricordo fra parentesi le località più tipiche e più facilmente accessibili; le determinazioni delle specie sono del Prever):

*Aquitano*: arenarie di Bric del Cavallo presso Millesimo, con *Lepidocyclus dilatata*, *L. Mantelli*.

*Cattiano*: arenarie dei dintorni di Pareto, con *L. Morgani*, *L. Ciofaloi*, *L. Chaperi* e senza nummuliti.

*Rupeliano superiore*: facies continentali e semicontinentali, prive quindi di rizopodi.

*Rupeliano inferiore*: sabbioni e conglomerati, con grandi lepidocicline (*L. Schlumbergeri*, *L. Chaperi*, *L. dilatata*, *L. Galli*, *L. Mantelli*) a Molere, tanto abbondanti da formare un sabbione da per loro: rare e piccole nummuliti della coppia *Nummulites intermedius-Fichteli*.

*Lattorfiano superiore*: sabbioni, conglomerati, frangenti corallini con rare e piccole lepidocicline (*L. Morgani*, *L. himerensis*, *L. planulata*) e frequentissime nummuliti della coppia *N. intermedius-Fichteli* del cimitero di Mioglia; *L. sumatrensis*, *L. Verbeeki*, *L. Schlumbergeri*, *L. Ciofaloi* del Rio degli Zunini presso Sassello. Numerose le località con nummuliti della coppia di cui sopra, senza lepidocicline.

*Lattorfiano inferiore*: facies continentali e semicontinentali, senza rizopodi: mollasse di Dego, Santa Giustina e altrove, con filliti.

Le distinzioni di questi diversi piani sono basate, più che sulle lepidocicline, sui molluschi e sulla successione stratigrafica. Ma tutto ciò ci insegna che dove il macigno dell'Appennino contiene lepidocicline, insieme a nummuliti eoceniche, si ha una fauna rimaneggiata, che può essere di un qualsiasi piano dell'oligocene, oppure del miocene inferiore, dato che le diverse specie di lepidocicline non valgono a caratterizzare i diversi sottopiani. Dove si hanno solo delle lepidocicline, con tutta probabilità si tratta di oligocene superiore (cattiano), oppure di miocene inferiore (aquitano).

Se pur fosse che per altre regioni le lepidocicline sono anche eoceniche, ciò per l'area ligure non è vero: l'associazione di esse con nummuliti eoceniche avviene in terreni che sono il risultato di una regressione, di origine nettamente epirogenetica, su di un zoccolo di piegamento alpino. Ed è questa regressione che ha mischiato le nummuliti da essa liberate, con le lepidocicline di comparsa ad essa contemporanea.

Di tutto ciò è oggi tipico esempio quello che avviene sulle coste delle Fiandre, dove lo scalzamento marino di una falesia a rocce eoceniche a nummuliti passa queste ai depositi attualmente in formazione (cfr. *Leriche M.* in «Ann. Soc. Géol. Belgique», vol. LVIII, 1935, pp. 173, 182).

Ripeto, come conclusione, che in Liguria abbiamo, non considerandoci il pseudomacigno, quattro livelli di macigno eocenico, un caso di macigno oligocenico, più casi di arenarie e mollasse oligoceniche ed aquitaniane. È da presumersi che nel restante dell'area appenninica si ripetano le stesse consistenze.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: considerazioni preliminari.* Nota <sup>(\*)</sup> di G. SCORZA DRAGONI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

In questa Nota, e in tre successive, mi propongo di concludere le ricerche, che ho dedicate ad ampliare la portata di una proposizione di v. KERÉKJÁRTÓ sulle traslazioni piane generalizzate <sup>(1)</sup>.

Sull'argomento io ho già indicato un risultato, che può considerarsi come definitivo <sup>(2)</sup>, o quasi <sup>(3)</sup>; tant'è vero che il teorema enunciato in questa Nota è, volendo, una conseguenza di quellò dimostrato nella Memoria ora citata.

E, come conseguenza, si tratterebbe di una conseguenza presso che immediata. Ma quel teorema di M. I) è, concettualmente, difficile e la sua dimostrazione è lunga e laboriosa; mentre lo scopo, che mi propongo, è appunto quello di indicare un teorema equivalente <sup>(4)</sup> dal punto di vista applicativo, ma più semplice come enunciato e più rapido come dimostrazione. Epperò in questa Nota e nelle successive io mi avvarrò, sì, di alcuni dei risultati parziali di M. I), ma non di quello centrale.

In questa Nota pongo il problema e sviluppò alcune considerazioni di carattere generale; nelle rimanenti indicherò alcune proposizioni preliminari e una soluzione. Naturalmente le coincidenze con M. I) sono numerose e notevoli. Quando esse si presenteranno a proposito di dimostrazioni, queste verranno di massima sopresse. Ma i dati di fatto, necessari per l'intelligenza della linea direttiva della ricerca, saranno riesposti in tutti i dettagli, anche a costo di coincidenze letterali con passi di M. I), o di altri miei lavori precedenti.

I. NOZIONI PRELIMINARI. — L'ambiente sia un piano, reale ed euclideo  $\pi$ . E sia  $t$  una traslazione generalizzata di  $\pi$ ;  $t$  sia cioè un autoomeomorfismo di  $\pi$ , conservi il senso delle rotazioni e non lasci punti invariati.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1947.

(1) B. v. KERÉKJÁRTÓ, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré*. [« Acta litterarum ac scientiarum regiae Universitatis hungaricae Francisci-Josephinae », to. IV (1928), pp. 86-102], pp. 94-96.

(2) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate e sua maggiore determinazione* [in corso di stampa nei « Rendiconti del Seminario matematico di Padova »] n. 5.

Nel seguito questa Memoria sarà ricordata con la sigla M. I).

(3) Dico quasi, perchè io non ho trasportato al caso generale tutte le circostanze rilevate da v. KERÉKJÁRTÓ nel suo caso, quello dei segmenti di traslazione. Veramente la circostanza non trasportata è, direi, una soltanto, quella legata, in loc. cit. (2), p. 95, ai numeri  $\varepsilon_n$  ed  $\eta_n$ .

(4) Almeno, lo presumo tale.

Una curva semplice e aperta,  $\lambda$ , di  $\pi$ , è un *arco di traslazione* (di  $t$ ) se  $\lambda$  e la propria immagine,  $t(\lambda)$ , hanno comune soltanto un punto, estremo sia per  $\lambda$  che per  $t(\lambda)$ <sup>(5)</sup>. Se  $L$  è questo punto,  $t^{-1}(L)$  è l'altro estremo di  $\lambda$ ;  $L$  è individuato, non appena dato  $\lambda$ , e quindi  $t^{-1}(L)$  lo è del pari;  $t^{-1}(L)$  è l'*origine* ed  $L$  il *termine* di  $\lambda$ . Il verso *positivo* di  $\lambda$  è quello, che porta dall'origine al termine.

Se  $\lambda$  è un arco di traslazione di  $t$ , le immagini di  $\lambda$  nelle successive potenze di  $t$  costituiscono una linea, che verrà indicata con  $\sigma(\lambda)$  e che sarà detta la *traiettoria* generata da  $\lambda$ . Una traiettoria  $\sigma(\lambda)$  è notoriamente omeomorfa ad una retta<sup>(6)</sup>; ed individua (in  $\pi$ ) due insiemi aperti e (semplicemente) connessi, i *campi adiacenti* a  $\sigma(\lambda)$ , costituiti dai punti che non appartengono a  $\sigma(\lambda)$  e che possono essere congiunti con un punto di  $\sigma(\lambda)$  mediante una curva, semplice e aperta, che abbia soltanto un punto, anzi un estremo, su  $\sigma(\lambda)$ .

2. Un arco di traslazione di  $t$  è un arco elementare di traslazione, se esso si riduce a una spezzata:

$$(1) \quad \lambda = Q_0 Q_1 + \dots + Q_{n-1} Q_n$$

ale, che (se  $n > 1$ )  $Q_0 Q_1$  sia normale a  $Q_1 Q_2, \dots, Q_{n-2} Q_{n-1}$ , a  $Q_{n-1} Q_n$ . E allora i segmenti (non nulli)  $Q_0 Q_1, \dots, Q_{n-1} Q_n$  sono i *lati*, mentre (se  $n > 1$ ) i punti  $Q_1, \dots, Q_{n-1}$  sono i *vertici* di  $\lambda$ . E ancora: se  $n \geq 2$ , i segmenti  $Q_0 Q_1$  e  $Q_{n-1} Q_n$  sono i *lati estremi* di  $\lambda$ ; se  $n > 2$ , la spezzata  $Q_1 Q_2 + \dots + Q_{n-2} Q_{n-1}$ , estremi  $Q_1$  e  $Q_{n-1}$  inclusi, è il *nucleo* di  $\lambda$ ; se  $n = 2$ , il *nucleo* di  $\lambda$  si riduce al punto  $Q_1$ .

Se l'arco elementare di traslazione  $\lambda$  è dato dalla (1), noi converremo sempre di avere scelto i simboli in modo che sia  $Q_n = t(Q_0)$ ; questa convenzione individua  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}$  e  $Q_n$ .

Si supponga ora che  $\Sigma(\lambda)$  sia uno dei due campi adiacenti a  $\sigma(\lambda)$ . E sia  $Q_i$  un vertice di  $\lambda$  (di guisa che  $n > i > 0$ ). Allora i punti interni all'angolo retto  $\overline{Q_{i-1} Q_i Q_{i+1}}$ , e sufficientemente prossimi a  $Q_i$ , sono o tutti interni, o tutti esterni a  $\Sigma(\lambda)$ : in corrispondenza,  $Q_i$  è di *prima* o di *seconda categoria* rispetto a  $\Sigma(\lambda)$ .

(5) Per maggiori dettagli rimando alle mie due Memorie, indicate nel seguito, rispettivamente; con M. II) e M. III): *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane*. [Memorie della R. Accademia d'Italia]; vol. IV (1933), pp. 159-212; § 2]; *Una estensione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré*. [Ibidem, pp. 213-269; § 2].

(6) Il risultato è di BROUWER. Una esposizione sistematica dei risultati di BROUWER sulle traiettorie di una traslazione piana generalizzata si può anche desumere dai seguenti lavori, il primo dei quali nel seguito verrà ricordato con M. IV): G. SCORZA DRAGONI, *Criteri per l'esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni*. [«Annali di matematica pura ed applicata», serie IV, tomo XXV (1946), pp. 43-65]; S. GHEZZO, *Sulla teoria delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata* [in corso di stampa nei Rendiconti del Seminario matematico di Padova]; G. TREVISAN, *Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata*. [Questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. III (1947), pp. 199-203].

3. Una curva semplice e aperta  $\tau$ , di estremi A e B, è uno *pseudoarco di traslazione di prima specie*, di origine A, se

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau \cdot t^{-1}(A) = 0 \quad , \quad \tau \cdot t(A) = 0 \quad , \\ \tau \cdot t(B) + \tau \cdot t^{-1}(B) \neq 0 \quad , \\ (\tau - B) \cdot t(\tau - B) = 0 \quad . \end{array} \right.$$

Come conseguenza delle (2) si riconosce [cfr. M. II), § 5] che  $\tau$ , se contiene  $t(B)$ , non può contenere  $t^{-1}(B)$ ; e viceversa. Nel primo caso  $t(B)$  è interno a  $\tau$ , e il sottarco di  $\tau$  di estremi B e  $t(B)$  è l'*unico* arco di traslazione contenuto in  $\tau$ ; analogamente per  $t^{-1}(B)$ , nel secondo caso.

4. Sia  $\lambda = Q_0 Q_1 + \dots + Q_{n-1} Q_n$  un arco elementare di traslazione, coi vertici in  $Q_1, \dots, Q_{n-1}$  (se  $n > 1$ );  $\Sigma(\lambda)$  uno dei campi adiacenti a  $\sigma(\lambda)$ .

Un segmento  $\tau = RT$  è un segmento *fondamentale*, relativo a  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , di origine R, se  $\tau$  è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine R, normale in R ad un lato di  $\lambda$  e se sono verificate le relazioni

$$R \subset \lambda - (Q_0 + Q_n) \quad , \quad \tau - R \subset \Sigma(\lambda) \quad .$$

Una semiretta  $r$ , di origine R, è un raggio *fondamentale*, relativo a  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , di origine R, se  $r$  è normale in R a un lato di  $\lambda$  e se sono verificate le relazioni

$$r \cdot t(r) = 0 \quad , \quad R \subset \lambda - (Q_0 + Q_n) \quad , \quad r - R \subset \Sigma(\lambda) \quad .$$

Un punto di  $\lambda$ , origine di un raggio o di un segmento *fondamentale* per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , è un punto *fondamentale* relativo a  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ .

Una spezzata

$$\psi = RU + UV \quad ,$$

di due lati (non nulli) ortogonali fra di loro, è una spezzata *metafondamentale* relativa a  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , di origine R, se  $\psi$  è intanto uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine R; se sono verificate le relazioni

$$R \subset \lambda - (Q_0 + Q_n) \quad , \quad \psi - R \subset \Sigma(\lambda) \quad ;$$

e, finalmente, se RU è normale in R ad un lato di  $\lambda$ , mentre non ha punti comuni con l'arco di traslazione contenuto in  $\psi$  (il quale arco di traslazione si riduce quindi a un segmento, che ha come estremi V e un punto interno ad UV).

Una semilinea

$$\omega = RU + u \quad ,$$

dove RU è un segmento non nullo ed  $u$  una semiretta di origine U e normale ad RU, è una semilinea *metafondamentale*, relativa a  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , di origine R, se RU è normale in R ad un lato di  $\lambda$  e se sono soddisfatte le relazioni

$$\omega \cdot t(\omega) = 0 \quad , \quad R \subset \lambda - (Q_0 + Q_n) \quad , \quad \omega - R \subset \Sigma(\lambda) \quad .$$



L'origine di una spezzata o di una semilinea metafondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , è un punto *metafondamentale* relativo a  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ .

5. IL TEOREMA FONDAMENTALE NELLA SUA NUOVA FORMULAZIONE. — Ormai possiamo enunciare il risultato precipuo di questa ricerca, nel modo che segue:

*Se  $\lambda$  è per  $t$  un arco elementare di traslazione e  $\Sigma(\lambda)$  un campo adiacente a  $\sigma(\lambda)$ ,  $\lambda$  contiene punti o fondamentali o metafondamentali per  $\Sigma(\lambda)$ .*

Le due alternative non si escludono a vicenda. E si può dimostrare pure che:

*Nelle ipotesi precedenti, esistono punti, fondamentali o metafondamentali per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , diversi dai (possibili) vertici di  $\lambda$ ;*

mentre è evidente che:

*Nelle stesse ipotesi, un vertice di  $\lambda$ , di prima categoria rispetto a  $\Sigma(\lambda)$ , non può essere per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$  nè fondamentale, nè metafondamentale;*

risultato analogo alla proposizione D) del n. 6 di M. I).

6. MAGGIORE DETERMINAZIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE. — Sia un arco elementare di traslazione con  $n$  lati;  $\Sigma(\lambda)$  uno dei campi adiacenti a  $\sigma(\lambda)$ ;  $m$  il numero dei vertici di  $\lambda$  di seconda categoria rispetto a  $\Sigma(\lambda)$ .

Se  $n = 1$ , e quindi  $m = 0$ , il teorema fondamentale è già noto (cfr. loc. cit.<sup>(1)</sup> e M. II), § 9].

Ebbene, se  $m = 0$ , noi dimostreremo la validità del teorema fondamentale, facendo vedere che:

*se  $n = 2$  (e  $m = 0$ ), ogni lato di  $\lambda$  contiene (nell'interno) punti fondamentali per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ ;*

che

*se  $n \geq 3$  (e  $m = 0$ ), il nucleo di  $\lambda$  contiene (nell'interno) almeno un punto o fondamentale o metafondamentale per  $\Sigma(\lambda)$ .*

E, tolti i primi quattro valori di  $n$ , noi ragioneremo per induzione completa.

7. Una volta dimostrato il teorema fondamentale con  $n$  qualunque ed  $m$  nullo, per esaurire il caso  $m > 0$  si può applicare di nuovo il principio di induzione completa. Ma anche adesso il ragionamento è tale, che, per concludere, bisogna dimostrare qualcosa di più di quello strettamente chiesto.

Precisamente noi vedremo che:

*Se  $m$  non si annulla, o uno dei lati estremi di  $\lambda$  contiene (nell'interno) un punto fondamentale per  $\Sigma(\lambda)$ ; oppure il nucleo di  $\lambda$  contiene un punto o fondamentale o metafondamentale per  $\Sigma(\lambda)$ ;*

ioè, o  $\lambda$  contiene un punto fondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , oppure il nucleo di  $\lambda$  ne contiene uno, metafondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ . Anzi noi dimostreremo più precisamente che:

Se  $Q_1$  è di prima categoria per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , o il nucleo di  $\lambda$  contiene punti metafondamentali per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , o la spezzata  $Q_1 Q_2 + \dots + Q_{n-1} Q_n$  contiene punti fondamentali per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ ;

e quindi, mediante lo scambio degli uffici di  $t$  e  $t^{-1}$ , che:

Se  $Q_{n-1}$  è di prima categoria per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , o il nucleo di  $\lambda$  contiene punti metafondamentali per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , o la spezzata  $Q_0 Q_1 + \dots + Q_{n-2} Q_{n-1}$  ne contiene di fondamentali.

Naturalmente le alternative contemplate non si escludono a vicenda.

Un'ultima osservazione.

Se si vuole non è difficile riconoscere che le dimostrazioni delle Note successive si possono atteggiare in maniera, da associare a  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$  un segmento o un raggio fondamentali, oppure una spezzata o una semilinea metafondamentali; e ciò secondo una legge di scelta fissata esplicitamente. E si può anche soddisfare a questa condizione, e imporre a quel segmento, o raggio, o spezzata, o semilinea, di non avere un vertice di  $\lambda$  come origine.

**Matematica.** — *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: proposizioni preliminari.* Nota (\*) di G. SCORZA DRAGONI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Questa Nota costituisce la continuazione della *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: considerazioni preliminari*, pubblicata in questi « Rendiconti » e ricordata in seguito con la sigla N. I). Essa mantiene, naturalmente, la terminologia e i simboli di N. I) ed è dedicata ai preparativi per le dimostrazioni dei teoremi in N. I) enunciatì.

**1. PRIMI TEOREMI SULLE TRAIETTORIE DI UNA TRASLAZIONE PIANA GENERALIZZATA  $t$ .** — In tutta la ricerca avremo spesso bisogno di rammentare che:

I). Una curva semplice e aperta  $c$  taglia la propria immagine,  $t(c)$ , nella  $t$ , se esiste un arco di traslazione  $\lambda$  di  $t$  tale, da aversi  $c \cdot t^*(\lambda) \neq 0$ ,  $c \cdot t^*(\lambda) = 0$ ,  $c \cdot t^*(\lambda) \neq 0$ ,  $x, y$  e  $z$  essendo tre opportuni interi relativi soddisfacenti alle  $x < y, y < z$ .

Per una dimostrazione di questo importante teorema di Brouwer rimando al § 6 di M. IV) (1).

Da I) segue subito che:

(\*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1947.

(1) Per le differenze formali dell'enunciato, si confronti: G. SCORZA DRAGONI, *Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo piano*. [Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. I (1946), pp. 156-161, prefazione e n. 9.

II). Se  $\lambda$  è un arco di traslazione (di  $t$ ) e la curva semplice e aperta  $c$ , di estremi  $A$  e  $B$ , non taglia  $t(c)$  e soddisfa alle  $\lambda \cdot c \neq \emptyset$ ,  $[t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)] \cdot c \subset A + B$ , risulta  $\sigma(\lambda) \cdot c = [t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)] \cdot c$ .

2. Inoltre è del pari noto che:

III). Se  $\lambda$  è un arco di traslazione (di  $t$ ), le due semilinee  $\sigma_i(\lambda) = t^{-1}(\lambda) \dot{+} t^{-2}(\lambda) \dot{+} \dots$  e  $\sigma_f(\lambda) = t(\lambda) \dot{+} t^2(\lambda) \dot{+} \dots$  sono entrambe illimitate; quindi:

IV). Se  $\lambda$  è un arco di traslazione (di  $t$ ) e la curva semplice e aperta  $c$  ha soltanto gli estremi  $A$  e  $B$  su  $\sigma(\lambda)$ , la curva semplice e chiusa  $j$ , individuata da  $c$  e dall'arco  $\alpha$  di  $\sigma(\lambda)$  di estremi  $A$  e  $B$ , non separa dall'infinito nessun punto di  $\sigma(\lambda)$ .

Di qui, e dalla definizione stessa di campi adiacenti ad una traiettoria, è facile dedurre che:

V). Fermo le ipotesi e le notazioni di IV), detto  $J$  l'insieme, chiuso e limitato, racchiuso da  $j$ , i punti di  $J - \alpha$  appartengono tutti ad uno stesso campo adiacente a  $\sigma(\lambda)$ .

Per tutti questi teoremi si veda anche M. I), n. 10. Invece nel n. 11 di M. I) [se ne veda il lemma VIII)] è dimostrato che:

VI). Se  $\lambda$  e  $c$  soddisfanno alle ipotesi di II), con  $[t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)] \cdot c = A + B$  al posto della  $[t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)] \cdot c \subset A + B$ , di guisa che esiste l'insieme  $J$  considerato nella proposizione V), e ciò a norma della II) stessa, risulta  $J \cdot t(J) = c \cdot t(c)$ .

3. ALTRI LEMMI. — E ancora, nel n. 12 di M. I) [se ne vedano i lemmi IX) e X)] è dimostrato che:

VII). Se  $\lambda$  e  $\nu$  sono due archi di traslazione (di  $t$ ), con  $\lambda \cdot \nu \neq \emptyset$ , e se  $\nu$  è contenuto nella somma di  $\sigma(\lambda)$  e di uno,  $\Sigma(\lambda)$ , dei due campi adiacenti a  $\sigma(\lambda)$ , uno,  $\Sigma(\nu)$ , dei due campi adiacenti a  $\sigma(\nu)$  è contenuto in  $\Sigma(\lambda)$ , mentre l'altro,  $\Sigma'(\nu)$ , contiene  $\sigma(\lambda) - \sigma(\lambda) \cdot \sigma(\nu)$ ; di guisa che  $\lambda$  è contenuto in  $\sigma(\nu) \dot{+} \Sigma'(\nu)$  e (quindi) uno,  $\Sigma'(\lambda)$ , dei campi adiacenti a  $\sigma(\lambda)$  è contenuto in  $\Sigma'(\nu)$ ; — mentre  $\Sigma(\lambda)$  contiene  $\sigma(\nu) - \sigma(\nu) \cdot \sigma(\lambda)$ .

e che:

VIII). Se  $\lambda$  è un arco di traslazione (di  $t$ ) e  $c$  è una curva semplice e aperta, di estremi  $A$  e  $B$ , con  $c \cdot t(c) \subset B$ ,  $\lambda \cdot c = [t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)] \cdot c = A + B$ , detto  $\alpha$  l'arco di  $\lambda$  di estremi  $A$  e  $B$  e posto  $\nu = (\lambda - \alpha) + c$ , la curva semplice e aperta  $\nu$  è (per  $t$ ) un arco di traslazione;

mentre nel n. 11 di M. III) <sup>(2)</sup> è implicito che:

IX). Nella proposizione VII), le ipotesi  $\lambda \cdot \nu \neq \emptyset$ ,  $\nu \subset \sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$  possono essere sostituite da quelle, che  $\nu$  sia l'arco di traslazione di uno pseudoarco di traslazione,  $\tau$ , di prima specie, avente l'origine su  $\sigma(\lambda)$  e contenuto, a meno dell'origine, in  $\Sigma(\lambda)$ ; allora  $\Sigma'(\nu)$  contiene anche tutti i punti di  $\tau - \nu$ .

(2) Si veggano anche i nn. 13 e 14 della stessa M. III.

4. CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA DI SEGMENTI O RAGGI FONDAMENTALI. - Premettiamo che

da questo momento in poi,  $\lambda$  e  $\nu$  sono sempre archi elementari di traslazione per la  $t$ , mentre  $\Sigma \lambda$  è uno dei due campi adiacenti a  $\sigma(\lambda)$ .

Allora:

X. Il segmento  $s = KA$  contiene un segmento fondamentale, relativo a  $\lambda \in \Sigma \lambda$ , di origine  $K$ , se  $K$  è interno a  $\lambda$ ,  $s$  è, in  $K$ , normale a un lato di  $\lambda$  e, nel partire da  $K$ , si rivolge verso  $\Sigma \lambda$ ;  $s \cdot t(s)$  contiene punti simultaneamente interni ad  $s$  e  $t(s)$ , mentre è  $s \cdot \lambda \subset K + A$ ,  $s \cdot t^{-1}(\lambda) \subset A$ ,  $s \cdot t(\lambda) \subset A$ .

Infatti, ci si sposti su  $s$  a partire da  $K$  e ci si fermi, non appena il tratto  $\tau$  percorso incontri la propria immagine nella  $t$ . L'estremo di  $\tau$  diverso da  $K$  è, necessariamente, interno ad  $s$ . Quindi è  $\tau \cdot t^{-1}(\lambda) = o$ ,  $\tau \cdot \lambda = K$ ,  $\tau \cdot t(\lambda) = o$ . Ma  $\tau$  non taglia  $t$ ; epperò, per la II<sup>a</sup> risulta anche  $\tau \cdot \sigma(\lambda) = K$ . Indi è anche  $\tau = K \subset \Sigma(\lambda)$ ; donde la conclusione.

Un ragionamento analogo prova ché:

XI. La semiretta  $k$ , di origine  $K$ , è un raggio fondamentale per  $\lambda \in \Sigma \lambda$ , oppure contiene un tal segmento, di origine  $K$ , se  $K$  è interno a  $\lambda$ ,  $k$  è, in  $K$ , normale a un lato di  $\lambda$  e, nel partire da  $K$ , si rivolge verso  $\Sigma \lambda$ , mentre è  $k \cdot \lambda = K$ ,  $k \cdot t^{-1}(\lambda) = k \cdot t(\lambda) = o$ ;

inoltre, a norma delle proposizioni I) e X):

XII. Nella XI le condizioni  $k \cdot \lambda = K$ ,  $k \cdot t^{-1}(\lambda) = o$ ,  $k \cdot t(\lambda) = o$  possono essere sostituite da quella che  $k$ , partendo da  $K$ , incontri  $\sigma(\lambda)$  prima di incontrare ulteriormente  $t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda)$ , anzi, allora  $K$  è origine di un segmento, fondamentale per  $\lambda \in \Sigma(\lambda)$ , contenuto in  $k$ .

Per i lemmi di questo numero si veda, per esempio, il n. 13 di M. I).

5. CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA DI PUNTI FONDAMENTALI O METAFONDAMENTALI. - A norma delle stesse definizioni, è evidente che:

XIII. Se  $\nu$  è contenuto in  $\sigma(\lambda) + \Sigma \lambda$  e contiene punti di  $\lambda$ , ogni punto di  $\nu$ , interno a  $\lambda$  e fondamentale (metafondamentale) per  $\nu$  e per il campo adiacente a  $\sigma \nu$  e contenuto in  $\Sigma \lambda$  [ved. VII], è fondamentale (metafondamentale) anche per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ .

E ci proponiamo ora di indicare un altro gruppo di proposizioni, strettamente legate fra di loro.

XIV. Il solito significato abbiano  $\lambda$  e  $\Sigma \lambda$ , e siano  $s = KA$  un segmento soddisfacente alle  $s \cdot t \cdot s = o$ ,  $s \cdot \lambda = s \cdot [t^{-1}(\lambda) - \lambda - t(\lambda)] = K + A$  ed  $\alpha$  l'arco di  $\lambda$ , di estremi  $A$  e  $K$ , inoltre  $s$  sia parallelo a qualche lato di  $\lambda$ . Allora l'arco  $\nu = \lambda - \alpha + s$ , che è un arco di traslazione [ved. VIII], è un arco elementare di traslazione; e uno,  $\Sigma \nu$ , dei campi adiacenti a  $\sigma(\nu)$  è contenuto in  $\Sigma(\lambda)$  [ved. VII]. Orbene, se  $\nu$  contiene punti fondamentali o metafondamentali per  $\Sigma \nu$ , anche  $\lambda$  contiene, rispettivamente, punti fondamentali o metafondamentali per  $\Sigma(\lambda)$ .

Infatti, sia  $R$  un punto fondamentale (metafondamentale) per  $\nu$  e  $\Sigma \nu$ . Se  $R$  è interno a  $\lambda$ , esso è fondamentale (metafondamentale) per  $\Sigma(\lambda)$ , a



orma della XIII). Se  $R$  non è interno a  $\lambda$ , esso è necessariamente interno ad  $s$ , perchè interno a  $v$ .

Si ponga allora  $j = s \dot{+} \alpha$  e si denoti con  $J$  l'insieme, chiuso e limitato, delimitato da  $j$ ; di guisa che  $J \cdot t(J) = 0$ , a norma della VI) e della  $s \cdot t(s) = 0$ . Si indichi con  $W$  quel punto, interno ad  $\alpha$  e tale, che  $w = RW$  sia normale ad  $s$  e che l'interno di  $w$  sia contenuto nell'interno di  $J$ , — di guisa che è  $t(w) = 0$ .

Sia ora  $R$  origine, per esempio, di una spezzata metafondamentale  $= RU \dot{+} UV$ , relativa a  $v$  e  $\Sigma(v)$ . Allora, poichè  $R$  è interno ad  $s$ ,  $RU$  è normale ad  $s$ ; epperò  $w \dot{+} \psi$  è ancora una spezzata a due lati (ortogonali fra i loro).

Inoltre  $w - R$  è contenuto, al pari di  $J - s$  [ved. la V)], in uno stesso campo adiacente a  $\sigma(v)$ ; e precisamente in quello,  $\Sigma'(v)$ , diverso da  $\Sigma(v)$ , perchè  $W$  appartiene a  $\sigma(\lambda) - \sigma(\lambda) \cdot \sigma(v)$  [si tenga presente anche la VII)].

Di qui, dalle  $w \cdot t(w) = 0$ ,  $\psi - R \subset \Sigma(v)$ ,  $\Sigma(v) \cdot \Sigma'(v) = 0$  e dall'invarianza, rispetto alla  $t$ , dei campi adiacenti ad una traiettoria di  $t$  [cfr. M. II), § 9, p. 168] è facile dedurre, con ragionamenti di tipo noto [cfr., per esempio, I. I), n. 15 e M. III), nota <sup>(3)</sup>], che  $w \dot{+} \psi$  è per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$  <sup>(3)</sup> una spezzata metafondamentale, di origine  $W$ .

Gli altri casi si trattano in maniera analoga.

XV). Si supponga ora che l'interno del segmento  $s = KA$  appartenga a  $\Sigma(\lambda)$ , che  $K$  sia interno a  $\lambda$  e che  $s$  sia, in  $K$ , normale a uno dei lati di  $\lambda$ . Inoltre:  $s$  appartenga a un arco elementare di traslazione  $v$ , contenuto in  $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$ ; e  $s$  contenga nell'interno un punto  $R$ , fondamentale per  $v$  e per il campo,  $\Sigma(v)$ , adiacente a  $\sigma(v)$  e contenuto in  $\Sigma(\lambda)$ . Allora  $K$  è metafondamentale per  $\Sigma(\lambda)$ .

Poichè  $R$  è interno ad  $s$ , e quindi a  $v$ , il segmento  $w = RK$  non incontra propria immagine.

Se  $R$  è origine di un segmento  $\tau$  [raggio  $r$ ] fondamentale per  $v$  e  $\Sigma(v)$ , si conosce poi facilmente, che, dalle  $\tau - R \subset \Sigma(v)$ , [ $r - R \subset \Sigma(v)$ ] e  $t(\Sigma(v)) = \Sigma(v)$ , segue che  $w \dot{+} \tau[w \dot{+} r]$  è una spezzata [semilinea] metafondamentale per  $\Sigma(\lambda)$ .

Si osservi che, nella XV),  $s$  può non esaurire un lato di  $v$  e che:

XVI). Le ipotesi della XV) sono sempre soddisfatte, se il segmento  $s = KA$  è un segmento di traslazione, il quale abbia su  $\lambda$  soltanto il punto  $K$ , interno a  $\lambda$ , sia in  $K$  normale a un lato di  $\lambda$  e soddisfaccia alla  $s - (K \dot{+} A) \subset \Sigma(\lambda)$  <sup>(4)</sup>.

Se si sviluppa il ragionamento relativo alla dimostrazione della XVI), si riconosce che esso sfrutta la VII). Lo stesso ragionamento, previa la sostituzione della VII) con la IX), dimostra che:

(3) Si tenga anche presente che  $w - W$  è contenuto [ved. V)] in uno stesso campo adiacente a  $\Sigma(\lambda)$ ; e che  $R[\subset \sigma(v) - \sigma(v) \cdot \sigma(\lambda)]$  appartiene a  $\Sigma(\lambda)$ , al pari di  $\psi - R[\subset \Sigma(v)]$ .

(4) Si rammenti [cfr. M. II), § 9] che un segmento di traslazione contiene sempre punti fondamentali per i campi adiacenti alla traiettoria che egli genera; cioè, che il primo teorema del n. 5 di N. I) è già noto per i segmenti di traslazione.

XVII). Se  $K$  è un punto interno a  $\lambda$  e fondamentale per  $\Sigma(\lambda)$ , e se  $K$  è origine di un segmento fondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ ,  $K$  è anche un punto metafondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$  <sup>(5)</sup>.

6. UN'ULTIMA PROPOSIZIONE. — Ed ora facciamo vedere che:

XVIII). Se  $\lambda$  contiene punti fondamentali o metafondamentali per  $\Sigma(\lambda)$ , esistono punti siffatti diversi dai vertici di  $\lambda$ .

Invero, sia  $R$  un punto fondamentale o metafondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ . Se  $R$  è diverso dai vertici di  $\lambda$ , non c'è nulla da dimostrare. Se  $R$  è un vertice di  $\lambda$ , esso è [cfr. N. I), n. 5] di seconda categoria rispetto a  $\Sigma(\lambda)$ .

Pongasi ora che  $R$  sia origine di una spezzata  $\psi = RU \dashv UV$ , metafondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ ; e sia  $l$  il lato di  $\lambda$  avente  $R$  come estremo e normale ad  $RU$ .

Denoti  $R'$  un punto di  $l$ , interno ad  $l$ , ed  $U'$  il punto tale, che i segmenti orientati  $\vec{RU}$  ed  $\vec{R'U'}$  siano equipollenti. E si ponga  $\psi' = R'U' \dashv U'V$ .

Allora, dal fatto che  $\psi$  è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine  $R$ , e che il segmento di traslazione contenuto in  $\psi$  non incontra  $RU$  non è difficile dedurre che, se  $R'$  è abbastanza vicino ad  $R$ ,  $\psi'$  è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine  $R'$ , e che il segmento di traslazione contenuto in  $\psi'$  coincide con quello contenuto in  $\psi$  e non incontra  $R'U'$ .

Inoltre, da  $\psi \cdot \lambda = R$ ,  $\psi \cdot t^{-1}(\lambda) = o$ ,  $\psi \cdot t(\lambda) = o$  segue subito, sempre se  $R'$  è abbastanza vicino ad  $R$ , che  $\psi'$  non incontra  $t^{-1}(\lambda)$  e  $t(\lambda)$ , e ha comune con  $\lambda$  soltanto il punto  $R'$ . Ma allora è anche  $\psi' \cdot \sigma(\lambda) = R'$ , a norma della II). Inoltre  $V$  appartiene a  $\Sigma(\lambda)$ , quindi anche  $\psi' - R'$  appartiene a  $\Sigma(\lambda)$ , se  $R'$  è abbastanza vicino ad  $R$ . Sicchè tutti i punti di  $l$  abbastanza vicini ad  $R$  sono metafondamentali per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ .

In maniera non molto diversa si tratta il caso, che  $R$  sia origine di una spezzata metafondamentale.

Se  $R$  è origine di un segmento fondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ ,  $R$  è anche [ved. XVII)] metafondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ ; e ci troviamo ricondotti ai casi precedenti.

Se  $R$  è origine di una semiretta fondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ , normale in  $R$  al lato  $l$  di  $\lambda$ , sia  $r'$  la semiretta equiversa ad  $r$  ed avente come origine il punto  $R'$ , interno ad  $l$ . Allora da  $r \cdot t^{-1}(\lambda) = o$ ,  $r \cdot \lambda = R$ ,  $r \cdot t(\lambda) = o$  è facile dedurre che, se  $R'$  è abbastanza vicino ad  $R$ ,  $r'$  [si rivolge verso  $\Sigma(\lambda)$ , nel partire da  $R'$  e] soddisfa allè  $r' \cdot t^{-1}(\lambda) = o$ ,  $r' \cdot \lambda = R'$ ,  $r' \cdot t(\lambda) = o$ . Ma allora basta applicare la XI), per riconoscere che  $R'$  è fondamentale per  $\lambda$  e  $\Sigma(\lambda)$ .

La XVIII) dice in particolare che dei teoremi del n. 5 di N. I) basta dimostrare il primo.

(5) Si ricordi la nota precedente.

**Matematica.** — *Un'osservazione sulla continuità rispetto ai valori iniziali degli integrali dell'equazione:  $y' = f(x, y)$ .* Nota (\*) di F. CAFIERO, presentata dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI.

È noto<sup>(1)</sup> che se  $f(x, y)$  è definita nel rettangolo;

$$R: a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq \beta$$

ed ivi soddisfa alle ipotesi di Carathéodory, per ogni punto  $(x_0, y_0)$  ( $\alpha < y_0 < \beta$ )  $R$  passa almeno un integrale dell'equazione:

$$y' = f(x, y)$$

gli estremi di esso e di ogni altro eventuale appartengono alla frontiera di  $R$ . Nelle ipotesi di Carathéodory, ogni ulteriore gruppo di condizioni sufficienti a stabilire l'unicità, rispetto ai valori iniziali, degli integrali dell'equazione differenziale (I) è anche sufficiente a stabilirne la dipendenza continua dai valori iniziali stessi<sup>(2)</sup>.

In questa Nota dimostro: ogni gruppo di condizioni sufficienti ad assicurare l'esistenza<sup>(3)</sup> e l'unicità, rispetto ai valori iniziali, degli integrali dell'equazione differenziale (I) è anche sufficiente a stabilirne la dipendenza continua ai valori iniziali stessi.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1947.

(1) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über Reelle Funktionen*, «Zweite Auflage», 1927, Berlin, pp. 665-674. Cfr. anche G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Zanichelli, Bologna, Parte II, pp. 129-130.

Le ipotesi di Carathéodory sono le seguenti:  $f(x, y)$  misurabile rispetto ad  $x$ , continua rispetto ad  $y$ , e soddisfacente alla limitazione:

$$|f(x, y)| < \varphi(x)$$

non  $\varphi(x)$  sommabile nel senso di Lebesgue.

(2) C. CARATHÉODORY, loc. cit., pp. 678-680. Sulla dipendenza degli integrali delle equazioni differenziali dai valori iniziali sono stati scritti numerosi lavori, qui ci limitiamo a citare i seguenti che riguardano più direttamente le equazioni differenziali del primo ordine, mandando per una vasta bibliografia a: G. SANSONE, loc. cit., Parte I nota a pie' di p. 26; Parte II, cap. VIII, § 9, pp. 134-135; P. MONTEL, *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle*, «Bull. des Sciences Mathém.» (50) 1926, pp. 205-217; E. KAMKE, *Zur Theorie der Differenzialgleichung  $y' = f(x, y)$* , «Acta Mathematica», vol. 52, 1928, pp. 327-339; G. SCORZA DRAGONI, *Sulla dipendenza continua degli integrali della equazione  $y' = f(x, y)$* , «Rend. Acc. Lincei», vol. IX, serie 6<sup>a</sup>, 1929, pp. 481-488; G. SCORZA DRAGONI, *Sugli integrali dell'equazione  $y' = f(x, y)$* , «Rend. Acc. Lincei», vol. IX, serie 6<sup>a</sup>, 1929, pp. 378-382; E. PINI, *Sulla continuità degli integrali dell'equazione  $y' = f(x, y, \gamma)$* , «Rend. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere» (2), 63, 1930, pp. 531-534.

(3) Esistenza intesa anche nel senso, più generale di quello di Carathéodory, che per ogni punto di  $R$  passi almeno una curva, con gli estremi sulla frontiera di  $R$ , diagramma di una funzione continua (non necessariamente assolutamente continua), derivabile quasi ovunque e quasi ovunque soddisfacente alla (1).

Tale dimostrazione è basata sulla seguente osservazione che fornisce, tra l'altro, un teorema generale di analisi che può avere altre applicazioni: *la continuità degli integrali dell'equazione differenziale (I) rispetto ai valori iniziali è una necessaria conseguenza della corrispondenza che la (I) stessa viene a stabilire tra i punti di R e le curve integrali, supposte esistenti ed univocamente determinate dai valori iniziali.*

Supponiamo infatti che:

i) Dato il rettangolo R, esista una legge L che ad ogni punto  $(x_0, y_0)$  ( $\alpha < y_0 < \beta$ ) di R faccia corrispondere una ed una sola curva continua  $\gamma_0$  passante per esso, di equazione  $y = \gamma_0(x)$ , appartenente ad R ed avente gli estremi sulla frontiera di R. La legge L sia inoltre tale da far corrispondere ad ogni punto di  $\gamma_0$  la stessa curva  $\gamma_0$ .

Riesce allora facile dimostrare che:

A) Detta  $y = \gamma_0(x)$  la curva corrispondente al punto  $(x_0, y_0)$  ( $\alpha < y_0 < \beta$ ) ed  $y = \bar{\gamma}(x)$  quella corrispondente al punto  $(x_0, \bar{y})$  ( $\alpha < \bar{y} < \beta$ ), fissato un  $\varepsilon > 0$ , è possibile determinare un  $\delta > 0$  tale che per  $|y_0 - \bar{y}| \leq \delta$  si abbia:

$$(1) \quad |\gamma_0(x) - \bar{\gamma}(x)| < \varepsilon$$

nell'intervallo comune di definizione. Inoltre se  $\gamma_0(x)$  è definita in  $I: a_1 \leq x \leq b_1$  ( $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ ) ed ivi risulta  $\alpha \leq \gamma_0(x) < \beta$  ( $\alpha < \gamma_0(x) \leq \beta$ ), anche  $\bar{\gamma}(x)$  è definita in tutto I se  $y_0 \leq \bar{y} \leq y_0 + \delta$  ( $y_0 - \delta \leq \bar{y} \leq y_0$ ).

A tale scopo indichiamo con  $\Gamma$  l'insieme delle curve determinate dalla legge L ed occupiamoci dapprima del caso in cui  $\gamma_0(x)$  sia definita almeno in  $I: a_1 \leq x \leq b_1$  e la curva  $\gamma_0$  non abbia punti in comune con uno dei due lati orizzontali, di R, ad esempio con quello appartenente alla retta  $y = \beta$ . Fissato un  $\varepsilon > 0$ , sia  $\bar{\varepsilon}$  un numero positivo minore od eguale ad  $\varepsilon$  e tale che la curva  $\gamma$  di equazione:

$$y = \gamma_0(x) + \bar{\varepsilon} \quad a_1 \leq x \leq b_1$$

non abbia punti in comune col suddetto lato orizzontale di R. Detta  $y_1$  l'ordinata di  $\gamma_0$  in  $a_1$ , indichiamo con C l'insieme delle curve di  $\Gamma$  corrispondenti ai punti (estremi esclusi) del segmento di estremi  $P_1(a_1, y_1)$  e  $P_2(a_1, y_1 + \bar{\varepsilon})$  e dimostriamo che esiste almeno una curva  $c$  di C, diagramma di una funzione continua  $c(x)$  definita almeno in I ed ivi soddisfacente alla limitazione:

$$(2) \quad \gamma_0(x) < c(x) \leq \gamma_0(x) + \bar{\varepsilon} \quad a_1 \leq x \leq b_1.$$

Supponiamo, per assurdo, che ciò non sia. Detta allora  $c_1$ , di equazione  $y = c_1(x)$ , una curva di C ed indicato con J il campo di esistenza di  $c_1(x)$ , tale curva assumerà in qualche punto  $x_1$  di  $I \cap J$  ordinata maggiore di quella di  $\gamma$  (4). Ma poichè la curva  $c_1$  assume in  $a_1$  ordinata minore di quella di  $\gamma$ , esisterà un primo punto  $\bar{x}$ , a destra di  $a_1$ , in cui  $\gamma$  e  $c_1$  assumono la stessa ordinata. Al variare di  $c_1$  in C tale punto  $\bar{x}$  varia in I descrivendo un insieme E di estremo

(4) Che ogni curva di  $\Gamma$  non possa assumere in qualche punto a destra di  $a_1$  ordinata minore od eguale a quella di  $\gamma_0$  è evidente poichè le curve dell'insieme  $\Gamma$  non possono aver punti in comune.



superiore  $X$  appartenente ad  $I$ . Detta  $y_2$  l'ordinata di  $\gamma_0$  in  $X$ , consideriamo le curve di  $\Gamma$  corrispondenti ai punti  $(X, Y)$  al variare di  $Y$  nell'intervallo aperto:  $y_2 < Y < y_2 + \bar{\varepsilon}$ . Una qualunque di tali curve non potrebbe avere il suo estremo sinistro sulla frontiera di  $R$  senza intersecare o  $\gamma_0$  o curve di  $C$ . Ma ciò è assurdo per i). Esiste quindi almeno una curva  $c$  di  $C$ , di equazione  $y = c(x)$ , che nell'intervallo comune ad  $I$  ed al campo di esistenza di  $c(x)$  si mantiene sempre compresa tra  $\gamma$  e  $\gamma_0$ . È ovvio poi che il campo di esistenza di  $c(x)$  è almeno  $I$ . Infatti, se ciò non fosse, la curva  $c$ , non potendo avere punti in comune con  $\gamma_0$  nè intersecare  $\gamma$ , non potrebbe avere ambedue gli estremi sulla frontiera di  $R$ . Detta allora  $y_0 + \delta_1$  l'ordinata di  $c$  in  $x_0$  e supposto  $y_0 < \bar{y} < y_0 + \delta_1$ , consideriamo la curva  $\bar{\gamma}$  di  $\Gamma$ , di equazione  $y = \bar{\gamma}(x)$ , corrispondente al punto  $(x_0, \bar{y})$ . Tale curva non può avere punti in comune nè con  $\gamma_0$  nè con  $c$  e quindi  $\bar{\gamma}(x)$  sarà definita almeno in  $I$  soddisfacendo ivi alla limitazione:

$$\gamma_0(x) < \bar{\gamma}(x) < c(x) \quad a_1 \leq x \leq b_1$$

Da quest'ultima limitazione e dalla (2) deriva poi immediatamente:

$$(3) \quad \bar{\gamma}(x) - \gamma_0(x) < \varepsilon \quad a_1 \leq x \leq b_1$$

Analogamente si dimostra che se  $\gamma_0$  non ha punti in comune con l'altro lato orizzontale di  $R$  (quello appartenente alla retta  $y = \alpha$ ), si può determinare un intorno sinistro di  $y_0$  tale che, se  $\bar{y}$  appartiene a tale intorno, la curva  $\bar{\gamma}$  di  $\Gamma$  corrisponde al punto  $(x_0, \bar{y})$  è il diagramma di una funzione continua  $\bar{\gamma}(x)$  definita almeno in tutto  $I$  ed ivi soddisfacente alla (1).

Passando al caso generale, supponiamo che la curva  $\gamma_0$  abbia punti in comune con almeno un lato orizzontale di  $R$ , ad esempio con quello appartenente alla retta  $y = \beta$ . Essa in  $x_0$  assume ordinata  $y_0$  soddisfacente alla limitazione:

$$\alpha < y_0 < \beta.$$

Sia allora  $\bar{I}: \bar{a}_1 \leq x \leq \bar{b}_1$  il massimo intervallo contenente il punto  $x_0$  nell'interno del quale risulta:

$$\gamma_0(x) < \beta \quad \bar{a}_1 < x < \bar{b}_1.$$

Sarà:

$$\gamma_0(\bar{a}_1) \leq \beta \quad \gamma_0(\bar{b}_1) \leq \beta$$

ed almeno una delle superiori limitazioni, avendo supposto che  $\gamma_0$  ha ordinata  $\beta$  in qualche punto di  $I$ , deve necessariamente essere verificata dal segno di eguaglianza. Supponiamo, per fissare le idee:

$$\gamma_0(\bar{a}_1) = \beta \quad \gamma_0(\bar{b}_1) = \beta$$

e, fissato un  $\varepsilon > 0$ , determiniamo un  $h$  tale che l'oscillazione di  $\gamma_0(x)$  sia minore di  $\varepsilon$  in ogni intervallo di ampiezza minore od eguale ad  $h$ . Sarà:

$$(4) \quad \beta - \gamma_0(x) < \varepsilon \quad x < I_1 + I_2$$

avendo posto  $I_1: \bar{a}_1 \leq x \leq \bar{a}_1 + h$  e  $I_2: \bar{b}_1 - h \leq x \leq \bar{b}_1$ . Inoltre in  $I_1: \bar{a}_1 + h \leq x \leq \bar{b}_1 - h$  la curva  $\gamma_0$  assume sempre ordinata minore di  $\beta$  e quindi,

per quanto abbiamo dimostrato nel caso già esaminato, esiste una curva  $c$  di  $\Gamma$ , diagramma di una funzione continua  $c(x)$  definita almeno in  $I_2$  e soddisfacente alla limitazione:

$$(5) \quad c(x) - \gamma_0(x) < \varepsilon \quad \bar{a}_1 + b \leq x \leq \bar{b}_1 - b.$$

Detta  $y_0 + \delta_1$  l'ordina di  $c$  in  $x_0$  ed indicata al solito con  $y = \bar{\gamma}(x)$  la curva di  $\Gamma$  passante per il punto  $(x_0, \bar{y})$ , se  $y_0 < \bar{y} < y_0 + \delta_1$ , risulta:

$$\gamma_0(x) < \bar{\gamma}(x) < c(x) \quad \bar{a}_1 + b \leq x \leq \bar{b}_1 - b$$

ed anche:

$$\gamma_0(x) < \bar{\gamma}(x) \leq \beta$$

nell'intervallo di definizione comune a  $\bar{\gamma}(x)$  e a  $\gamma_0(x)$ . Dalle due superiori limitazioni, tenendo conto della (4) e (5), si deduce che vale ancora la (3) nell'intervallo comune di definizione a  $\bar{\gamma}(x)$  e a  $\gamma_0(x)$ .

Analogamente si procede nel caso  $\gamma_0(\bar{b}_1) < \beta$  o  $\gamma_0(\bar{a}_1) < \beta$  e  $\gamma_0(\bar{b}_1) = \beta$ .

Allo stesso modo poi si dimostra, com'è ormai chiaro, anche nel caso in cui la curva  $\gamma_0$  abbia punti di ordinata  $\alpha$ , che può determinarsi un intorno sinistro di  $y_0$  di ampiezza  $\delta_2$  tale che se  $\bar{y}$  appartiene al detto intorno si abbia:

$$\gamma_0(x) - \bar{\gamma}(x) < \varepsilon$$

nell'intervallo comune di definizione. Detto  $\delta$  il più piccolo dei numeri  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , per  $|\bar{y} - y_0| < \delta$  vale la (1). Con ciò il teorema A) è completamente dimostrato.

**Matematica.** — *Determinazione dell'altezza di scoppio della bomba atomica lanciata su Hiroshima.* Nota (\*) di P. BUZANO, presentata dal Corrisp. E. PERSICO.

In un *Report of the British Mission to Japan* del 1946<sup>(1)</sup> vengono forniti dati ufficiali circa gli effetti delle bombe atomiche lanciate su Hiroshima e Nagasaki: però nessuna indicazione è data riguardo alla quota a cui avvennero le esplosioni, la quale sembra voglia esser tenuta segreta. Ora, poichè l'opuscolo citato contiene fotografie di ombre termiche prodotte dall'intensa e brevissima radiazione che ha accompagnato l'esplosione, il prof. E. Persico mi ha proposto di ricavare da una di queste, coi metodi della Geometria Descrittiva, l'inclinazione rispetto al terreno dei raggi termici, supposti paralleli<sup>(2)</sup>. Trovata tale inclinazione ed essendo indicata la distanza fra il punto ove si è prodotta l'ombra e il piede della verticale abbassata sul ter-

(\*) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1947.

(1) *The effects of the atomic bombs at Hiroshima and Nagasaki.* «His Majesty's Stationery Office — London — 1946».

(2) L'ipotesi è ammissibile data la distanza della sorgente, relativamente grande rispetto alle dimensioni dell'oggetto.

reno dal punto di scoppio si ricava subito *la quota* a cui è avvenuta l'esplosione che, come vedremo, *si aggira sui 600 metri*.

Per giungere a tale risultato, seguendo il consiglio del prof. Persico, mi sono valso della fotografia n. 23 dell'opuscolo citato, la quale rappresenta l'ombra portata da un volante-valvola sul fianco di un gazometro a un miglio e un quarto dal centro del disastro. L'irradiazione termica che ha accompagnato l'esplosione ha determinato l'alterazione della vernice ricoprente la parete del gazometro tranne che nei punti dove i raggi sono stati intercettati da un volante situato presso detta parete: questa regione intatta costituisce appunto l'ombra (termica) del volante, sul fianco del gazometro.

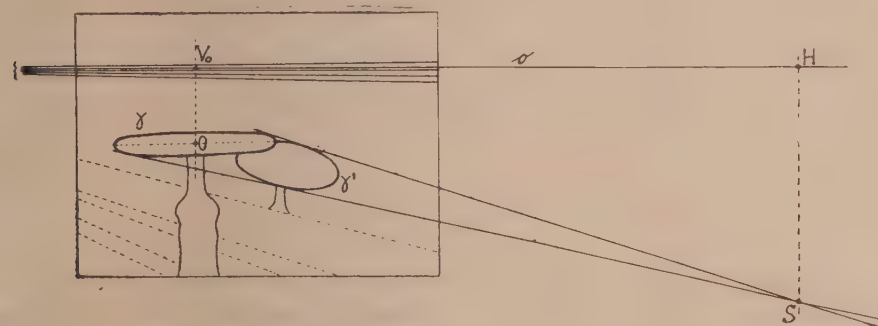


Fig. 1.

La fotografia (la cui scala non ha interesse per la determinazione di angoli) è schematizzata nella fig. 1, in merito alla quale osserviamo quanto segue:

1° il piano  $\pi$  della fotografia si può ritenere verticale e i lati del rettangolo che la inquadra si possono ritenere rispettivamente verticali e orizzontali;

2° l'ellisse  $\gamma$  è l'immagine di un cerchio oggettivo (volante) situato in un piano orizzontale; gli assi di  $\gamma$  risultano dalla fotografia rispettivamente *orizzontale* il maggiore e *verticale* il minore;

3° la figura  $\gamma'$  è l'immagine dell'ombra portata dal cerchio oggettivo sulla parete del gazometro: date le piccole dimensioni del cerchio rispetto a quelle del gazometro, la parete (cilindrica) di questo per la regione che interessa può identificarsi con un *piano verticale*  $\sigma$  e quindi  $\gamma'$  si identifica con un'ellisse;

4° la fotografia può identificarsi con una *proiezione centrale* fatta su  $\pi$  da un centro di proiezione proprio V di cui si sa per intanto che deve trovarsi nel piano di profilo passante per il centro O di  $\gamma$  (diversamente il cerchio oggettivo orizzontale non potrebbe proiettarsi su  $\pi$  nell'ellisse  $\gamma$  con gli assi rispettivamente orizzontale e verticale);

5° nella fotografia si distinguono alcune linee (corrispondenti a rilievi della parete del gazometro) che si possono considerare immagini di rette orizzontali e parallele fra loro: perciò il punto di concorso di dette linee cade

sull'orizzonte  $o$  che risulta così determinato; ne segue immediatamente che è determinato anche il punto principale  $V_o$  come intersezione dell'orizzonte con la verticale passante per  $O$ .

Da queste osservazioni preliminari segue che per completare la determinazione del centro di proiezione  $V$  basta trovarne la distanza  $d$  dal quadro.

Vediamo come  $d$  si possa esprimere mediante i segmenti  $b = OV_o$  ed  $a, b$  (semiassi di  $\gamma$ ), tutti noti dal disegno. L'ellisse  $\gamma$  è proiezione di un cerchio oggettivo situato in un piano orizzontale: perciò l'involuzione  $\mathfrak{J}$  di punti coniugati che  $\gamma$  determina sull'orizzonte dev'esser proiettata da  $V$  secondo un'involuzione di angoli retti. Per ottenere questo basta assumere  $d$  in modo che  $-d^2$  sia uguale alla potenza  $-a^2\left(\frac{b^2}{b^2} - 1\right)$  dell'involuzione  $\mathfrak{J}^{(1)}$ . Avremo così:

$$d^2 = a^2 \left( \frac{b^2}{b^2} - 1 \right)$$

ossia:

$$(1) \quad d = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - b^2}$$

Una costruzione grafica del segmento  $d$ , noti  $a, b$ , è indicata nella fig. 2.

Determinato così il centro di proiezione  $V$  possiamo cercare l'angolo acuto  $\theta$  formato con un qualsiasi piano orizzontale dai raggi che hanno pro-

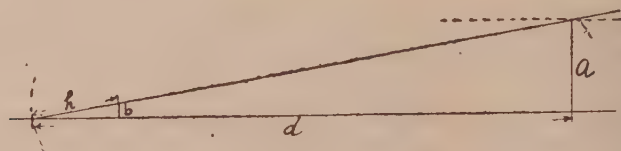


Fig. 2.

dotto l'ombra. Sia  $U_\infty$  la direzione di detti raggi e sia  $S$  la traccia di  $VU_\infty$  sul quadro  $\pi$ : è chiaro che se si sa determinare  $S$  anche  $U_\infty$  è noto come direzione di  $SV$ . Per trovare  $S$  basta osservare che attraverso un sistema di proiezioni e sezioni (dai centri  $V$  e  $U_\infty$  sui piani  $\pi$  e  $\sigma$ )  $\gamma$  e  $\gamma'$  risultano riferite in un'omologia di centro  $S$ : perciò  $S$  deve cadere nell'intersezione del-

(3) In un riferimento cartesiano  $(x, y)$ , avente origine in  $O$  e assi coincidenti con gli assi di  $\gamma$ , il punto  $P_1 \equiv (x_1, b)$  dell'orizzonte ha come polare rispetto a  $\gamma$  la retta  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yb}{b^2} - 1 = 0$  che incontra l'orizzonte  $y = b$  nel punto  $P$  di ascissa:  $-\frac{a^2}{x_1} \left( \frac{b^2}{b^2} - 1 \right)$ .

Essendo  $P$  e  $P_1$  coniugati, la potenza di  $\mathfrak{J}$  è  $V_o P \cdot V_o P_1 = -a^2 \left( \frac{b^2}{b^2} - 1 \right)$ . Assumere  $-d^2$  uguale alla potenza equivale a prendere  $V$  su un cerchio di centro  $V_o$  e raggio  $d$ : così la coppia di punti di  $\mathfrak{J}$  simmetrici rispetto a  $V_o$  è proiettata da  $V$  secondo un angolo retto e lo stesso avverrà di ogni altra coppia di  $\mathfrak{J}$  (poichè da  $V$  sono già proiettati ad angolo retto anche  $V_o$  e il punto all'infinito dell'orizzonte, suo coniugato).



l'unica coppia di tangenti comuni a  $\gamma$  e  $\gamma'$  ed è quindi costruibile graficamente (fig. 1).

Noto  $S$  se ne trovino le distanze  $q = SH$  e  $r = SV_0$  rispettivamente dall'orizzonte e dal punto principale. Dal triangolo  $VV_0S$ , rettangolo in  $V_0$ , posto  $p = VS$ , si ha:

$$(2) \quad d = \sqrt{d^2 + r^2};$$

dal triangolo  $VHS$ , rettangolo in  $H$ , essendo  $\widehat{SVH} = \theta$  si ha poi:

$$(3) \quad \text{sen } \theta = \frac{q}{p}.$$

Le formule (2) e (3) risolvono completamente il problema della determinazione di  $\theta$ . Volendo costruire graficamente  $\theta$  si comincia col costruire  $p$

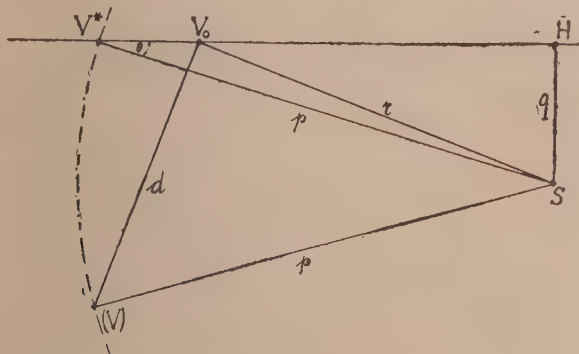


Fig. 3.

in base alla (2) ribaltando su  $\pi$  in  $(V)$   $V_0S$  il triangolo oggettivo  $VV_0S$ ; si costruisce poi il ribaltamento  $V^*HS$  del triangolo  $VHS$  di cui si conoscono un cateto  $q$  e l'ipotenusa  $p$ .

Le costruzioni sono eseguite nella fig. 3 con scala pari alla metà di quella delle figg. 1 e 2.

Coi dati della fotografia si trova così  $\theta = 17^\circ$ , circa; il che, tenuto conto della distanza orizzontale di 1 miglio e  $\frac{1}{4}$ , pari a circa 2 km, implica per la quota di scoppio un valore attorno a 610 metri: detto valore deve essere però considerato solo come indicativo, date le numerose cause di errore capaci di influire sul risultato.

**Matematica.** — *Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue.* Nota I <sup>(\*)</sup> di L. CESARI, presentata dal Socio M. PICONE.

Sia  $S$  una superficie continua e sia

$$(1) \quad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in Q,$$

una sua rappresentazione sul quadrato fondamentale  $Q \equiv [0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1]$  del piano  $uv$ . Diremo  $L(S)$  l'area secondo Lebesgue della superficie. Indicheremo con  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  le tre trasformazioni piane (superficie piatte)

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi_1: & y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \\ \Phi_2: & z = z(u, v), \quad x = x(u, v), \\ \Phi_3: & x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in Q,$$

e ne diremo  $L(\Phi_r)$ ,  $r = 1, 2, 3$ , l'area secondo Lebesgue.

Se  $S$  ed  $S'$  sono due superficie continue, diremo  $\|S, S'\|$  la loro distanza secondo Frechet.

Nelle presenti Note, appoggiandomi a mie precedenti ricerche, dimostrerò il seguente

**TEOREMA A.** — *Se  $S$  è una superficie continua di area finita secondo Lebesgue, se  $S_p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , è una successione di superficie continue tali che*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|S_p, S\| = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} L(S_p) = L(S),$$

*allora, indicate con  $\Phi_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ ,  $\Phi_{pr}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , le tre superficie piatte relative alla superficie  $S$  e, rispettivamente, alle superficie  $S_p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , si ha*

$$(A) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} L(\Phi_{pr}) = L(\Phi_r), \quad r = 1, 2, 3.$$

1. Sia  $S$  una superficie continua e sia la (1) una sua rappresentazione sul quadrato chiuso  $Q \equiv (0, 1, 0, 1)$  del piano cartesiano (orientato)  $uv$ . Ad ogni punto  $P \equiv (u, v)$  di  $Q$  le (1) fanno corrispondere un punto  $R \equiv (x, y, z)$  dello spazio  $xyz$  che diremo  $S(P)$ , *immagine* del punto  $P$ . Indicheremo con  $S$  anche l'insieme dei punti dello spazio  $xyz$  occupato dalla superficie  $S$ . L'insieme  $S$  è limitato e chiuso. Esiste pertanto un cubo dello spazio  $xyz$ , a spigoli paralleli agli assi  $x, y, z$ , contenente interamente nel suo interno l'insieme  $S$ . Siano  $K_1, K_2, K_3$  i quadrati dei piani coordinati  $yz, zx, xy$  nei quali il cubo  $K$  si proietta ortogonalmente.

Se  $R \equiv (x, y, z)$  è un punto di  $S$ , ogni punto di  $Q$  la cui immagine coincide con  $R$ , verrà detto un *modello* del punto  $R$ . Diremo  $S^{-1}(R)$  l'insieme dei modelli del punto  $R$ .

(\*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1947.

Per ogni numero reale  $0 < \delta \leq \sqrt{2}$  diciamo  $\omega(\delta)$  il massimo dei valori assunti dall'espressione.

$$(3) \quad \{ [x(u, v) - x(u', v')]^2 + [y(u, v) - y(u', v')]^2 + [z(u, v) - z(u', v')]^2 \}^{1/2}$$

per tutte le coppie  $(u, v)$  e  $(u', v')$  di punti di  $Q$  tali che

$$[(u - u')^2 + (v - v')^2]^{1/2} \leq \delta.$$

La funzione  $\omega(\delta)$  è continua e tende a zero quando  $\delta \rightarrow 0$ . La funzione  $\omega(\delta)$  dicesi il *modulo di continuità* della rappresentazione (1) della superficie  $S$ . Se  $I$  è un insieme di punti di  $Q$  diciamo  $\eta(I)$  l'estremo superiore dei valori assunti dall'espressione (3) per tutte le coppie  $(u, v)$  e  $(u', v')$  di punti di  $I$ . Il numero  $\eta(I)$  dicesi l'*oscillazione* della rappresentazione (1) della superficie  $S$  sull'insieme  $I$ .

Se  $\bar{I}$  e  $I^*$  indicano rispettivamente la chiusura e la frontiera di un insieme  $I$  e  $\delta(I)$  il diametro di  $I$ , si ha, per ogni insieme  $I$  di punti di  $Q$

$$\eta(I^*) \leq \eta(\bar{I}) = \eta(I) \leq \omega[\delta(I)].$$

Considerate le tre trasformazioni piane continue  $\Phi_r, r = 1, 2, 3$ , siano  $W(\Phi_r), r = 1, 2, 3$ , le relative *variazioni totali* e  $\Psi(y, z; \Phi_1), \Psi(z, x; \Phi_2), \Psi(x, y; \Phi_3)$  le relative funzioni caratteristiche già introdotte in precedenti lavori (1).

Ho dimostrato inoltre il seguente

TEOREMA I (2). — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie continua  $S$  abbia area finita secondo Lebesgue è che le tre trasformazioni piane  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  siano a variazione limitata. Inoltre per ogni superficie continua si ha*

$$L(\Phi_r) \equiv W(\Phi_r) \leq L(S) \leq W(\Phi_1) + W(\Phi_2) + W(\Phi_3), \quad r = 1, 2, 3.$$

## 2. Le funzioni $T(r)$ e $G(r)$ .

Sia  $r$  una regione di Jordan di  $Q$  e sia  $r^*$  la curva continua, semplice e chiusa costituente il contorno di  $r$ . Essendo fissato sul piano  $uv$  il verso positivo delle rotazioni, la curva  $r^*$  risulta naturalmente orientata. Sia  $C$  la curva continua chiusa ed orientata immagine di  $r^*$  secondo le (3) e siano  $C_1, C_2, C_3$  le tre curve piane, chiuse ed orientate immagini di  $r^*$  secondo le trasformazioni  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ . I piani coordinati  $y, z, x, xy$  sono orientati e quindi

(1) L. CESARI, *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica*, « Boll. U. M. I. », Ser. II, Anno IV (1942), pp. 109-117; *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue*, « Annali Scuola Normale Sup. Pisa », Ser. II, vol. X (1944), pp. 253-294, XI (1942), pp. 1-42. Ricordo qui che

$$W(\Phi_r) = \iint_{K_r} \Psi(x, y; \Phi_r) dx dy, \quad r = 1, 2, 3.$$

(2) Loc. cit. in (1).

anche su di essi è fissato il verso positivo delle rotazioni. Pertanto, sono definiti sui piani coordinati gli indici di Kronecker  $O(y, \zeta; C_1)$ ,  $O(\zeta, x; C_2)$ ,  $O(x, y; C_3)$  relativi alle curve  $C_1, C_2, C_3$ . Poniamo

$$\tau_1(r) = \iint_{K_1} O(y, \zeta; C_1) dy d\zeta, \quad t_1(r) = |\tau_1(r)|, \quad g_1(r) = \iint_{K_1} |O(y, \zeta; C_1)| dy d\zeta$$

ed analoga definizione abbiano  $\tau_2(r), t_2(r), g_2(r), \tau_3(r), t_3(r), g_3(r)$  relativamente alle curve  $C_2, C_3$  e ai piani  $\zeta x$  e  $xy$ . Sia inoltre

$$t(r) = [\tau_1^2(r) + \tau_2^2(r) + \tau_3^2(r)]^{1/2}, \quad g(r) = [g_1^2(r) + g_2^2(r) + g_3^2(r)]^{1/2}.$$

Manifestamente  $t_s(r) \leq g_s(r)$ ,  $s = 1, 2, 3$ ,  $t(r) \leq g(r)$ .

Sia  $[r_i, i = 1, 2, \dots, n]$  una qualsivoglia suddivisione di  $Q$  in regioni di Jordan e siano  $C_i$  le curve continue e chiuse, immagini secondo le (1) delle curve continue e chiuse  $r_i^*$  costituenti la frontiera di  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e  $C_{ri}, r = 1, 2, 3, i = 1, 2, \dots, n$ , le proiezioni delle curve  $C_i$  sui piani coordinati. Poniamo

$$(4) \quad T(S) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^n t(r_i), \quad G(S) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^n g(r_i)$$

per tutte le possibili suddivisioni  $[r_i]$  di  $Q$  in regioni di Jordan ed analoga-

mente  $T(\Phi_r) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^n t_r(\pi_i), G(\Phi_r) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^n g_r(\pi_i), r = 1, 2, 3$  <sup>(3)</sup>.

Sia  $r$  una regione di Jordan di  $Q$  e consideriamo la superficie definita dalle (1) sulla regione chiusa di Jordan  $\bar{r}$  che si ottiene da  $r$  aggiungendovi i punti della frontiera  $r^*$  di  $r$ . Anche per questa superficie potremo definire le funzioni (4) che indicheremo con  $T(r)$  e  $G(r)$ . Così diremo  $L(r)$  l'area secondo Lebesgue di tale superficie. In modo analogo definiremo le funzioni  $T_s(r), G_s(r)$  analoghe alle  $T(\Phi_s), G(\Phi_s)$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Io ho dimostrato il seguente assai riposto.

TEOREMA II <sup>(4)</sup>. - Per ogni superficie  $S$  di area finita secondo Lebesgue si ha:

$$T(S) = G(S) = L(S).$$

Valgono inoltre i seguenti:

(3) L. CESARI, *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*. «Memorie Accademia Italia», vol. XIII, n. 24 (1943), pp. 1323-1481 e particolarmente p. 1375. Ricordo inoltre che, per definizione, è, per ogni  $(x, y)$  di  $K_1$ ,

$\Psi(y, \zeta; \Phi_1) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^n |O(y, \zeta; C_i)|$  per tutte le possibili suddivisioni  $[r_i]$  di  $Q$  in regioni di Jordan. Analogamente  $\Psi(\zeta, x; \Phi_2), \Psi(x, y; \Phi_3)$ .

(4) Loc. cit. in (3), pp. 1451, 1479. Inoltre L. CESARI, *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie*. «Memorie Accademia d'Italia», vol. XIV, n. 29 (1944), pp. 891-931 e particolarmente p. 892.



LEMMA I<sup>(5)</sup>. — Se  $r$  è una regione di Jordan di  $Q$  e  $[r_i, i = 1, 2, \dots, n]$  una suddivisione di  $r$  in regioni di Jordan, allora

$$L(r) = \sum_{i=1}^n L(r_i).$$

LEMMA II<sup>(6)</sup>. Per ogni superficie continua  $S$  si ha:

$$[L^2(\Phi_1) + L^2(\Phi_2) + L^2(\Phi_3)]^{1/2} \leq L(S) \leq L(\Phi_1) + L(\Phi_2) + L(\Phi_3).$$

### 3. Un teorema di approssimazione.

Ho già dimostrato il seguente

TEOREMA III<sup>(7)</sup>. — Sia  $S$  una superficie continua; sia la (I) una sua rappresentazione e siano  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  le relative trasformazioni piane. Ad ogni numero  $\varepsilon > 0$  arbitrario si può far corrispondere un gruppo di poligoni semplici  $[\pi_i, i = 1, 2, \dots, n]$  interni a  $Q$  a due a due senza punti interni in comune, tali che, se  $C_{ri}, r = 1, 2, 3, i = 1, 2, \dots, n$ , sono le curve piane continue e chiuse immagini delle poligonali  $\pi_i^*$  costituenti la periferia di  $\pi_i$  rispetto alle trasformazioni  $\Phi_r$ , risulta

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n C_{ri} \right| &< \varepsilon, & r = 1, 2, 3, & \quad \eta(\pi_i) < \varepsilon, & \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n t(\pi_i) &> T(S) - \varepsilon, & & \quad \sum_{i=1}^n t_r(\pi_i) > T(\Phi_r) - \varepsilon, & \quad r = 1, 2, 3, \\ \sum_{i=1}^n g(\pi_i) &> G(S) - \varepsilon, & & \quad \sum_{i=1}^n g_r(\pi_i) > G(\Phi_r) - \varepsilon, & \quad r = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

### 4. Dimostrazione del teorema A.

La dimostrazione del teorema A segue nella Nota II.

**Matematica.** — *Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue.* Nota II<sup>(\*)</sup> di L. CESARI, presentata dal Socio M. PICONE.

Nella presente Nota dimostrerò il seguente

TEOREMA A. — Se  $S$  è una superficie continua di area finita secondo Lebesgue, se  $S_p, p = 1, 2, \dots$ , è una successione di superficie continue tali che

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|S_p, S\| = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} L(S_p) = L(S),$$

allora, indicate con  $\Phi_r, r = 1, 2, 3, \Phi_{pr}, r = 1, 2, 3$ , le tre superficie piate relative alla superficie  $S$  e, rispettivamente, alle superficie  $S_p, p = 1, 2, \dots$ , si ha

$$(A) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} L(\Phi_{pr}) = L(\Phi_r), \quad r = 1, 2, 3.$$

(5) Loc. cit. in (3), p. 1375.

(6) Loc. cit. in (3), p. 1379.

(7) Loc. cit. in (3), p. 1376.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1947.

a) Dimostriamo anzitutto il teorema nell'ipotesi supplementare che le superficie  $S_p$  siano poliedriche. Esistono allora, delle superficie  $S, S_p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , rappresentazioni simultanee del tipo:

$$(5) \quad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in Q \equiv (0, 1, 0, 1)$$

$$(6) \quad S_p: \quad x = x_p(u, v), \quad y = y_p(u, v), \quad z = z_p(u, v), \quad (u, v) \in Q \equiv (0, 1, 0, 1)$$

tali che i limiti

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p(u, v) = x(u, v), \quad \lim_{p \rightarrow \infty} y_p(u, v) = y(u, v), \quad \lim_{p \rightarrow \infty} z_p(u, v) = z(u, v)$$

valgono uniformemente in  $Q$  e tali che qualunque segmento (poligonale) di  $Q$  ha per immagine sulla superficie  $S_p$  ancora una poligonale<sup>(1)</sup>.

Indichiamo con  $g_r, G_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ ,  $g, G$  le solite funzioni, relative alla rappresentazione (5) della superficie  $S$  e con  $g_r^{(p)}, G_r^{(p)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ ,  $g^{(p)}, G^{(p)}$  quelle relative alla rappresentazione (6) della superficie  $S_p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . Per ogni suddivisione di  $Q$  in poligoni semplici  $[\pi_i, i = 1, 2, \dots, m]$  risulta, per le ipotesi fatte,

$$(7) \quad \begin{cases} G(S) \cong \sum_{i=1}^m G(\pi_i), & G(\Phi_r) \cong \sum_{i=1}^m G_r(\pi_i), \quad r = 1, 2, 3, \\ G(S_p) \cong \sum_{i=1}^m G^{(p)}(\pi_i), & G(\Phi_{pr}) \cong \sum_{i=1}^m G_r^{(p)}(\pi_i), \quad r = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} & \text{D'altra parte } L(S) = G(S), \quad L(S_p) = G(S_p), \quad p = 1, 2, \dots, \text{ e quindi} \\ & \lim_{p \rightarrow \infty} G(S_p) = G(S). \end{aligned}$$

Possiamo supporre che esista una costante  $M$  tale che, per ogni  $p$ ,  $G(S_p) < M$ .

Ricordiamo inoltre che:

$$L(\Phi_r) = G(\Phi_r), \quad L(\Phi_{pr}) = G(\Phi_{pr}), \quad p = 1, 2, \dots, \quad r = 1, 2, 3.$$

Sia  $\varepsilon > 0$  un numero arbitrario. In forza del teorema III esiste un gruppo di poligoni  $[\pi_i, i = 1, 2, \dots, n]$  di  $Q$  a due a due senza punti interni in comune e tali che:

$$\sum_{i=1}^n g_r(\pi_i) > G(\Phi_r) - \varepsilon, \quad r = 1, 2, 3, \quad \sum_{i=1}^n g(\pi_i) > G(S) - \varepsilon.$$

Completiamo il gruppo  $[\pi_i, i = 1, 2, \dots, n]$  con nuovi poligoni  $[\pi_i, i = n+1, n+2, \dots, m]$  in modo che il gruppo  $[\pi_i, i = 1, 2, \dots, m]$  rappresenti una suddivisione di  $Q$  in poligoni semplici; poichè  $g_r(\pi_i) \geq 0$ ,  $g(\pi_i) \geq 0$ ,  $r = 1, 2, 3$ ,  $i = n+1, \dots, m$ , a maggior ragione si ha

$$(9) \quad \sum_{i=1}^m g_r(\pi_i) > G(\Phi_r) - \varepsilon, \quad r = 1, 2, 3, \quad \sum_{i=1}^m g(\pi_i) > G(S) - \varepsilon.$$

(1) Supporremo più precisamente che le funzioni  $x_p, y_p, z_p$  siano quasi lineari in  $Q$ , cioè siano continue in  $Q$  ed esista, per ogni  $p$ , una suddivisione di  $Q$  in triangoli, in ciascuno dei quali le funzioni  $x_p, y_p, z_p$  siano lineari.

Dalle relazioni  $G_r(\pi_i) \geq g_r(\pi_i)$ ,  $r=1, 2, 3$ ,  $G(\pi_i) \geq g(\pi_i)$  e dalle (7) otteniamo inoltre le seguenti:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(\Phi_r) \geq \sum_{i=1}^m G_r(\pi_i) \geq \sum_{i=1}^m g_r(\pi_i) > G(\Phi_r) - \varepsilon, \quad r=1, 2, 3, \\ G(S) \geq \sum_{i=1}^m G(\pi_i) \geq \sum_{i=1}^m g(\pi_i) > G(S) - \varepsilon. \end{array} \right.$$

Osserviamo che, per ogni  $i$  e  $p$ , valgono le seguenti relazioni (Lemma II)

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} G^2(\pi_i) \geq G_1^2(\pi_i) + G_2^2(\pi_i) + G_3^2(\pi_i), \quad G^{(p)^2}(\pi_i) \geq G_1^{(p)^2}(\pi_i) + G_2^{(p)^2}(\pi_i) + G_3^{(p)^2}(\pi_i) \\ g^2(\pi_i) = g_1^2(\pi_i) + g_2^2(\pi_i) + g_3^2(\pi_i), \quad g^{(p)^2}(\pi_i) = g_1^{(p)^2}(\pi_i) + g_2^{(p)^2}(\pi_i) + g_3^{(p)^2}(\pi_i) \\ i=1, 2, \dots, m, \quad p=1, 2, \dots, \end{array} \right.$$

e inoltre <sup>(2)</sup>

$$G(\Phi_r) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} G(\Phi_{pr}), \quad G_r(\pi_i) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} G_r^{(p)}(\pi_i), \quad r=1, 2, 3, \\ G(\pi_i) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} G^{(p)}(\pi_i).$$

A queste ultime relazioni va inoltre associata la (8). Esiste pertanto un  $\bar{p} > 0$  tale che, per ogni  $p > \bar{p}$ , risulta:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(\Phi_{pr}) > G(\Phi_r) - \varepsilon, \quad r=1, 2, 3, \\ G(S) + \varepsilon > G(S_p) > G(S) - \varepsilon, \\ G_r^{(p)}(\pi_i) > G_r(\pi_i) - \frac{\varepsilon}{m}, \quad r=1, 2, 3, \\ G^{(p)}(\pi_i) > G(\pi_i) - \frac{\varepsilon}{m}, \quad i=1, 2, \dots, m. \end{array} \right.$$

Poniamo, per un qualsiasi  $p > \bar{p}$ ,

$$\beta_{ri} = G_r^{(p)}(\pi_i) \quad \beta_i = G^{(p)}(\pi_i), \quad r=1, 2, 3, \quad i=1, 2, \dots, m, \\ \alpha_{ri} = G_r(\pi_i) \quad \alpha_i = G(\pi_i), \quad r=1, 2, 3, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Dalle (12) segue:

$$(13) \quad \beta_{ri} > \alpha_{ri} - \frac{\varepsilon}{m}, \quad \beta_i > \alpha_i - \frac{\varepsilon}{m}, \quad r=1, 2, 3, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

e, dalle (11),

$$(14) \quad \beta_i^2 \geq \beta_{1i}^2 + \beta_{2i}^2 + \beta_{3i}^2, \quad \alpha_i^2 \geq \alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Poniamo

$$(15) \quad \alpha_i - [\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2]^{1/2} = \delta_i, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

(2) Loc. cit. in (3), pp. 1346, 1375.

Intanto  $\delta_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Inoltre, ricordando le (10) e le (11),

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \sum_{i=1}^m \delta_i &= \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{i=1}^m [\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2]^{1/2} = \\
 &= \sum_{i=1}^m G(\pi_i) - \sum_{i=1}^m [G_1^2(\pi_i) + G_2^2(\pi_i) + G_3^2(\pi_i)]^{1/2} \leq \\
 &\leq G(S) - \sum_{i=1}^m [g_1^2(\pi_i) + g_2^2(\pi_i) + g_3^2(\pi_i)]^{1/2} = \\
 &= G(S) - \sum_{i=1}^m g(\pi_i)
 \end{aligned}$$

e, di nuovo dalla seconda delle (10),  $\sum_{i=1}^m \delta_i < \varepsilon$ .

Dalla prima delle (14) e dalla (15) segue inoltre

$$(17) \quad \beta_{ri}^2 \leq \beta_i^2 - \beta_{2i}^2 - \beta_{3i}^2, \quad \alpha_i^2 - \alpha_{2i}^2 - \alpha_{3i}^2 = \alpha_{1i}^2 + 2\delta_i[\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2]^{1/2} + \delta_i^2.$$

Si osservi ancora che:

$$(18) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^m G(\pi_i) \leq G(S) < M \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{ri} = \sum_{i=1}^m G_r(\pi_i) \leq \sum_{i=1}^m G(\pi_i) \leq G(S) < M, \quad r = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Poniamo

$$(19) \quad \beta_i = \alpha_i + \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Dalle (13) segue:

$$\tau_i + \frac{\varepsilon}{m} = \beta_i - \alpha_i + \frac{\varepsilon}{m} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

e quindi

$$\text{se } \tau_i \geq 0, \quad |\tau_i| = \tau_i < \tau_i + 2\frac{\varepsilon}{m},$$

$$\text{se } \tau_i < 0, \quad |\tau_i| < \frac{\varepsilon}{m} < \frac{\varepsilon}{m} + \left(\tau_i + \frac{\varepsilon}{m}\right) = \tau_i + 2\frac{\varepsilon}{m},$$

ossia, in tutti i casi,

$$|\tau_i| < \tau_i + 2\frac{\varepsilon}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Ne segue, sommando rispetto ad  $i$ ,

$$\sum_{i=1}^m |\tau_i| < \sum_{i=1}^m \tau_i + 2\varepsilon = \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i + 2\varepsilon = \sum_{i=1}^m G^{(p)}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m G(\pi_i) + 2\varepsilon.$$

Ma

$$\sum_{i=1}^m G^{(p)}(\pi_i) = G(S_p), \quad \sum_{i=1}^m G(\pi_i) > G(S) - \varepsilon,$$



e quindi, dalla seconda delle (12),

$$(20) \quad \sum_{i=1}^m |\tau_i| < G(S_p) - [G(S) - \varepsilon] + 2\varepsilon < \\ < [G(S) + \varepsilon] - [G(S) - \varepsilon] + 2\varepsilon = 4\varepsilon.$$

Poniamo

$$\sqrt{\beta_{2i}^2 + \beta_{3i}^2} = \sqrt{\alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2} + \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Dalle (13) segue:

$$\sqrt{\alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2} \leq \sqrt{\left(\beta_{2i} + \frac{\varepsilon}{m}\right)^2 + \left(\beta_{3i} + \frac{\varepsilon}{m}\right)^2} \leq \\ \leq \sqrt{\beta_{2i}^2 + \beta_{3i}^2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^2} < \sqrt{\beta_{2i}^2 + \beta_{3i}^2} + 2\frac{\varepsilon}{m}$$

e quindi

$$(21) \quad \lambda_i = \sqrt{\beta_{2i}^2 + \beta_{3i}^2} - \sqrt{\alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2} > -2\frac{\varepsilon}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Ricordando le (13) e le (14)

$$-\frac{\varepsilon}{m} < \beta_{1i} - \alpha_{1i} = \sqrt{\beta_{2i}^2 + \beta_{3i}^2} - \sqrt{\alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2} > -2\frac{\varepsilon}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Dalle (19) e (21) segue

$$-\frac{\varepsilon}{m} < \beta_{1i} - \alpha_{1i} < \sqrt{(\alpha_i + \tau_i)^2 - (\alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2 + \lambda_i^2)} - \alpha_{1i} = \\ = \sqrt{(\alpha_i^2 - \alpha_{2i}^2 - \alpha_{3i}^2) + (2\alpha_i\tau_i + \tau_i^2)} - 2\lambda_i\sqrt{\alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2} - \lambda_i^2 - \alpha_{1i}.$$

Dalle (17) e (21) segue ora

$$-\frac{\varepsilon}{m} < \beta_{1i} - \alpha_{1i} < \\ < \sqrt{\alpha_{1i}^2 + 2[\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2]^{1/2}\delta_i + \delta_i^2 + 2\alpha_i|\tau_i| + \tau_i^2} + 2\frac{\varepsilon}{m}[\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2]^{1/2} - \alpha_{1i} < \\ < \sqrt{\alpha_{1i}^2 + 2[\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2]^{1/2}\left(\delta_i + \frac{\varepsilon}{m}\right) + 2\alpha_i|\tau_i| + \delta_i^2 + \tau_i^2} - \alpha_{1i} < (3) \\ < 2\sqrt{[\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2]^{1/2}\left(\delta_i + \frac{\varepsilon}{m}\right) + 2\sqrt{\alpha_i|\tau_i|} + |\tau_i| + \delta_i} \leq \\ \leq 2\sqrt{\sum_{r=1}^3 \alpha_{ri}\left(\delta_i + \frac{\varepsilon}{m}\right) + 2\sqrt{\alpha_i|\tau_i|} + |\tau_i| + \delta_i} < 2\sum_{r=1}^3 \sqrt{\alpha_{ri}\left(\delta_i + \frac{\varepsilon}{m}\right) +} \\ + 2\sqrt{\alpha_i|\tau_i|} + |\tau_i| + \delta_i.$$

(3) Si noti che, se  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , allora  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i$  e quindi

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} - \alpha_1 \leq \sum_{i=2}^n \alpha_i.$$

Sommando rispetto ad  $i$  si trova, applicando anche la disuguaglianza di Schwarz,

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< \sum_{i=1}^m \beta_{1i} - \sum_{i=1}^m \alpha_{1i} \leq 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{i=1}^m \sqrt{\alpha_{ri} \left( \delta_i + \frac{\varepsilon}{m} \right)} + 2 \sum_{i=1}^m \sqrt{\alpha_i |\tau_i|} + \\ &+ \sum_{i=1}^m |\tau_i| + \sum_{i=1}^m \delta_i \leq 2 \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ri} \cdot \sum_{i=1}^m \left( \delta_i + \frac{\varepsilon}{m} \right) \right]^{1/2} + \\ &+ 2 \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^m |\tau_i| \right]^{1/2} + \sum_{i=1}^m |\tau_i| + \sum_{i=1}^m \delta_i \end{aligned}$$

e, ricordando le (18), (16), (20):

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< \sum_{i=1}^m \beta_{1i} - \sum_{i=1}^m \alpha_{1i} \leq 2 \cdot 3 [M(\varepsilon + \varepsilon)]^{1/2} + 2 [M \cdot 4\varepsilon]^{1/2} + 4\varepsilon + \varepsilon \\ &= 6\sqrt{2M\varepsilon} + 4\sqrt{M\varepsilon} + 5\varepsilon < 16[\sqrt{M\varepsilon} + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$-\varepsilon < \sum_{i=1}^m G_i^{(p)}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m G_i(\pi_i) < 16[\sqrt{M\varepsilon} + \varepsilon].$$

Ma

$$\sum_{i=1}^m G_i^{(p)}(\pi_i) = G(\Phi_{1p}), \quad G(\Phi_1) - \varepsilon < \sum_{i=1}^m G_i(\pi_i) < G(\Phi_1)$$

e quindi, in definitiva,

$$-2\varepsilon < G(\Phi_{1p}) - G(\Phi_1) < 16(\sqrt{M\varepsilon} + \varepsilon),$$

ove  $p$  è un qualunque intero  $> \bar{p}$ . Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue l'esistenza del limite

$$\lim_{p \rightarrow \infty} G(\Phi_{1p}) = G(\Phi_1)$$

ed essendo (Teorema II),

$$L(\Phi_{1p}) = G(\Phi_{1p}), \quad L(\Phi_1) = G(\Phi_1),$$

segue la prima delle (A).

In modo analogo, scambiando l'ufficio degli indici 1, 2, 3, si ottengono le rimanenti (A).

Il teorema A è così dimostrato nell'ipotesi fatta che le superficie  $S_p$  siano poliedriche.

b) Dimostriamo il teorema A in generale. Allo scopo poniamo

$$\delta_p = \|S_p, S\|, \quad \sigma_p = |L(S_p) - L(S)|$$

ed osserviamo che:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_p = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_p = 0.$$

Possiamo inoltre supporre che tutte le superficie  $S_p$  abbiano area finita secondo Lebesgue. Pertanto, per ogni  $p$ , esiste una successione di superficie poliedriche

$$\Sigma_{1p}^{(p)}, \Sigma_{2p}^{(p)}, \dots, \Sigma_{qp}^{(p)}, \dots, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \Sigma_q^{(p)} = S_p.$$

tali che

$$\lim_{q \rightarrow \infty} L(\Sigma_q^{(p)}) = L(S_p), \quad L(S_p) < +\infty.$$

Diremo  $\Phi_{qr}^{(p)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , le tre trasformazioni piane relative alla superficie  $\Sigma_q^{(p)}$ ,  $q = 1, 2, \dots$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . Per quanto si è dimostrato in a) risulta

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L(\Phi_{qr}^{(p)}) = L(\Phi_{pr}), \quad r = 1, 2, 3, \quad p = 1, 2, \dots$$

Per ogni  $p$  esiste pertanto un indice  $q = q(p)$  tale che

$$(22) \quad \begin{aligned} \|\Sigma_q^{(p)}, S_p\| &< \frac{1}{p}, \quad |L(\Sigma_q^{(p)}) - L(S_p)| < \frac{1}{p}, \\ |L(\Phi_{q(p)r}^{(p)}) - L(\Phi_{pr})| &< \frac{1}{p}, \quad r = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Poniamo per semplicità

$$\Sigma^{(p)} \equiv \Sigma_{q(p)}^{(p)}, \quad \Phi_r^{(p)} \equiv \Phi_{q(p)r}^{(p)}, \quad r = 1, 2, 3, \quad p = 1, 2, \dots,$$

onde le (22) diventano

$$\begin{aligned} \|\Sigma^{(p)}, S_p\| &< \frac{1}{p}, \quad |L(\Sigma^{(p)}) - L(S_p)| < \frac{1}{p}, \quad |L(\Phi_r^{(p)}) - L(\Phi_{pr})| < \frac{1}{p}, \\ r &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Consideriamo la successione

$$\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(3)}, \dots, \Sigma^{(p)}, \dots$$

di superficie poliedriche ed osserviamo che

$$\|\Sigma^{(p)}, S\| \leq \|\Sigma^{(p)}, S_p\| + \|S_p, S\| < \delta_p + \frac{1}{p}$$

$$|L(\Sigma^{(p)}) - L(S)| \leq |L(\Sigma^{(p)}) - L(S_p)| + |L(S_p) - L(S)| < \sigma_p + \frac{1}{p}$$

e quindi

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\Sigma^{(p)}, S\| = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} L(\Sigma^{(p)}) = L(S).$$

Per quanto si è dimostrato in a) risulta

$$\lim_{p \rightarrow \infty} L(\Phi_r^{(p)}) = L(\Phi_r), \quad r = 1, 2, 3,$$

e quindi, posto

$$\tau_p = \max_{r=1,2,3} |L(\Phi_r^{(p)}) - L(\Phi_r)|,$$

risulta  $\lim_{p \rightarrow \infty} \tau_p = 0$ .

Si ha ora per ogni  $p$  ed  $r$ ,

$$\begin{aligned} |L(\Phi_{pr}) - L(\Phi_r)| &\leq |L(\Phi_{pr}) - L(\Phi_r^{(p)})| + |L(\Phi_r^{(p)}) - L(\Phi_r)| < \\ < \tau_p + \frac{1}{p}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad r = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{p \rightarrow \infty} L(\Phi_{pr}) = L(\Phi_r), \quad r = 1, 2, 3.$$

Il teorema A è così completamente dimostrato.

**Matematica** (Analisi). — *Attorno a una dimostrazione geometrica di un teorema di Analisi.* Nota<sup>(\*)</sup> di L. CASTOLDI, presentata dal Socio L. BERZOLARI.

È notissimo il Teorema (di Jacobi) secondo cui, condizione necessaria e sufficiente affinché l'espressione differenziale

$$X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$$

ammetta un fattore integrante  $\mu(x, y, z)$  è che sia identicamente

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

Sotto forma vettoriale il Teorema può enunciarsi dicendo che condizione necessaria e sufficiente affinché un vettore  $\bar{v}(x, y, z)$  sia della forma

$$\bar{v} = k \operatorname{grad} \varphi,$$

è che sia

$$\operatorname{rot} \bar{v} \times \bar{v} = 0.$$

Non credo sia stata data finora una dimostrazione puramente geometrica di questo Teorema. Anche Burali-Forti e Marcolongo nel loro ormai classico *Trattato di Analisi vettoriale* [Vol. I, *Trasformazioni lineari*, p. 251] ricorrono, a questo proposito, ad argomentazioni non strettamente intrinseche alla questione. Aggiungasi che il Juvet nelle sue eleganti *Lezioni di Calcolo vettoriale*<sup>(1)</sup>, evidentemente non a conoscenza di questo punto dell'Opera degli Autori citati, dopo aver applicato un procedimento di indole prevalentemente cartesiana, esplicitamente dichiara: *On remarquera qu'il a fallu passer par les coordonnées pour utiliser un théorème sur les équations aux différentielles totales. Il est difficile d'éviter ce détour.*

Credo pertanto cosa non priva di qualche interesse fornire qui una dimostrazione del Teorema citato, di carattere strettamente vettoriale.

Se, dapprima, esistono scalari  $k$  e  $\varphi$ , per cui sia

$$(1) \quad \bar{v} = k \operatorname{grad} \varphi,$$

si ha:

$$(2) \quad \operatorname{rot} \bar{v} = \operatorname{grad} k \wedge \operatorname{grad} \varphi,$$

e quindi:

$$(3) \quad \operatorname{rot} \bar{v} \times \bar{v} = 0.$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1947.

(1) G. JUVET, *Léçons d'Analyse vectorielle*. I. P., p. 114.



Viceversa, se vale la (3), si consideri la congruenza delle linee di flusso del campo  $\bar{v} \wedge \text{rot } \bar{v}$ . Presa ad arbitrio una linea  $l$  di questa congruenza e su essa due punti qualunque  $A, B$  limitanti su  $l$  l'arco finito  $\widehat{AB}$ , si costruisca la striscia vorticoso  $\Sigma$  avente  $\widehat{AB}$  come arco direttore <sup>(2)</sup>. Se poi  $C$  e  $D$  sono due punti arbitrari giacenti rispettivamente sulle linee di vortice  $m$  ed  $n$  uscenti da  $A$  e da  $B$  e situati su  $\Sigma$ , da una medesima parte di  $\widehat{AB}$ , si ha sempre:

$$\oint_{ABDCA} \bar{v} \times dP = 0,$$

dove va inteso che il circuito di integrazione è costituito dall'arco  $\widehat{AB}$  di  $l$ , dagli archi  $\widehat{CA}$  e  $\widehat{BD}$  rispettivamente di  $m$  ed  $n$  e da un arbitrario arco  $\widehat{DC}$  giacente su  $\Sigma$ .

Ma poichè è separatamente, per la stessa definizione delle linee  $l, m, n$ ,

$$\int_A^B \bar{v} \times dP = 0, \quad \int_C^A \bar{v} \times dP = 0, \quad \int_B^D \bar{v} \times dP = 0,$$

si conclude che è anche:

$$(4) \quad \int_D^C \bar{v} \times dP = 0,$$

qualunque sia l'arco congiungente su  $\Sigma$  i punti  $C$  e  $D$ .

Da ciò facilmente consegue che  $\bar{v}$  è, in ogni punto di  $\Sigma$ , normale a  $\Sigma$ . Infatti, indicato con  $\bar{n}$  il versore normale a  $\Sigma$  in un verso arbitrario, consideriamo le linee di flusso del campo, definito su  $\Sigma$ ,  $\bar{n} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{n})$ , le quali, come subito si verifica, risultano normali alle linee di vortice riempienti  $\Sigma$ . Sceltane poi una ad arbitrio, assumiamo come punti  $C$  e  $D$  quelli in cui essa necessariamente interseca le linee di vortice  $m$  ed  $n$ . Integrando lungo quest'arco  $\widehat{DC}$  e indicando con  $\tau$  un conveniente parametro caratterizzante i punti dell'arco stesso, otteniamo:

$$\int_D^C \bar{n} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{n}) \times \bar{v} d\tau = \int_D^C [v^2 - (\bar{n} \times \bar{v})^2] d\tau \geq 0,$$

valendo il segno di uguaglianza soltanto nel caso che, lungo  $\widehat{DC}$  sia dappertutto  $\bar{v}$  parallelo ad  $\bar{n}$ . Se ciò avviene, per l'arbitrarietà dell'arco  $\widehat{DC}$ , è per ciò stesso dimostrata l'ortogonalità di  $\bar{v}$  a  $\Sigma$ . Il caso in cui valga il segno di disuguaglianza è contrario alla (4) e non può quindi verificarsi. Se notiamo

(2) Qui e nel seguito designamo come *linee di vortice* le linee di flusso del campo  $\text{rot } \bar{v}$ .

poi che in ogni punto di  $\Sigma$  il vettore  $\bar{v} \wedge \text{rot } \bar{v}$ , come perpendicolare a  $\bar{v}$ , giace in  $\Sigma$ , riconosciamo che  $\Sigma$  è anche superficie di flusso di  $\bar{v} \wedge \text{rot } \bar{v}$ .

Concludiamo che le superficie vorticosi  $\Sigma$  aventi per direttrici linee di flusso di  $\bar{v} \wedge \text{rot } \bar{v}$  hanno per traiettorie ortogonali le linee di flusso del campo assegnato  $\bar{v}$ .

E infine: *Condizione necessaria e sufficiente affinché sia  $\bar{v} = k \text{grad } \varphi$  è che sia  $\bar{v} \times \text{rot } \bar{v} = 0$ . È verificata questa circostanza, le superficie  $\varphi = \text{cost.}$  sono ad un tempo superficie vorticosi e superficie di flusso del campo  $\bar{v} \wedge \text{rot } \bar{v}$ .*

**Matematica** (Analisi). — *Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti.* Nota I<sup>(\*)</sup> di L. CASTOLDI, presentata dal Socio L. BERZOLARI.

1. Il problema della determinazione di criteri per la dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti è stato ripreso, qualche anno addietro, in una pregevole Memoria Pontificia, dal Coronato <sup>(1)</sup>, che in essa conseguiva notevoli generalizzazioni di precedenti teoremi del Bianchi e del Picone.

Non ci sembra sia stato altrettanto approfondito lo studio di criteri per la determinazione del *grado di dipendenza lineare* di più funzioni, intendendo per tale il numero delle relazioni lineari indipendenti, a coefficienti costanti e omogenee esistenti fra le funzioni date.

Scopo della presente Nota è di due altre che la seguiranno è una trattazione simultanea delle due questioni accennate, con subordinazione della prima alla seconda, secondo un metodo dimostrativo che crediamo nuovo e con risultati che appaiono dotati di notevole generalità.

2. Siano

$$(1) \quad y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^m) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$n$  funzioni di  $m$  variabili indipendenti, analitiche, come supporremo dapprima, in un comune campo connesso  $G$  di definizione.

Indicheremo con  $M$  la caratteristica della matrice funzionale

$$(2) \quad \left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \right\| \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ r = 1, 2, \dots, m \end{array} \right),$$

e sarà, naturalmente,  $M$  non maggiore di ciascuno dei due numeri  $m$  ed  $n$ .

Come detto, ci proponiamo qui di istituire un criterio atto a giudicare, a priori, dell'esistenza o meno di relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti fra le (1).

(\*) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1947.

(1) S. CORONATO, *Criteri Wronskiani di dipendenza lineare per le funzioni di più variabili indipendenti*. «Pubblic. dell'Ist. Naz. per le applicazioni del Calcolo», n. 112 (1941).

Divideremo la trattazione del problema in tre parti:

In una prima, cui è dedicata la presente Nota, stabiliremo un legame esistente tra il grado di dipendenza lineare delle funzioni date e la caratteristica di una determinata matrice infinita; in una seconda, mostreremo come la determinazione di tale caratteristica si riduca in effetti ad una analoga determinazione per convenienti matrici finite; in una terza, indicheremo come si modifichino le precedenti conclusioni allorchè si lasci cadere l'ipotesi fatta di analiticità delle funzioni  $y^i$  e rileveremo alcuni punti di divergenza tra i risultati ottenuti e talune note proposizioni relative all'argomento in istudio.

3. Per brevità, denoteremo con  $y^i_{|j_1 \dots j_l}$  la derivata di un ordine  $l$  qualunque della funzione  $y^i$  rispetto alle variabili (eventualmente in parte o in tutto coincidenti)  $x^{j_1}, \dots, x^{j_l}$  scriveremo cioè:

$$(3) \quad y^i_{|j_1 \dots j_l} = \frac{\partial^l y^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_l}}.$$

Ciò posto, consideriamo la matrice ad infinite righe e ad  $n$  colonne

$$(4) \quad \mathfrak{D}_{\infty} = \begin{vmatrix} y^1 & y^2 & \dots & y^n \\ y^1_{|1} & y^2_{|1} & \dots & y^n_{|1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^1_{|m} & y^2_{|m} & \dots & y^n_{|m} \\ y^1_{|12} & y^2_{|12} & \dots & y^n_{|12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^1_{|j_1 \dots j_l} & y^2_{|j_1 \dots j_l} & \dots & y^n_{|j_1 \dots j_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

nelle cui successive righe compaiono, ordinatamente, le  $y^i$ , le loro derivate prime rispetto ad  $x^1$ , ad  $x^2, \dots$ , ad  $x^n$ , indi le derivate seconde, terze,  $\dots$ , e, successivamente, tutte le derivate di ogni ordine delle funzioni date <sup>(2)</sup>.

Premesso ciò dimostreremo che:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè tra le funzioni analitiche  $y^i$  sussistano, in tutto  $G$ ,  $h$  relazioni lineari indipendenti, omogenee e a coefficienti costanti è che la matrice (4) abbia, in tutto  $G$ , caratteristica  $n - h$ .*

Supponiamo infatti dapprima che fra le funzioni (1) sussistano  $h$  relazioni del tipo indicato

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n C_{\alpha i} y^i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h)$$

(2) Per ogni ordine di derivazione, la collocazione, nella matrice (4) delle righe corrispondenti alle singole derivate può fissarsi con criteri facilmente immaginabili, e, del resto, arbitrari.





Derivando ora ciascuna delle prime  $n - h'$  delle (8) rispetto ad  $x'$  e confrontando il risultato colla successiva, si deduce che è:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k'=h'+1}^n \varphi_{\alpha' k', 1} \cdot y^{k'} = 0 \\ \sum_{k'=h'+1}^n \varphi_{\alpha' k', 1} \cdot y_{/1}^{k'} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k'=h'+1}^n \varphi_{\alpha' k', 1} \cdot y_{/(1)^{n-h'-1}}^{k'} = 0, \end{array} \right.$$

il sussisterà delle quali, tenuto presente il supposto valore  $n - h'$  della caratteristica di (4) e la risolubilità delle (5) rispetto alle  $y^{\alpha'}$  ( $\alpha' = 1, 2, \dots, h'$ ) implica che sia

$$(10) \quad \varphi_{\alpha' k', 1} = 0 \quad (k' = h' + 1, \dots, n),$$

cioè le  $\varphi_{\alpha' k'}$  indipendenti da  $x^1$ . Analogamente si conclude che le  $\varphi_{\alpha' k'}$  ( $k' = h' + 1, \dots, n$ ) non dipendono da alcun'altra delle  $x^r$ , il che, data l'arbitrarietà del valore fisso attribuito ad  $\alpha'$ , dimostra l'ultimo asserto.

Tornando, dopo ciò, all'ipotesi iniziale che tra le  $y^i$  sussistano precisamente  $h$  relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, risulta di qui immediatamente esclusa la possibilità che la caratteristica di  $\mathfrak{D}_{\infty}^n$  riesca minore di  $n - h$ , giacchè il verificarsi di ciò porterebbe all'esistenza tra le  $y^i$  di più di  $h$  relazioni di tal tipo.

L'enunciato principale del presente numero è quindi completamente provato.

*Osservazione I.* — Poichè la matrice funzionale delle  $y^i$ , che si è supposta di caratteristica  $M$ , entra, come parte, nella matrice infinita (4), sarà certo  $n - h \geq M$ , cioè  $h \leq n - M$ . In particolare, quando sia  $n = m = M$  non sussistono certo relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti tra la  $y^i$ , d'accordo col fatto che, in tal caso, non sussiste tra esse alcuna relazione funzionale generale. Può, peraltro, accadere che sia  $M \leq m < n$  e tuttavia  $h = 0$ , nel qual caso sussistono fra le  $y^i$   $n - M$  relazioni funzionali indipendenti, ma nessuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti.

*Osservazione II.* — Rimane da considerare ciò che accade allorchè, essendo generalmente  $h$  la caratteristica della matrice  $\mathfrak{D}_{\infty}^n$  in  $G$ , esistano punti di  $G$ , costituenti un insieme  $I$  non riempiente porzioni connesse di  $G$  di dimensione spaziale pari a quella di  $G$ , in cui tale caratteristica risulti minore di  $h$  (3). Ovviamente non è il caso di considerare insiemi di natura

(3) L'ipotesi che nei punti di un insieme  $I$  soddisfacente alle condizioni enunciate possa la detta caratteristica riuscire maggiore di  $h$  è senz'altro da escludere per la continuità delle  $y^i$  e delle loro derivate, in virtù della quale il non annullarsi di un determi-

diversa da quella indicata, giacchè la natura analitica delle  $y^i$ , e quindi dei determinanti che entrano nel calcolo delle caratteristiche in questione, implica che se un tale determinante si annulla in una regione connessa di  $G$  di dimensione spaziale pari a quella di  $G$ , esso si annulla identicamente in  $G$ . Premesso ciò, osserviamo che, in un punto  $P$  di  $I$ , per l'ipotesi fatta che ivi la considerata caratteristica sia minore di  $h$ , le equazioni (9) forniscono insiemi di valori indeterminati delle  $\varphi_{\alpha'k'j}$  e fra essi, come in infiniti punti di un intorno completo di  $P$ , anche l'insieme dei valori nulli. Si riconosce subito, per altro, che soltanto quest'ultima scelta dei valori delle  $\varphi_{\alpha'k'j}$  in  $P$  è compatibile colla analiticità delle funzioni in istudio, in particolare colla continuità delle loro derivate prime e ciò implica che, anchè nelle attuali ipotesi più late, i soli valori delle  $\varphi_{\alpha'k'j}$  soddisfacenti alle (7) sono necessariamente costanti in tutto  $G$ .

Concludiamo che *tutti gli enunciati precedenti continuano a valere, per funzioni analitiche, anche quando si supponga che esistano in  $G$  insiemi  $I$  del tipo indicato in cui la caratteristica di  $\mathfrak{D}_{\infty}^n$  riesca minore di  $h$ .*

Nel seguito, quindi, sempre riferendoci a tali funzioni, potremo omettere la locuzione: *in tutto  $G$*  precisante l'insieme dei punti in cui la caratteristica delle matrici considerate ha un determinato valore, sostituendovi l'altra: *in  $G$* , od omettendola affatto.

**Matematica.** — *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*<sup>(\*)</sup>. Nota di G. FICHERA, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

Forse non tutti i matematici attribuiscono lo stesso significato alla frase *integrare un'equazione differenziale*. Secondo alcuni infatti tale scopo si consegue quando, indipendentemente da qualsiasi analisi esistenziale, si giunge ad esprimere l'eventuale soluzione con noti simboli — fra i quali il preferito è quello di  $\int$  — operanti su i dati del problema, pur essendo le formole a cui così si perviene ben lontane dal fornire l'effettiva conoscenza quantitativa e di molte proprietà della soluzione. L'analista, però, che a contatto con i problemi delle applicazioni si proponga la sostanziale risoluzione di essi, non può certo far suo tale punto di vista, nè può certo, come spesso accade in matematica, modificare a suo piacimento i dati e le ipotesi tanto da ridurre il problema in istudio nello schema di quelli che si sanno risolvere nel senso

nante formato con esse in un punto  $P$  di  $G$  implica che tale determinante rimanga diverso da zero in tutto un intorno completo di  $P$  della dimensione di  $G$ , contrariamente alle ipotesi fatte su  $I$ .

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

sopradetto, e si terrà pago solo quando sarà riuscito a istituire un procedimento, l'applicazione del quale conduca alla valutazione numerica dell'incognita, annettendo inoltre fondamentale importanza ai teoremi di esistenza e determinazione di questa. Ed è tale veduta — certo non comoda — che mette il ricercatore in condizione di dover affrontare problemi ben ardui, ma di suggestiva bellezza, mentre gli dà la possibilità di recare sostanziali contributi al progresso dell'Analisi.

A tale punto di vista è ispirata l'opera scientifica di Mauro Picone e della sua scuola. Quest'Autore, quale fondatore e direttore di un Istituto per le applicazioni del calcolo, da oltre un ventennio ha indirizzato le sue ricerche alla scoperta di nuovi metodi di effettiva risoluzione dei problemi al contorno per le equazioni e i sistemi di equazioni alle derivate parziali, metodi che discostandosi dagli schemi classici, aprono un nuovo capitolo nella teoria di dette equazioni.

Fra essi particolarmente efficace si rivela quello che, partendo da un sistematico impiego della formola di Green, indica un procedimento per la traduzione in equazione integrale di prima specie, ovvero sia in un sistema integrale di Fischer Riesz, dei problemi al contorno per le equazioni lineari. Tale metodo è stato dal Picone illustrato in diversi lavori <sup>(1)</sup> ed Egli ha posto il problema di costruire, nei vari casi, i sistemi di funzioni che consentono l'indicata traduzione e di dimostrarne la completezza.

Luigi Amerio in alcuni suoi lavori di alto pregio è pervenuto a concretare con grande generalità la sopradetta costruzione <sup>(2)</sup>. Egli si serve costantemente di un teorema, già di per sé notevolissimo, che può dirsi d'inversione della formola di Green. L'analogo risultato è stato successivamente da me conseguito per il sistema di equazioni dell'equilibrio di un solido elastico, isotropo e omogeneo <sup>(3)</sup>. Ho quindi indirizzato le mie indagini per cercare di compiere la seconda parte della ricerca posta dal Picone, cioè la dimostrazione della chiusura nello spazio funzionale di Hilbert di determinati sistemi di funzioni.

(1) M. PICONE, a) *Appunti d'Analisi superiore*, § 8 del Cap. VII: *Metodi generali risolutivi* [Rondinella, Napoli (1940)]; b) *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti* [«Atti della Accademia delle Scienze di Torino», vol. 75 (1939-40)]; c) *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali* [«Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», 3 Note (1947)].

(2) L. AMERIO, a) *Sull'integrazione dell'equazione  $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$  in un dominio di connessione qualsiasi* [«Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere» Classe di Scienze, vol. 28 (1944-45)]; b) *Sull'integrazione dell'equazione  $\Delta_{2k} u = f$*  [«Annali di Matematica» tomo 24, serie IV (1945)]; c) *Sull'equazione di propagazione del calore* [«Rend. di matematica e delle sue applicazioni» (Roma, 1946)]; d) *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico*.

(3) G. FICHERA, a) *Sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità* [«Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei» (1947)]; b) *Sull'equilibrio di un corpo elastico, isotropo e omogeneo*, in corso di stampa nei «Rend. del Seminario matematico dell'Università di Padova».

Ho già completamente risolto la questione per l'operatore  $\Delta_2$ , che ho considerato per primo, dato che la sua trattazione, formalmente più semplice rispetto ai casi più generali, contiene però tutti quegli elementi concettuali che intervengono poi, anche per equazioni di tipo più complicato, come, per esempio, le equazioni dell'elasticità, alle quali sono rivolte le mie attuali ricerche.

La presente Nota ha per scopo di far conoscere i risultati a cui sono pervenuto.

Veniamo prima ad esporre, con precisa formulazione, il problema considerato.

Sia  $D$  un dominio, che - per fissare le idee - supporremo appartenente ad uno spazio a tre dimensioni, limitato esternamente dalla superficie chiusa  $\Sigma_0$  ed internamente dalle superficie chiuse  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$ . Siano  $O_1, O_2, \dots, O_p$  punti arbitrariamente fissati nell'interno di ciascuno dei domini limitati da  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$  ed  $O_0$  un qualsiasi fissato punto dello spazio. Diciamo  $\rho_s, \theta_s, \varphi_s$  ( $s = 0, 1, \dots, p$ ) le coordinate polari del generico punto  $P$ , avendo assunto  $O_s$  come polo. Poniamo, detto  $\{Y_{mi}(\theta_s, \varphi_s)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2m+1$ ) un sistema fondamentale di funzioni sferiche di ordine  $m$

$$\omega_{mi}(P) = \rho_0^m Y_{mi}(\theta_0, \varphi_0) \quad , \quad \tau_{mi}^{(s)}(P) = \frac{Y_{mi}(\theta_s, \varphi_s)}{\rho_s^{m+1}}.$$

Indichiamo con  $\{v_k(P)\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) il sistema costituito dalla infinità numerabile di funzioni che si ottiene prendendo tutte le funzioni  $\omega_{mi}$  e  $\tau_{mi}^{(s)}$  quando gli indici assumono i seguenti valori

$$i = 1, 2, \dots, p \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad , \quad s = 1, 2, \dots, 2m+1.$$

Se  $D$  ha semplice la connessione superficiale, se cioè la sua frontiera è costituita dalla sola superficie  $\Sigma_0$ , il sistema contiene esclusivamente polinomi armonici, ed ogni qualsiasi altro polinomio armonico può ottenersi come combinazione lineare di un numero finito di questi.

Detta  $\mathcal{F}D$  la frontiera di  $D$ , si pone il seguente problema:

*Se  $\alpha(P)$  e  $\beta(P)$  sono funzioni definite su  $\mathcal{F}D$ , in opportune ipotesi per esse, dimostrare la completezza hilbertiana su  $\mathcal{F}D$  (4) del sistema di funzioni*

$$\left\{ \alpha v_k + \beta \frac{\partial v_k}{\partial n} \right\}.$$

(4) Ricordiamo che il sistema di funzioni  $\{\psi_k\}$ , di norma sommabile nell'insieme  $E$ , dicesi ivi hilbertianamente completo se, dedotto da esso un sistema ortogonale e normale  $\{\varphi_k\}$  per esempio col procedimento di SCHMIDT, comunque si consideri la funzione  $f$  hilbertiana (cioè di norma sommabile) in  $E$  si ha che la serie  $\sum_k \varphi_k \int_E f \bar{\varphi}_k dT$  (con  $\bar{a}$  si indica il complesso coniugato di  $a$ ) converge in media verso la  $f$ . È ben noto che condizione necessaria e sufficiente per la completezza di  $\{\varphi_k\}$  è che, se la funzione hilbertiana  $f$  verifica le infinite equazioni

$$\int_E f \bar{\varphi}_k dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

essa deve quasi ovunque annullarsi.



I casi che interessano le applicazioni sono precisamente i seguenti

$$\alpha = 1 \quad , \quad \beta = 0;$$

$$\alpha \neq 0 \quad , \quad \beta = 1;$$

$$\alpha = -h(P) \quad , \quad \beta = 1;$$

con  $h(P)$  funzione quasi continua e limitata su  $\mathcal{F}D$  e mai negativa, ed infine il caso di maggiore interesse

$$\alpha \begin{cases} = 1 & \text{su } \mathcal{F}_1 D, \\ = 0 & \text{su } \mathcal{F}_2 D, \end{cases} \quad \beta \begin{cases} = 0 & \text{su } \mathcal{F}_1 D, \\ = 1 & \text{su } \mathcal{F}_2 D, \end{cases}$$

avendo indicato con  $\mathcal{F}_1 D$  ed  $\mathcal{F}_2 D$  due insiemi senza punti in comune tali che sia  $\mathcal{F}D = \mathcal{F}_1 D + \mathcal{F}_2 D$ .

Casi particolarissimi del generale problema posto rientrano nella teoria classica delle serie trigonometriche e di Laplace. È infatti a tutti ben noto che il sistema di funzioni  $\{e^{ik\theta}\}$  ( $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) è hilbertianamente completo nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ , per cui il sistema  $\{ke^{ik\theta}\}$  lo è solo se ad esso si aggiunge una costante. Pertanto, poichè — dette  $\rho, \theta$  le coordinate polari di un punto  $P$  del piano —  $\omega_k(P) = \rho^k e^{ik\theta}$  è un polinomio armonico omogeneo di grado  $k$ , può dirsi che il sistema dei polinomi armonici è completo sulla frontiera di un dominio circolare, laddove quello formato con le derivate normali di detti polinomi non lo è, riuscendo la costante e solo essa ortogonale a tutte le funzioni  $\frac{\partial \omega_k}{\partial n}$ . Analogo risultato vale per il

sistema dei polinomi armonici in tre variabili sulla frontiera di un dominio sferico, come è ben noto dalla teoria delle funzioni sferiche. Ma non mi consta sia stata dimostrata la completezza sulla sfera (o sul cerchio, a seconda dei casi) del sistema di funzioni  $\{w_k(P)\}$  con  $w_k(P)$  così definita:

$$w_k(P) \begin{cases} = \omega_k(P) & \text{se } P \in E_1, \\ = \frac{\partial}{\partial n} \omega_k(P) & \text{se } P \in E_2, \end{cases}$$

essendo  $E_1$  ed  $E_2$  due insiemi, privi di punti in comune, la cui somma coincide con la frontiera del dominio.

Tale dimostrazione consegue dal seguente teorema:

I. Se  $E$  è un insieme misurabile di un dato spazio e  $\{\varphi_k(P)\}$  un sistema ortogonale e normale di funzioni, reali o complesse, hilbertianamente completo in  $E$ , detta  $\gamma(k)$  una qualsiasi funzione reale positiva (negativa) dell'indice  $k$  il sistema  $\{w_k(P)\}$  con  $w_k$  così definita

$$w_k(P) \begin{cases} = \varphi_k(P) & \text{se } P \in E_1, \\ = \gamma(k) \varphi_k(P) & \text{se } P \in E_2, \end{cases}$$

essendo  $E = E_1 + E_2$ , con  $E_1$  ed  $E_2$  senza punti in comune, è hilbertianamente completo in  $E$ .

Si tratta di far vedere che se per ogni  $k$  si ha

$$(1) \quad \int_E f(P) \bar{w}_k(P) dT = 0$$

deve essere quasi ovunque  $f = 0$ . Poniamo

$$f_1(P) \begin{cases} = f(P) & \text{se } P \in E_1, \\ = 0 & \text{se } P \in E_2, \end{cases} \quad f_2(P) \begin{cases} = 0 & \text{se } P \in E_1, \\ = -f(P) & \text{se } P \in E_2. \end{cases}$$

La (1) può allora scriversi così

$$(2) \quad \int_E f_1 \bar{\varphi}_k dT = \gamma(k) \int_E f_2 \bar{\varphi}_k dT.$$

Si ha inoltre per un noto teorema

$$0 = \int_E f_1 \bar{f}_2 dT = \sum_k \int_E f_1 \bar{w}_k dT \int_E \bar{f}_2 w_k dT = \sum_k \gamma(k) \left| \int_E f_2 \bar{\varphi}_k dT \right|^2$$

e quindi dall'essere per ogni  $k$ ,  $\gamma(k) > 0$  ( $< 0$ ) segue:

$$(3) \quad \int_E f_2 \bar{\varphi}_k dT = 0$$

da cui per la completezza del sistema  $\{\varphi_k\}$  e per la (2) ne viene  $f_2 = f_1 = 0$  cioè  $f = 0$ . Veramente nel caso che a noi interessa del sistema  $\{e^{ik\theta}\}$  e per  $\gamma(k) = k$ , essendo  $\gamma(0) = 0$ , la validità della (3) è assicurata solo per  $k \neq 0$ , però anche quando fosse

$$\int_E f_2 \bar{\varphi} dT = \int_0^{2\pi} f_2 d\theta \neq 0$$

sarebbe in ogni caso  $f_2 = \text{costante}$  in  $E \equiv (0, 2\pi)$  e dato che in  $E_1$ , supposto di misura positiva, si ha  $f_2 = 0$ ,  $f_2$  deve essere quasi ovunque nulla. Analogamente si ragiona per le funzioni sferiche.

Il problema è così completamente risoluto nel caso particolare dei domini circolari, ma, per quanto non privo di interesse, tale risultato appare assai modesto rispetto alla generalità del problema posto, la risoluzione completa del quale richiede mezzi ben più elevati d'indagine, che non quelli impiegati in tale caso particolare.

Fatte solamente delle ipotesi di regolarità su  $\mathcal{FD}$  e cioè che ciascuna delle superficie che la costituiscono sia dotata in ogni suo punto  $P$  di piano tangente, variabile con continuità al variare di  $P$ , e che le curvature princi-

pali in  $P$  siano funzioni limitate di  $P$ , lasciando per il resto affatto arbitrarie la forma e l'ordine di connessione (lineare e superficiale) di  $D$ , sono pervenuto a dimostrare i seguenti teoremi:

II. Il sistema  $\{v_k(P)\}$  è hilbertianamente completo su  $\mathcal{F}D$ .

III. Il sistema  $\left\{\frac{\partial}{\partial n} v_k\right\}$  non è completo su  $\mathcal{F}D$ , e la costante è soltanto essa è ortogonale a tutte le sue funzioni.

IV. Decomposta  $\mathcal{F}D$  nei due insiemi di misura superficiale positiva  $\mathcal{F}_1 D$  e  $\mathcal{F}_2 D$  è definita al modo seguente su  $\mathcal{F}D$  la funzione  $w_k(P)$

$$w_k(P) \begin{cases} = v_k(P) & \text{se } P \in \mathcal{F}_1 D, \\ = \frac{\partial}{\partial n} v_k(P) & \text{se } P \in \mathcal{F}_2 D, \end{cases}$$

il sistema  $\{w_k(P)\}$  è hilbertianamente completo su  $\mathcal{F}D$ .

V. Se  $h(P)$  è una funzione quasi continua e limitata su  $\mathcal{F}D$ , mai negativa e tale che l'insieme dei punti per i quali si ha  $h(P) > 0$  abbia misura positiva, il sistema  $\left\{\frac{\partial v_k}{\partial n} - h v_k\right\}$  è hilbertianamente completo su  $\mathcal{F}D$ .

La dimostrazione degli enunciati teoremi di completezza è stata conseguita riconducendola alla dimostrazione dei teoremi di unicità per i vari problemi al contorno relativi all'equazione  $\Delta_2 u = 0$  in una ben precisata classe di funzioni armoniche. Tale classe – che l'Amerio per primo considera nei suoi lavori – è quella per cui valgono due formole fondamentali di Green. Ho potuto caratterizzarla dimostrando che essa è costituita da tutte e sole le funzioni armoniche che sono rappresentate da un potenziale di semplice strato.

Il principale strumento di indagine è costituito da una estensione di alcuni classici teoremi della teoria del potenziale di semplice e doppio strato nel caso, affatto generale, che la densità o il momento della distribuzione, relativa ai detti potenziali siano funzioni, che si suppongono solamente sommagabili secondo Lebesgue. Tale estensione consente – fra l'altro – di ottenere come corollario dei suoi risultati il fondamentale teorema di inversione d'Amerio di cui abbiamo precedentemente fatto parola.

In un lavoro di prossima pubblicazione tutti i risultati ottenuti, con le relative dimostrazioni, verranno compiutamente esposti.

**Matematica.** — *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili mediante successioni di particolari funzioni armoniche*<sup>(\*)</sup>.

Nota di G. FICHERA, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

In una Memoria, attualmente in corso di stampa, il contenuto della quale venne dall'Autore esposto in una conferenza tenuta presso l'Istituto per le applicazioni del calcolo, il prof. Miron Nicolesco dell'Università di Bucarest ha esteso alle funzioni armoniche in tre variabili in un dominio limitato il teorema di Painlevé-Runge sull'approssimazione delle funzioni olomorfe di una variabile complessa mediante successioni di polinomi<sup>(1)</sup>.

Scopo di questa Nota è mostrare come il teorema ottenuto dal Nicolesco sia suscettibile di una semplice dimostrazione, una volta acquisiti i teoremi generali di completezza, che ho enunciato nella Nota dal titolo *Teoremi di completezza, sulla frontiera di un dominio, per taluni sistemi di funzioni* presentata assieme alla presente.

Sia  $A$  un insieme aperto anche non limitato, dello spazio a tre dimensioni e supponiamo possibile costruire una successione di dominî regolari limitati  $D_1, D_2, \dots, D_b, \dots$ , contenuti in  $A$ , tale che, per ogni  $b$ ,  $D_b$  sia interno a  $D_{b+1}$  e inoltre, comunque si consideri un insieme chiuso e limitato  $C$ , contenuto in  $A$  esista un intero  $p$  tale che, per  $h > p$ ,  $D_h$  contenga  $C$ . Supponiamo inoltre che la frontiera  $\mathfrak{F}D_b$  di ciascun dominio  $D_b$  sia costituita da superficie, ognuna delle quali sia dotata in ogni suo punto  $Q$  di piano tangente, variabile con continuità al variare di  $Q$ , mentre le curvature principali in  $Q$  siano funzioni limitate di questo punto.

Facciamo l'ipotesi che  $A$  abbia connessione superficiale finita di ordine  $p$  e sia tale la connessione di ogni dominio  $D_b$ . Diciamo  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$  un sistema fondamentale di superficie chiuse di  $A$  che supporremo anche contenute in ogni  $D_b$ <sup>(2)</sup>. Fissati arbitrariamente i punti  $O_1, O_2, \dots, O_p$  nell'interno di ciascuno dei dominî, limitati rispettivamente da  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$ , e all'esterno di  $A$  e indicato con  $O_0$  un arbitrario punto dello spazio, diciamo  $\rho_s, \theta_s, \varphi_s$  ( $s = 0, 1, \dots, p$ ) le coordinate polari del generico punto  $P$ , avendo assunto  $O_s$  come polo. Poniamo, detto  $\{Y_{mi}(\theta_s, \varphi_s)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2m+1$ ) un sistema fondamentale di funzioni sferiche di ordine  $m$ ,

$$\omega_{mi}(P) = \rho_0^m Y_{mi}(\theta_0, \varphi_0), \quad \tau_{mi}^{(s)}(P) = \frac{Y_{mi}(\theta_s, \varphi_s)}{\rho_s^{m+1}}.$$

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) M. NICOLESCO, *Approssimazione delle funzioni armoniche in più variabili mediante polinomi armonici*, in corso di stampa presso i «Rend. di matematica e delle sue applicazioni».

(2) Le definizioni che intendiamo adottare di connessione superficiale e di sistema fondamentale di superficie chiuse sono conformi a quelle date nel § II del seguente lavoro: G. FICHERA, *Sull'integrazione in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado*. [«Revista de matematicas y física teorica» (Universidad de Tucuman) 1947].



Indichiamo con  $\{v_k(P)\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) il sistema costituito dall'infinità numerabile di funzioni che si ottiene prendendo tutte le funzioni  $\omega_{mi}$  e  $\tau_{mi}^{(i)}$ , quando gli indici assumono i seguenti valori:

$$s = 1, 2, \dots, p, \quad m = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, 2m+1.$$

Se  $A$  ha semplice la connessione superficiale, il sistema consta esclusivamente di polinomi armonici.

Sussiste il seguente teorema:

Se  $u(P)$  è armonica in  $A$  è possibile per ogni intero positivo  $k$  determinare un numero finito  $q_k$  di costanti  $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_{q_k}^{(k)}$  tali che, posto

$$V_k(P) = c_1^{(k)} v_1(P) + c_2^{(k)} v_2(P) + \dots + c_{q_k}^{(k)} v_{q_k}(P)$$

la successione  $\{V_k(P)\}$  converge uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in  $A$  verso la  $u(P)$ .

Si può determinare una funzione  $\varphi^{(h)}(Q)$  definita su  $\mathfrak{F}D_h$  verificante in  $D_h$  la seguente equazione

$$(1) \quad u(P) = \int_{\mathfrak{F}D_h} \varphi^{(h)}(Q) \frac{1}{PQ} d\sigma(Q).$$

Si eguagliano infatti, su  $\mathfrak{F}D_h$ , le derivate normali delle due funzioni ai due membri della (1). Posto  $\delta^{(h)}(M) = \frac{\partial u}{\partial n}$ , si ottiene la seguente equazione integrale di Fredholm per la  $\varphi^{(h)}$

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \delta^{(h)}(M) = -\varphi^{(h)}(M) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}D_h} \varphi^{(h)}(Q) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{MQ} d\sigma(Q).$$

Com'è ben noto (3) la  $\varphi^{(h)}(M)$  è allora data da

$$\varphi^{(h)}(M) = \int_{\mathfrak{F}D_h} \delta^{(h)}(Q) R(M, Q) d\sigma(Q) + k \varphi_0(M) - \frac{1}{2\pi} \delta^{(h)}(M),$$

essendo  $k$  una costante,  $\varphi_0(M)$  l'autosoluzione normalizzata dell'equazione omogenea associata alla (2) ed  $R(M, Q)$  una funzione per cui vale la limitazione, qualunque siano  $M$  e  $Q$  su  $\mathfrak{F}D_h$ , indicando con  $A$  una costante

$$|R(M, Q)| < \frac{A}{MQ}.$$

Supponiamo  $k$  determinata in modo che le due funzioni  $u(P)$  e  $\int_{\mathfrak{F}D_h} \varphi^{(h)}(Q) \frac{1}{PQ} d\sigma(Q)$  assumano valori eguali in un fissato punto di  $D_h$ .

Deve allora sussistere la (1) dato che le dette due funzioni armoniche hanno

(3) Cfr. O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, pp. 307-314. [Springer (Berlin) 1929].

la derivata normale su  $\mathfrak{F}D_b$  coincidente, e assumono lo stesso valore in un punto di  $D_b$ .

Nella mia Nota già citata, trovasi enunciato un teorema dal quale consegue che il sistema  $\left\{ \frac{\partial v_k}{\partial n} \right\}$  è completo per l'approssimazione hilbertiana delle funzioni  $\delta(Q)$  definite su  $\mathfrak{F}D_b$  e verificanti la condizione

$$\int_{\mathfrak{F}D_b} \delta(Q) d\sigma(Q) = 0.$$

Sia allora  $\{W_k^{(h)}\}$  una successione di funzioni, ognuna delle quali sia una combinazione lineare di un numero finito di funzioni del sistema  $\{v_k\}$ , tale che  $\frac{\partial}{\partial n} W_k^{(h)}$  converga in media su  $\mathfrak{F}D_b$ , per  $k \rightarrow \infty$ , verso la funzione  $\delta^{(h)}(Q)$ .

Introduciamo la funzione

$$\varphi_k^{(h)}(M) = \int_{\mathfrak{F}D_b} \frac{\partial}{\partial n} W_k^{(h)}(Q) R(M, Q) d\sigma(Q) + k\varphi_0(M) - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} W_k^{(h)}(M).$$

Essa verifica l'equazione integrale

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} W_k^{(h)}(M) = -\varphi_k^{(h)}(M) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}D_b} \varphi_k^{(h)}(Q) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{MQ} d\sigma(Q),$$

e pertanto, posto

$$V_k^{(h)}(P) = \int_{\mathfrak{F}D_b} \varphi_k^{(h)}(Q) \frac{1}{PQ} d\sigma(Q),$$

si ha su  $\mathfrak{F}D_b$ :  $\frac{\partial}{\partial n} V_k^{(h)} = \frac{\partial}{\partial n} W_k^{(h)}$  e quindi in  $D$

$$V_k^{(h)} = W_k^{(h)} + c_{hk}$$

con  $c_{hk}$  costante.

Dimostriamo che

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{F}D_b} [\varphi_k^{(h)} - \varphi^{(h)}]^2 d\sigma = 0.$$

Posto  $\kappa_k^{(h)} = \frac{\partial}{\partial n} W_k^{(h)} - \delta^{(h)}$  e ricordando che sussiste su  $\mathfrak{F}D_b$  la limitazione

$$\int_{\mathfrak{F}D_b} |R(M, Q)| |R(M, T)| d\sigma(M) \leq B \log QT^{(4)},$$

con  $B$  costante positiva si ha:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{F}D_b} [\varphi_k^{(h)} - \varphi^{(h)}]^2 d\sigma \leq \int_{\mathfrak{F}D_b} \left| \int_{\mathfrak{F}D_b} \kappa_k^{(h)}(Q) R(M, Q) d\sigma(Q) \right|^2 d\sigma(M) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{F}D_b} |\kappa_k^{(h)}|^2 d\sigma,$$

(4) Cfr. M. PICONE, *Appunti d'Analisi superiore*. [Rondinella (Napoli) 1940] p. 806.

ed è inoltre

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathfrak{F}D_h} \left[ \int_{\mathfrak{F}D_h} \chi_k^{(h)}(Q) R(M, Q) d\sigma(Q) \right]^2 d\sigma(M) = \\
 & = \int_{\mathfrak{F}D_h} \left[ \int_{\mathfrak{F}D_h} \chi_k^{(h)}(Q) R(M, Q) d\sigma(Q) \cdot \int_{\mathfrak{F}D_h} \chi_k^{(h)}(T) R(M, T) d\sigma(T) \right] d\sigma(M) \leq \\
 & \leq \int_{\mathfrak{F}D_h} \int_{\mathfrak{F}D_h} |\chi_k^{(h)}(Q)| |\chi_k^{(h)}(T)| d\sigma(Q) d\sigma(T) \int_{\mathfrak{F}D_h} |R(M, Q)| |R(M, T)| d\sigma(M) \leq \\
 & \leq B \sqrt{\int_{\mathfrak{F}D_h} \int_{\mathfrak{F}D_h} (\log QT)^2 d\sigma(Q) d\sigma(T)} \cdot \int_{\mathfrak{F}D_h} [\chi_k^{(h)}(Q)]^2 d\sigma(Q),
 \end{aligned}$$

e resta quindi dimostrata la (3). Dopo ciò è facile provare che la successione  $\{V_k^{(h)}(P)\}$  converge uniformemente in  $D_{h-1}$  verso  $u(P)$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Diciamo infatti  $d_h$  la distanza fra  $\mathfrak{F}D_h$  e  $\mathfrak{F}D_{h-1}$ . Si ha in  $D_{h-1}$

$$\begin{aligned}
 |u(P) - V_k^{(h)}(P)| & \leq \int_{\mathfrak{F}D_h} |\varphi^{(h)}(Q) - \varphi_k^{(h)}(Q)| \frac{1}{PQ} d\sigma(Q) \leq \\
 & \leq \sqrt{\int_{\mathfrak{F}D_h} [\varphi^{(h)} - \varphi_k^{(h)}]^2 d\sigma} \cdot \sqrt{\int_{\mathfrak{F}D_h} \frac{1}{PQ^2} d\sigma(Q)} \leq \frac{1}{d_h} \sqrt{\int_{\mathfrak{F}D_h} [\varphi^{(h)} - \varphi_k^{(h)}]^2 d\sigma} \cdot \text{mis } \mathfrak{F}D_h
 \end{aligned}$$

ciò che prova il nostro asserto.

Indichiamo con  $V_h(P)$  una ben fissata funzione della successione  $V_1^{(h)}, V_2^{(h)}, \dots, V_k^{(h)}, \dots$  (per esempio quella di indice più piccolo) per la quale si abbia

$$|u(P) - V_h(P)| < \frac{1}{h} \quad \text{per } P \in D_{h-1}.$$

Sia  $C$  un qualsiasi insieme chiuso e limitato contenuto in  $A$  e sia  $p$  tale che, per  $h > p$ , si abbia  $C \subset D_h$ . Dato comunque  $\varepsilon > 0$ , sia  $v_\varepsilon$  un intero positivo verificante le condizioni  $v_\varepsilon > p$ ,  $\frac{1}{v_\varepsilon} < \varepsilon$ . Si ha allora, qualunque sia  $P$  in  $C$ , per  $h > v_\varepsilon$

$$|u(P) - V_h(P)| < \varepsilon$$

ciò che dimostra il nostro teorema.

In particolare si deduce:

*Se  $A$  è a connessione superficiale semplice e  $u(P)$  è in esso armonica, si può costruire una successione di polinomi armonici uniformemente convergente in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in  $A$  verso la  $u(P)$ .*

**Matematica.** — *Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes.* Nota II di B. PETTINEO, presentata (\*) dal Corrisp. M. CIPOLLA.

Riprendiamo la Nota I dello stesso titolo.

3. Sia  $N$  l'insieme (numerabile) costituito dai punti di discontinuità per la funzione determinante  $\alpha(T)$  (e per la funzione  $V_\alpha(T)$ ) e poniamo  $S_c = S - N$ . Poichè l'insieme  $N$  è numerabile, esso è *lebesguiano* <sup>(1)</sup> e tale risulta pure l'insieme  $S_c$ , che verrà detto lo SPAZIO di continuità per la funzione  $\alpha(T)$  (e per la  $V_\alpha(T)$ ).

Ha luogo il seguente teorema:

V. Ogni insieme  $C$  limitato e chiuso dello spazio  $S_c$  si può scomporre nella somma di due insiemi lebesguiani  $C'$  e  $C''$ , senza punti in comune, in maniera da risultare

$$(10) \quad \int_{C'} d\alpha = \int_C dp_\alpha, \quad \int_{C''} d\alpha = - \int_C dq_\alpha.$$

Consideriamo una successione di decomposizioni coordinate  $\mathfrak{D}_{(1)}, \mathfrak{D}_{(2)}, \dots, \mathfrak{D}_{(n)}, \dots$  che invada lo spazio  $S_c$  tale che  $\mathfrak{D}_{(n+1)}$  sia *seguito* a  $\mathfrak{D}_{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) e denotiamo con  $T_i^{(n)}$  gli intervalli relativi a  $\mathfrak{D}_{(n)}$  i quali contengano punti dell'insieme  $C$ . Ponendo  $C_n = \Sigma T_i^{(n)}$ , risulta  $C_n \supset C_{n+1}$  e

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C.$$

È lecito supporre che ogni intervallo  $T_i^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) abbia gli estremi nello spazio  $S_c$ . Infatti, se, per esempio, l'estremo sinistro  $P$  di  $T_i^{(n)}$  appartiene a  $C$ , esso appartiene pure a  $S_c$ ; se invece  $P$  non appartiene a  $C$ , si può sempre trovare un punto  $P'$  di  $S_c$ , a destra di  $P$ , compreso fra  $P$  ed il punto dell'insieme chiuso  $CT_i^{(n)}$  che si trova a sinistra di tutti gli altri punti dello stesso insieme. Si può allora sostituire  $P$  col punto  $P'$ .

Ciò premesso, in virtù della prima delle (I) [I] <sup>(2)</sup>, si ha

$$\int_{T_i^{(n)}} d\alpha = \alpha(T_i^{(n)})$$

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Cioè tale che comunque si assegni un numero  $\varepsilon > 0$ , è possibile costruire un insieme chiuso  $C_\varepsilon$  contenuto in  $N$  ed un insieme aperto  $A_\varepsilon$  contenente  $N$ , in maniera da risultare  $\text{mis}_\alpha(A_\varepsilon - C_\varepsilon) < \varepsilon$ . (Cfr. M. PICONE, *Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni*, Pisa, Libreria Goliardica, a. 1945, p. 79).

(2) Con ciò intendiamo esprimere che le formule (I) trovansi nella Nota I.



e poichè gli intervalli  $T_i^{(n)}$  hanno a due a due, al più, un estremo in comune, risulta, per l'addittività della funzione  $\alpha(T)$ ,

$$\int_{C_n} d\alpha = \Sigma \alpha(T_i^{(n)}).$$

Denotiamo con  $C_n$  ( $C_n''$ ) l'insieme costituito da tutti gli intervalli  $T_i^{(n)}$  pei quali risulta  $\alpha(T_i^{(n)}) \geq 0$  ( $< 0$ ) e, tenuto conto delle (9) [I], osserviamo che si ha pure.

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} d\alpha = \int_C dp_\alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n''} d\alpha = - \int_C dq_\alpha.$$

Se un intervallo  $T_i^{(n+1)}$  di  $C_{n+1}$  ha punti interni in comune con l'insieme  $C_n'$ , esso è contenuto in quest'ultimo (essendo  $C_{n+1} \rightarrow C_n$ ); in caso contrario l'intervallo  $T_i^{(n+1)}$  può essere aggiunto all'insieme  $C_n'$ , risultando

$$\int_{C_n' + T_i^{(n+1)}} d\alpha = \int_{C_n'} d\alpha + \alpha(T_i^{(n+1)}) \geq \int_{C_n'} d\alpha.$$

Insomma, se poniamo  $E_n = C_n' + C_{n+1}' + C_{n+2}' + \dots$ , si ha  $E_n \supset E_{n+1}$  e

$$\int_{E_n} d\alpha \geq \int_{C_n'} d\alpha;$$

pertanto, in virtù della prima delle (12),

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} d\alpha \geq \int_C dp_\alpha.$$

Si ha intanto  $E_n \rightarrow C_n' + C_{n+1}' + C_{n+2}' + \dots = C_n'$ , sicchè, in virtù della (11), il limite

$$C' = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E_1 E_2 E_3 \dots$$

è un insieme (lebesguiano) contenuto in  $C$ . Essendo, d'altra parte (3),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} d\alpha = \int_{C'} d\alpha,$$

dalla (13) si desume

$$\int_{C'} d\alpha \geq \int_C dp_\alpha.$$

Ma è  $C' \rightarrow C$  e quindi ha luogo la prima delle (10).

Basta porre allora  $C'' = C - C'$  perchè se ne possa trarre la seconda della (10).

Il teorema dimostrato si generalizza subito come segue:

(3) Cfr. M. PICONE, loc. cit., p. 311.

VI. Ogni insieme lebesguiano  $L$  contenuto nello spazio  $S_c$  si può scomporre nella somma di due insiemi lebesguiani  $L'$  e  $L''$ , senza punti in comune, in maniera da risultare

$$(14) \quad \int_{L'} d\alpha = \int_L dp_\alpha, \quad \int_{L''} d\alpha = - \int_L dq_\alpha.$$

Fissata una successione  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$  di numeri positivi, convergente a zero, e supposto (come a noi interessa) che i due integrali

$$\int_L dp_\alpha, \quad \int_L dq_\alpha$$

siano *finiti*, fissiamo un insieme  $C_1$  limitato e chiuso, contenuto in  $L$  e tale che risulti

$$\int_L dp_\alpha - \int_{C_1} dp_\alpha < \varepsilon_1$$

e poniamo  $L_1 = L - C_1$ ; fissiamo quindi un insieme  $C_2$  limitato e chiuso, contenuto in  $L_1$  e tale che risulti

$$\int_{L_1} dp_\alpha - \int_{C_2} dp_\alpha < \varepsilon_2$$

e poniamo  $L_2 = L_1 - C_2$ ; ecc. . . ; fissiamo, in generale, un insieme  $C_n$  limitato e chiuso, contenuto in  $L_{n-1}$  e tale che risulti

$$(15) \quad \int_{L_{n-1}} dp_\alpha - \int_{C_n} dp_\alpha < \varepsilon_n$$

e poniamo  $L_n = L_{n-1} - C_n$ ; ecc. Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \int_{C_1} dp_\alpha &= \int_L dp_\alpha - \int_{L-C_1} dp_\alpha, \\ \int_{C_2} dp_\alpha &= \int_{L-C_1} dp_\alpha - \int_{L-C_1-C_2} dp_\alpha, \dots, \int_{C_n} dp_\alpha = \int_{L_{n-2}-C_{n-1}} dp_\alpha - \int_{L_{n-1}-C_n} dp_\alpha, \dots \end{aligned}$$

segue subito

$$\int_{C_1} dp_\alpha + \int_{C_2} dp_\alpha + \dots + \int_{C_n} dp_\alpha + \dots = \int_L dp_\alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_{n-1}-C_n} dp_\alpha$$

e per la (15)

$$\int_{C_1} dp_\alpha + \int_{C_2} dp_\alpha + \dots + \int_{C_n} dp_\alpha + \dots = \int_L dp_\alpha.$$

Applicando ora ad ogni insieme  $C_n$  il teorema V, possiamo costruire due insiemi lebesguiani  $C'_n$  e  $C''_n$ , senza punti in comune, la cui somma sia  $C_n$ , pei quali risulti

$$\int_{C'_n} d\alpha = \int_{C_n} dp_\alpha, \quad \int_{C''_n} d\alpha = - \int_{C_n} dq_\alpha.$$

Basta porre allora  $L' = C'_1 \dot{+} C'_2 \dot{+} \dots \dot{+} C'_n \dot{+} \dots$  <sup>(4)</sup>,  $L'' = L - L'$ , perchè abbiano luogo le (14).

Denotiamo con  $L_n$  l'insieme (lebesguiano) dei punti dello spazio  $S_c$  contenuti nell'intervallo  $(-n, n)$  e poniamo  $E_1 = L_1$ ,  $E_{n+1} = L_{n+1} - L_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Decomponendo ogni insieme (lebesguiano)  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) nella somma di due insiemi lebesguiani  $E'_i$  e  $E''_i$ , senza punti in comune, tali che risulti

$$\int_{E'_i} d\alpha = \int_{E_i} dp_\alpha, \quad \int_{E''_i} d\alpha = - \int_{E_i} dq_\alpha$$

e ponendo  $S'_c = E'_1 \dot{+} E'_2 \dot{+} \dots \dot{+} E'_n \dot{+} \dots$ ,  $S''_c = E''_1 \dot{+} E''_2 \dot{+} \dots \dot{+} E''_n \dot{+} \dots$ , possiamo affermare quanto segue:

VII. Lo spazio  $S_c$  può essere decomposto in due insiemi lebesguiani  $S'_c$  e  $S''_c$ , senza punti in comune, in modo che l'integrale

$$(16) \quad \int_E d\alpha$$

non sia mai NEGATIVO (POSITIVO) quando l'insieme  $E$  varia in  $S'_c$  (in  $S''_c$ ), in modo, cioè, che si abbia

$$(17) \quad \begin{cases} \int_E d\alpha = \int_E dp_\alpha = \int_E dV_\alpha & \text{se } E \rightarrow S'_c \\ - \int_E d\alpha = \int_E dq_\alpha = \int_E dV_\alpha & \text{se } E \rightarrow S''_c. \end{cases}$$

Inoltre:

VIII. Se  $\Delta$  è un qualsivoglia insieme <sup>(5)</sup> dello spazio  $S_c$ , posto  $\Delta' = \Delta S'_c$  e  $\Delta'' = \Delta S''_c$ , risulta

$$\int_{\Delta'} d\alpha = \int_{\Delta} dp_\alpha, \quad \int_{\Delta''} d\alpha = - \int_{\Delta} dq_\alpha,$$

sicchè

$$(18) \quad \int_{\Delta'} dp_\alpha \quad e \quad - \int_{\Delta''} dq_\alpha$$

(4) Col simbolo  $C_1 \dot{+} C_2 \dot{+} C_3 \dot{+} \dots$  denotiamo la somma degli insiemi  $C_1, C_2, C_3, \dots$ , mettendo in evidenza il fatto che essi sono, a due a due, senza punti in comune.

(5) Quest'insieme può essere anche non lebesguiano.

rappresentano rispettivamente il massimo ed il minimo valore (finiti o no) che l'integrale (16) assume quando l'insieme  $E$  varia in  $\Delta$ .

4. Supponiamo che esista e sia finito l'integrale

$$\int_{\Delta} d\alpha$$

(cioè la misura algebrica dell'insieme  $\Delta$ ), essendo  $\Delta$  un insieme dello spazio  $S_c$ . Sappiamo allora che esistono e sono finite le misure algebriche dei due insiemi  $\Delta' = \Delta S'_c$  e  $\Delta'' = \Delta S''_c$  (perchè contenuti in  $\Delta$ )<sup>(6)</sup>, cioè risultano finiti i due integrali (18) e si può scrivere

$$\int_{\Delta} d\alpha = \int_{\Delta'} dp_{\alpha} + \int_{\Delta''} dq_{\alpha}.$$

Tale relazione può allora considerarsi un'espressiva conseguenza della proprietà additiva (valevole nel nostro caso):

$$\int_{\Delta} d\alpha = \int_{\Delta'} d\alpha + \int_{\Delta''} d\alpha.$$

È allora finito l'integrale

$$\int_{\Delta} dV_{\alpha} = \int_{\Delta'} dp_{\alpha} + \int_{\Delta''} dq_{\alpha}$$

e possiamo stabilire il seguente teorema:

IX. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme  $\Delta$  dello spazio  $S_c$  abbia la MISURA finita è che esista e sia finita la sua MISURA ALGEBRICA.*

5. Il teorema VII vale pure, in parte, nell'intero spazio  $S$ , anzichè nel solo  $S_c$ . Consideriamo infatti una successione  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  di tutti i punti di discontinuità per la funzione  $\alpha(T)$  (e per la  $V_{\alpha}(T)$ ) e siano

$$P'_1, P'_2, \dots, P'_n, \dots$$

$$P''_1, P''_2, \dots, P''_n, \dots$$

le successioni staccate dalla data e tali che si abbia

$$\int_{P'_n} d\alpha \geq 0, \quad \int_{P''_n} d\alpha < 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ponendo

$$S' = S'_c \overset{\circ}{+} P'_1 \overset{\circ}{+} P'_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} P'_n \overset{\circ}{+} \dots, \quad S'' = S''_c \overset{\circ}{+} P''_1 \overset{\circ}{+} P''_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} P''_n \overset{\circ}{+} \dots,$$

possiamo asserire che:

(6) Cfr. B. PETTINEO, *Sulle funzioni integrabili secondo Ficone-Stieltjes*. « Rendiconti Accad. dei Lincei », fasc. 3-4, vol. III, 1947.



X. Lo spazio  $S$  può essere decomposto in due insiemi lebesguiani  $S'$  e  $S''$ , senza punti in comune, in modo che l'integrale (16) non sia mai negativo (positivo) quando l'insieme  $E$  varia in  $S'$  (in  $S''$ ).

Non è detto, però, che valgano le (17), così come non valgono, in generale, i teoremi VIII e IX.

Consideriamo, per esempio, la funzione determinante  $\Delta(T) = b - a$ , essendo  $a$  e  $b$  le coordinate dell'estremo sinistro e dell'estremo destro dell'intervallo  $T$  e sia  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  la successione dei punti di coordinate  $1, 2, \dots, n, \dots$ . Definiamo la funzione determinante  $\alpha(T)$  ponendo  $\alpha(T) = \Delta(T)$  se l'intervallo  $T$  è contenuto internamente in un intervallo  $(i, i+1)$ ; ponendo  $\alpha(T) = \Delta(T) - 1$  se l'intervallo  $T$  è contenuto in un intervallo  $(i, i+1)$ , col quale abbia in comune l'estremo destro, ma non quello sinistro; ponendo  $\alpha(T) = \Delta(T) + 1$  se l'intervallo  $T$  è contenuto in un intervallo  $(i, i+1)$ , col quale abbia in comune l'estremo sinistro, ma non quello destro; ponendo infine  $\alpha(T) = \alpha(T_1) + \alpha(T_2)$  per ogni coppia di intervalli consecutivi  $T_1$  e  $T_2$  la cui somma sia  $T$ . Risulta (n. 1 [I])

$$\alpha'(P) = \alpha''(P) = 0 \text{ se } P \text{ non è un punto } P_n;$$

$$\alpha'(P_n) = -1, \alpha''(P_n) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots):$$

Dunque la funzione  $\alpha(T)$  è discontinua solo nei punti  $P_n$ , la cui totalità denotiamo con  $N$ . Si ha

$$\text{mis alg}_\alpha N = \int_N d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{P_n} d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha'(P_n) + \alpha''(P_n) \} = 0$$

$$\int_N dp_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha''(P_n) = \int_N dq_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha'(P_n) | = \infty$$

e quindi

$$\int_N dV_\alpha = \infty.$$

Insomma l'insieme  $N$  ha la misura algebrica nulla e la misura infinita.

Il teorema IX, nello spazio  $S$ , va enunciato così:

XI. Se esiste ed è finita la misura algebrica di un insieme  $\Delta$  dello spazio  $S$  e

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

è una successione costituita da tutti i punti di discontinuità per la funzione  $\alpha(T)$ , contenuti in  $\Delta$ , condizione necessaria e sufficiente affinché quest'insieme abbia la misura finita è che la serie

$$\Sigma V_\alpha(P_n) \equiv \Sigma \int_{P_n} dV_\alpha$$

sia convergente, od anche, in virtù delle (4) [I], che la serie

$$\alpha'(P_1) + \alpha''(P_1) + \alpha'(P_2) + \alpha''(P_2) + \dots + \alpha'(P_n) + \alpha''(P_n) + \dots$$

sia ASSOLUTAMENTE convergente.

**Matematica.** — *Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes.* Nota III di B. PETTINEO, presentata (\*) dal Corrisp. M. CIPOLLA.

INTEGRABILITÀ E SOMMABILITÀ DELLE FUNZIONI. — 1. Nella Nota precedente dello stesso titolo abbiamo dimostrato che lo spazio  $S_c$  (costituito dai punti di continuità per la funzione determinante  $\alpha(T)$  e, quindi, per la  $V_\alpha(T)$ ) si può decomporre in due insiemi lebesguiani  $S'_c$  e  $S''_c$ , senza punti in comune, pei quali: dato ad arbitrio un insieme  $\Delta$  di  $S_c$  e posto  $\Delta' = \Delta S'_c$ ,  $\Delta'' = \Delta S''_c$ , risulta

$$(1) \quad \int_{\Delta'} d\alpha = \int_{\Delta'} dp_\alpha = \int_{\Delta'} dV_\alpha = \int_{\Delta'} dp_\alpha, \quad \int_{\Delta'} dq_\alpha = 0$$

$$(2) \quad -\int_{\Delta''} d\alpha = \int_{\Delta''} dq_\alpha = \int_{\Delta''} dV_\alpha = \int_{\Delta''} dq_\alpha, \quad \int_{\Delta''} dp_\alpha = 0.$$

Dimostriamo la seguente proposizione:

I. Se  $\Delta$  è un insieme dello spazio  $S_c$  e  $f(P)$  è una funzione integrabile in  $\Delta$  (rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T)$ ), posto  $\Delta' = \Delta S'_c$ ,  $\Delta'' = \Delta S''_c$ , la funzione  $f(P)$  risulta integrabile nei due insiemi  $\Delta'$  e  $\Delta''$  e si ha

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Delta'} f(P) d\alpha = \int_{\Delta'} f(P) dp_\alpha = \int_{\Delta'} f(P) dV_\alpha = \int_{\Delta'} f(P) dp_\alpha \\ -\int_{\Delta''} f(P) d\alpha = \int_{\Delta''} f(P) dq_\alpha = \int_{\Delta''} f(P) dV_\alpha = \int_{\Delta''} f(P) dq_\alpha. \end{array} \right.$$

Pertanto

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Delta} f(P) d\alpha = \int_{\Delta'} f(P) dp_\alpha - \int_{\Delta''} f(P) dq_\alpha \\ \int_{\Delta} f(P) dV_\alpha = \int_{\Delta'} f(P) d\alpha - \int_{\Delta''} f(P) d\alpha, \end{array} \right.$$

sicchè  $f(P)$  risulta pure integrabile rispetto a  $V_\alpha(T)$ . (E viceversa).

Supponiamo che  $f(P)$  sia integrabile in  $\Delta$  rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T)$ . Denotiamo con  $[L]_{f,\Delta}$  la classe degli insiemi  $L$  lebesguiani contenuti in  $\Delta$  e nei quali  $f(P)$  è quasi continua. In base ad un teorema da noi recentemente dimostrato<sup>(1)</sup>, la funzione  $f(P)$  risulta integrabile in ogni

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Cfr. B. PETTINEO, *Sulle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes*. « Rendiconti Accad. dei Lincei », vol. III, fasc. 3-4, 1947.

insieme contenuto in  $\Delta$  ed in particolare nei due insiemi  $\Delta'$  e  $\Delta''$ , senza punti in comune, nei quali è stato decomposto  $\Delta$ . D'altra parte, se  $L$  è un qualsivoglia insieme della classe  $[L]_{f,\Delta}$ , i due insiemi  $L\Delta'$  e  $L\Delta''$  appartengono pure a tale classe, sicchè, in virtù di un'altro teorema dimostrato nella Nota <sup>(1)</sup> citata, si ha

$$(5) \quad \int_{\Delta} f(P) d\alpha = \int_{\Delta'} f(P) d\alpha + \int_{\Delta''} f(P) d\alpha.$$

Consideriamo la classe  $[C]_{f,\Delta}$  (contenuta in  $[L]_{f,\Delta}$ ) costituita dagli insiemi  $C$  limitati e chiusi contenuti in  $\Delta$ , nei quali  $f(P)$  è continua e ricordiamo che gli integrali

$$\int_{\Delta'} f(P) d\alpha, \quad \int_{\Delta'} f(P) dp_{\alpha}, \quad \int_{\Delta'} f(P) dq_{\alpha}$$

sono rispettivamente limiti di

$$\int_{C'} f(P) d\alpha, \quad \int_{C'} f(P) dp_{\alpha}, \quad \int_{C'} f(P) dq_{\alpha},$$

$C'$  essendo un insieme della classe  $[C]_{f,\Delta'}$ . Ma si ha

$$\int_{C'} f(P) d\alpha = \int_{C'} f(P) dp_{\alpha} - \int_{C'} f(P) dq_{\alpha}$$

e se  $M$  è il massimo valore di  $|f(P)|$  in  $C'$ , in virtù delle (1), risulta

$$\left| \int_{C'} f(P) dq_{\alpha} \right| \leq M \int_{C'} dq_{\alpha} = 0.$$

Per conseguenza

$$\int_{C'} f(P) d\alpha = \int_{C'} f(P) dp_{\alpha}$$

e quindi

$$\int_{\Delta'} f(P) d\alpha = \int_{\Delta'} f(P) dp_{\alpha}, \quad \int_{\Delta'} f(P) dq_{\alpha} = 0.$$

Analogamente

$$\int_{\Delta''} f(P) d\alpha = - \int_{\Delta''} f(P) dq_{\alpha}, \quad \int_{\Delta''} f(P) dp_{\alpha} = 0$$

e se ne traggono le relazioni (3) e (4).

La prima delle (4), già nota in certi casi particolari <sup>(2)</sup>, non è quindi che un esempio interessante della proprietà additiva, espressa dalla relazione (5).

(2) Vedi M. PICONE, *Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni*, Pisa, Libreria Goliardica, pp. 57-58.

2. Consideriamo ora un insieme  $\Delta$  dello spazio  $S$  ed una funzione  $f(P)$  integrabile in  $\Delta$  rispetto a  $\alpha(T)$ . Poniamo  $\Delta_c = \Delta S_c$  e  $\Delta_d = \Delta - \Delta_c$ . L'insieme  $\Delta_d$  è costituito dai punti di discontinuità per la funzione  $\alpha(T)$  (e per la  $V_\alpha(T)$ ) contenuti in  $\Delta$  e tali punti formano una successione (od un sistema finito di termini)

$$(6) \quad P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

Poichè per ogni insieme  $L$  della classe  $[L]_{f, \Delta}$ , i due insiemi  $L\Delta_c$  e  $L\Delta_d$  appartengono pure a tale classe, si ha

$$\int_{\Delta} f(P) d\alpha = \int_{\Delta_c} f(P) d\alpha + \int_{\Delta_d} f(P) d\alpha$$

e riprendendo le notazioni della Nota I, tenuto conto dell'ultimo teorema della Nota <sup>(1)</sup> citata,

$$\int_{\Delta_d} f(P) d\alpha = f(P_1) \alpha(P_1) + f(P_2) \alpha(P_2) + \dots + f(P_n) \alpha(P_n) + \dots$$

La serie precedente è quindi convergente, anzi *assolutamente* convergente, essendo lecito cambiare l'ordine dei termini della successione (6). Non è detto però che la serie

$$(7) \quad f(P_1) V_\alpha(P_1) + f(P_2) V_\alpha(P_2) + \dots + f(P_n) V_\alpha(P_n) + \dots$$

sia pure assolutamente convergente (e nel numero 5 della Nota precedente, dello stesso titolo, abbiamo dato un esempio in cui ciò non avviene). Però, se la serie (7) è assolutamente convergente (cioè se  $f(P)$  è *sommabile* nell'insieme  $\Delta_d$ ), in base al teorema I, possiamo asserire che  $f(P)$  è pure integrabile in  $\Delta$  rispetto a  $V_\alpha(T)$ . Concludendo:

II. Se la funzione  $f(P)$  è integrabile nell'insieme  $\Delta$  rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T)$ , e la (6) è una successione costituita da tutti i punti di discontinuità per la funzione  $\alpha(T)$  che trovansi in  $\Delta$ , condizione necessaria e sufficiente affinchè  $f(P)$  sia pure integrabile in  $\Delta$  rispetto a  $V_\alpha(T)$  è che sia sommabile nell'insieme  $\Delta_d$  formato dalla totalità dei punti (6), cioè che la serie (7) sia assolutamente convergente <sup>(3)</sup>; od anche (ricordando che è  $V_\alpha(P_n) = |\alpha'(P_n)| + |\alpha''(P_n)|$ ) che sia assolutamente convergente la serie

$$f(P_1) \alpha'(P_1) + f(P_1) \alpha''(P_1) + f(P_2) \alpha'(P_2) + \\ + f(P_2) \alpha''(P_2) + \dots + f(P_n) \alpha'(P_n) + f(P_n) \alpha''(P_n) + \dots$$

(3) È quindi necessario che la funzione  $f(P)$  sia *definita* in ogni punto della successione (6).



**Matematica.** — *Sul massimo e sul minimo integrale di una funzione secondo Picone-Stieltjes.* Nota di B. PETTINEO, presentata (\*) dal Corrisp. M. CIPOLLA.

Riprendendo le tre Note precedenti dal titolo *Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes*, consideriamo la funzione  $f(P)$  e l'insieme  $\Delta$  dello spazio  $S$ , del quale  $S_c$  sia lo spazio di continuità rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T)$ .

Poniamo  $\Delta_c = \Delta S_c$ ,  $\Delta_d = \Delta - \Delta_c$ , e sia

$$(I) \quad P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

una successione costituita da tutti i punti di  $\Delta_d$  (cioè dai punti di discontinuità per la funzione  $\alpha(T)$  che trovansi in  $\Delta$ ). Denotiamo con  $\Delta_{c,1}$  l'insieme dei punti  $P$  di  $\Delta_c$  nei quali risulta  $f(P) \geq 0$  e con  $\Delta_{c,2}$  l'insieme dei rimanenti punti di  $\Delta_c$ . Consideriamo quindi una decomposizione dello spazio  $S_c$  in due insiemi lebesguiani  $S'_c$  e  $S''_c$ , senza punti in comune, tali che si abbia

$$\text{mis } \alpha_a E = \int_E d\alpha = \int_E dp_a = \int_E dV_a = \text{mis}_a E \quad \text{se } E \rightarrow S'_c$$

$$\text{mis } \alpha_a E = \int_E d\alpha = - \int_E dq_a = - \int_E dV_a = - \text{mis}_a E \quad \text{se } E \rightarrow S''_c$$

e poniamo

$$\Delta'_{c,1} = \Delta_{c,1} S'_c, \quad \Delta''_{c,1} = \Delta_{c,1} S''_c, \quad \Delta'_{c,2} = \Delta_{c,2} S'_c, \quad \Delta''_{c,2} = \Delta_{c,2} S''_c.$$

Coi punti (I) formiamo due successioni

$$P'_1, P'_2, \dots, P'_n, \dots$$

$$P''_1, P''_2, \dots, P''_n, \dots$$

ponendo nella prima (seconda) i punti  $P_n$  nei quali risulti (non risulti)  $f(P) \alpha(P) \geq 0$  (il simbolo  $\alpha(P)$  è stato introdotto nella Nota I citata); denotiamo con  $\Delta_{d,1}$  e  $\Delta_{d,2}$  rispettivamente la totalità dei punti della prima e della seconda di queste due successioni ed osserviamo che si ha

$$\int_{\Delta_{d,1}} f(P) d\alpha = f(P'_1) \alpha(P'_1) + f(P'_2) \alpha(P'_2) + \dots + f(P'_n) \alpha(P'_n) + \dots$$

$$\int_{\Delta_{d,2}} f(P) d\alpha = f(P''_1) \alpha(P''_1) + f(P''_2) \alpha(P''_2) + \dots + f(P''_n) \alpha(P''_n) + \dots$$

(\*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

D'altra parte, se con  $[E]_{f, \Delta}$  denotiamo la classe degli insiemi  $E$ , contenuti in  $\Delta$ , nei quali  $f(P)$  è integrabile, risulta <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} \int_E f(P) d\alpha &= \int_{E\Delta'_{c,1}} f(P) d\alpha + \int_{E\Delta''_{c,1}} f(P) d\alpha + \int_{E\Delta'_{c,2}} f(P) d\alpha + \\ &+ \int_{E\Delta''_{c,2}} f(P) d\alpha + \int_{E\Delta_{d,1}} f(P) d\alpha + \int_{E\Delta_{d,2}} f(P) d\alpha \end{aligned}$$

e poichè si ha

$$\begin{aligned} \int_{E\Delta'_{c,1}} f(P) d\alpha &= \int_{E\Delta'_{c,1}} f(P) dp_\alpha = \int_{E\Delta_{c,1}} f(P) dp_\alpha, & \int_{E\Delta'_{c,2}} f(P) d\alpha &= \int_{E\Delta'_{c,2}} f(P) dp_\alpha = \int_{E\Delta_{c,2}} f(P) dp_\alpha, \\ \int_{E\Delta''_{c,1}} f(P) d\alpha &= - \int_{E\Delta''_{c,1}} f(P) dq_\alpha = - \int_{E\Delta_{c,1}} f(P) dq_\alpha \\ \int_{E\Delta''_{c,2}} f(P) d\alpha &= - \int_{E\Delta''_{c,2}} f(P) dq_\alpha = - \int_{E\Delta_{c,2}} f(P) dq_\alpha, \end{aligned}$$

le due espressioni.

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{\Delta_{c,1}} f(P) dp_\alpha - \int_{\Delta_{c,2}} f(P) dq_\alpha + \int_{\Delta_{d,1}} f(P) d\alpha \\ M_2 &= \int_{\Delta_{c,2}} f(P) dp_\alpha - \int_{\Delta_{c,1}} f(P) dq_\alpha + \int_{\Delta_{d,2}} f(P) d\alpha \end{aligned}$$

rappresentano rispettivamente il *massimo* ed il *minimo* valore (finiti o no) dell'integrale

$$(2) \quad \int_E f(P) d\alpha$$

quando l'insieme  $E$  varia nella classe degli insiemi contenuti in  $\Delta$  nei quali  $f(P)$  possiede un integrale *determinato* (finito o no) <sup>(2)</sup>. (Tale classe continueremo a denotarla col simbolo  $[E]_{f, \Delta}$ ).

Si deduce:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione  $f(P)$  sia integrabile nell'insieme  $\Delta$  (cioè sia a integrale determinato e finito) è che l'insieme degli integrali (2), corrispondenti agli insiemi  $E \rightarrow \Delta$ , sia limitato (superiormente ed inferiormente). Quando ciò avviene, l'estremo superiore e l'estremo*

(1) Vedi il teor. III della Nota *Sulle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes*. « Rendiconti Accad. dei Lincei », vol. III, fasc. 3-4, 1947.

(2) Il massimo ed il minimo valore del predetto integrale sono dati rispettivamente per  $E = \Delta'_{c,1} \dot{+} \Delta''_{c,2} \dot{+} \Delta_{d,1}$  e  $E = \Delta'_{c,2} \dot{+} \Delta''_{c,1} \dot{+} \Delta_{d,2}$ .

inferiore del detto insieme sono rispettivamente il massimo  $M_1$  ed il minimo  $M_2$  degli integrali (2) e si ha<sup>(3)</sup>

$$(3) \quad \int_{\Delta} f(P) d\alpha = M_1 + M_2.$$

Se  $M_1$  è infinito e  $M_2$  è finito, la funzione  $f(P)$  non è integrabile in  $\Delta$ , ma è a integrale determinato  $(+\infty)$  e vale ancora la (3).

In tal caso, infatti, uno almeno dei tre integrali

$$\int_{\Delta_{c,1}} f(P) dp_{\alpha} \quad , \quad - \int_{\Delta_{c,2}} f(P) dq_{\alpha} \quad , \quad \int_{\Delta_{d,1}} f(P) d\alpha$$

è infinito. Se è tale, per esempio, il primo, in corrispondenza ad ogni numero  $K > 0$  esiste un insieme  $L'_K$  della classe  $[L]_{f, \Delta_{c,1}}$  di tutti gli insiemi lebesguiani contenuti in  $\Delta_{c,1}$ , nei quali  $f(P)$  è quasi continua e integrabile, tale che per ogni insieme  $L_1 \in L'_K$  della stessa classe si abbia

$$(4) \quad \int_{L_1} f(P) dp_{\alpha} > K - M_2.$$

Allora, se  $L$  è un qualsivoglia insieme della classe  $[L]_{f, \Delta}$ , il quale contiene  $L'_K$ , ponendo  $L_1 = L \Delta_{c,1}$ ,  $L_2 = L \Delta_{c,2}$ ,  $L_{d,1} = L \Delta_{d,1}$ ,  $L_{d,2} = L \Delta_{d,2}$ , risulta  $L_1 \in L'_K$  e d'altra parte

$$\begin{aligned} \int_L f(P) d\alpha &= \int_{L_1} f(P) dp_{\alpha} - \int_{L_1} f(P) dq_{\alpha} + \int_{L_2} f(P) dp_{\alpha} - \\ &\quad - \int_{L_2} f(P) dq_{\alpha} + \int_{L_{d,1}} f(P) d\alpha + \int_{L_{d,2}} f(P) d\alpha; \end{aligned}$$

dunque, in virtù della (4) (e tenuto conto dell'espressione di  $M_2$ ),

$$(5) \quad \int_L f(P) d\alpha > K.$$

Cioè, comunque si sia fissato  $K > 0$ , è stato possibile determinare un insieme  $L'_K$  della classe  $[L]_{f, \Delta}$ , tale che per ogni insieme  $L \in L'_K$  della stessa classe abbia luogo la (5). Ciò vuol dire proprio che esiste l'integrale

$$(6) \quad \int_{\Delta} f(P) d\alpha$$

ed è  $+\infty$ .

(3)  $M_1$  e  $M_2$  possono essere considerati il massimo ed il minimo tra gli integrali (2) corrispondenti ai vari insiemi  $E$  della classe  $[L]_{f, \Delta}$  degli insiemi lebesguiani contenuti in  $\Delta$ , nei quali  $f(P)$  è quasi continua (e integrabile). (Vedi l'ultimo teor. della Nota *Sulla convergenza puntuale delle successioni di insiemi di funzioni quasi continue*, « Rend. Seminario Mat. Università di Roma », a. 1947, fasc. II).

Se  $M_1$  è finito e  $M_2$  è infinito, l'integrale (6) esiste ancora ben determinato, ma è  $-\infty$ .

Infine, se  $M_1$  e  $M_2$  sono entrambi infiniti, l'integrale (6) non esiste. Basta dimostrare che comunque si considerino un insieme  $L$  della classe  $[L]_{f, \Delta}$  ed un numero  $K > 0$ , esistono sempre due insiemi  $L_1$  e  $L_2$  della stessa classe, contenenti  $L$ , pei quali risulta

$$(7) \quad \int_{L_1} f(P) d\alpha > K \quad , \quad \int_{L_2} f(P) d\alpha < -K.$$

A tal fine, supposto, per esempio, che siano infiniti i due integrali

$$\int_{\Delta_{c,1}} f(P) dp_\alpha \quad , \quad - \int_{\Delta_{c,1}} f(P) dq_\alpha ,$$

e fissati l'insieme  $L$  ed il numero  $K$ , osserviamo che sono pure infiniti

$$\int_{\Delta_{c,1-L}} f(P) dp_\alpha \quad , \quad - \int_{\Delta_{c,1-L}} f(P) dq_\alpha .$$

Esistono allora due insiemi  $E_1$  e  $E_2$  della classe  $[L]_{f, \Delta_{c,1-L}}$ , pei quali si ha

$$(8) \quad \int_{E_1} f(P) dp_\alpha > K - \int_L f(P) d\alpha \quad , \quad - \int_{E_2} f(P) dq_\alpha < -K - \int_L f(P) d\alpha .$$

Esistono, l'altra parte due insiemi  $L'_1$  e  $L'_2$  rispettivamente delle classi  $[L]_{f, E_1}$  e  $[L]_{f, E_2}$ , in modo che si abbia<sup>(4)</sup>

$$\int_{L'_1} f(P) d\alpha = \int_{E_1} f(P) dp_\alpha \quad , \quad \int_{L'_2} f(P) d\alpha = - \int_{E_2} f(P) dq_\alpha$$

e basta porre  $L_1 = L \dot{+} L'_1$  ,  $L_2 = L \dot{+} L'_2$  , perchè dalle (8) discendano le (7).

Possiamo concludere allora quanto segue:

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione  $f(P)$  possieda nell'insieme  $\Delta$  un integrale determinato è che il massimo  $M_1$  ed il minimo  $M_2$  degli integrali (2), corrispondenti ai vari insiemi  $E$  contenuti in  $\Delta$ , non siano entrambi infiniti; quando ciò avviene ha luogo la (3).*

Inoltre:

III. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione  $f(P)$  non possieda nell'insieme  $\Delta$  un integrale determinato è che il MASSIMO INTEGRALE sia  $+\infty$  ed il MINIMO  $-\infty$  <sup>(5)</sup>.*

Insomma il massimo ed il minimo integrale di  $f(P)$  in  $\Delta$ , se non sono rispettivamente  $+\infty$  e  $-\infty$ , coincidono e quindi, se uno di essi è finito, è tale pure l'altro, è uguale al primo ed il loro valore comune rappresenta l'integrale della funzione  $f(P)$  (integrabile) nell'insieme  $\Delta$ .

(4) Vedi il teor. I della Nota III citata (dal titolo *Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes*).

(5) Questo massimo e questo minimo integrale sono quelli che intervengono nella definizione generale del prof. PICONE e non si devono confondere con  $M_1$  e  $M_2$ .



**Matematica.** — *Sulla misurabilità degli insiemi pluridimensionali*<sup>(\*)</sup>. Nota di B. PETTINEO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

Sia  $I$  un arbitrario insieme dello spazio  $S$  ad  $m + n$  dimensioni, del cui punto variabile indichiamo con  $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$  le coordinate. Al variare del detto punto in  $I$ , il punto  $x(x_1, x_2, \dots, x_m)$  descrive un certo insieme  $I^*$  dello spazio  $S^*$  ad  $m$  dimensioni ed il punto  $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$  descrive un certo insieme  $I^y$  dello spazio  $S^y$  ad  $n$  dimensioni;  $I^*$  e  $I^y$  diconsi le *proiezioni* di  $I$  rispettivamente sugli spazi  $S^*$  e  $S^y$ . Fissato un punto  $x_0$  in  $S^*$ , l'insieme  $K(x_0)$  (eventualmente vuoto) costituito dai punti di  $I$  la cui proiezione su  $S^*$  è  $x_0$  dicesi la *sezione di  $I$  con lo spazio  $S^y$  di piede  $x_0$* ; in modo analogo si definisce la sezione di  $I$  con lo spazio  $S^*$  di piede  $y$ .

Siano  $\alpha(T^*)$  e  $\beta(T^y)$  due *funzioni determinanti*<sup>(1)</sup> definite negli intervalli  $T^*$  e  $T^y$  rispettivamente degli spazi  $S^*$  e  $S^y$ , cioè due funzioni *additive ed a variazione finita*. È noto allora che, posto per ogni intervallo  $T = (T^*, T^y)$  di  $S$

$$\gamma(T) = \alpha(T^*) \beta(T^y),$$

viene definita in  $S$  una funzione determinante  $\gamma(T)$  ed è pure noto che, se con  $V_\alpha(T^*)$ ,  $V_\beta(T^y)$  e  $V_\gamma(T)$  si denotano le *variazioni totali* di  $\alpha(T^*)$ ,  $\beta(T^y)$  e  $\gamma(T)$  rispettivamente negli intervalli  $T^*$ ,  $T^y$  e  $T$ , risulta

$$V_\gamma(T) = V_\alpha(T^*) V_\beta(T^y).$$

Il prof. Picone ha proposto la seguente ricerca<sup>(2)</sup>: *negli spazi  $S^*$  e  $S^y$  siano date due funzioni determinanti  $\alpha(T^*)$  e  $\beta(T^y)$ ; sia dato pure in  $S^*$  un insieme lebesguiano  $I^*$  (cioè un insieme misurabile secondo Lebesgue) rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T^*)$ . Se si assegna  $I^*$  come proiezione di un insieme  $I$  dello spazio  $S = (S^*, S^y)$ , come definire in  $I^*$  la sezione  $K(x)$  di  $I$ , in funzione di  $x$ , affinchè l'insieme  $I$  risulti lebesguiano rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T^*) \beta(T^y)$ ?*

A tale ricerca, che non è stata ancora compiuta in tutta la sua generalità, appartiene il seguente risultato dovuto a Carathéodory (sul quale egli fonda la sua teoria della misura)<sup>(3)</sup>:

*Lo spazio  $S^y$  sia ad una dimensione e  $\beta(T^y) = \Delta y$ ,  $I^*$  lebesguiano rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T^*)$ ,  $K(x)$ , per ogni  $x$  in  $I^*$ , esclusi al più i punti di un insieme di  $\text{mis}_\alpha$  nulla, la totalità dei valori di  $y$  verificanti la limitazione*

$$0 \leq y \leq f(x),$$

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) Per la terminologia, le notazioni ed i richiami alla teoria degli insiemi cfr. M. PICONE, *Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni*, Pisa, Libreria Goliardica, a. 1945.

(2) Cfr. M. PICONE, loc. cit., p. 230.

(3) Cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle funktionen*, Teubner (Leipzig und Berlin), a. 1927, p. 418.

essendo  $f(x)$  una funzione quasi continua in  $I^x$ . Si ha allora che  $I$  è lebesguiano in  $S$ , rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T^x)\Delta y$ , e quindi

$$\text{mis}_{\alpha\beta} I = \int_{I^x} f(x) dV_{\alpha}.$$

In questa Nota, generalizzando il risultato di Carathéodory, risolveremo completamente la questione proposta dal prof. Picone; daremo a tal fine un'opportuna definizione di *quasi continuità* per un insieme  $K(x)$  funzione del punto  $x$  variabile in un insieme lebesguiano  $I^x$ .

\* \* \*

Se  $C$  è un insieme limitato e chiuso di un certo spazio, con  $A_n^C$  denotiamo l'intorno di  $C$  di raggio  $1/n$ , cioè la totalità dei punti (del dato spazio) che hanno da  $C$  distanza minore di  $1/n$ . L'insieme  $A_n^C$  è aperto, limitato, contiene  $C$  e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^C = A_1^C A_2^C A_3^C \dots = C.$$

Diciamo che l'insieme  $C(x)$  limitato e chiuso è *semicontinuo superiormente in un punto  $x_0$  di un insieme chiuso  $I^x$  (di  $S^x$ )*, rispetto alla funzione determinante  $\beta(T^y)$ , quando, fissato ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$ , si possono costruire un intorno  $\Delta$  di  $x_0$  (su  $S^x$ ) ed un intorno  $A_n^{C(x_0)}$  di  $C(x_0)$  (su  $S^y$ ) in modo che si abbia

$$(1) \quad \text{mis}_{\beta} A_n^{C(x_0)} - \text{mis}_{\beta} C(x_0) < \varepsilon$$

e per ogni punto  $x$  di  $\Delta I^x$  l'insieme  $C(x)$  risulti contenuto in  $A_n^{C(x_0)}$ . Diciamo poi che l'insieme  $C(x)$  è *semicontinuo superiormente in  $I^x$*  quando è semicontinuo superiormente in ogni punto di  $I^x$ .

Più in generale, sia  $K(x)$  un insieme lebesguiano rispetto a  $\beta(T^y)$ , funzione del punto  $x$  variabile in un insieme  $I^x$  chiuso, ma sempre contenuto in un intervallo fisso  $T^y$  di  $S^y$ . Diciamo che  $K(x)$  è *semicontinuo superiormente in  $I^x$* , rispetto a  $\beta(T^y)$ , quando, assunto ad arbitrio un numero  $\sigma > 0$ , per ogni punto  $x$  di  $I^x$  si può costruire un insieme chiuso  $C(x)$  contenuto in  $K(x)$ , in modo che si abbia

$$(2) \quad \text{mis}_{\beta} K(x) - \text{mis}_{\beta} C(x) < \sigma$$

e  $C(x)$  risulti semicontinuo superiormente in  $I^x$  rispetto a  $\beta(T^y)$ . Diciamo che  $K(x)$  è *semicontinuo inferiormente in  $I^x$* , rispetto a  $\beta(T^y)$ , quando l'insieme  $T^y - K(x)$  è semicontinuo superiormente rispetto a  $\beta(T^y)$ . Diciamo inoltre che  $K(x)$  è *continuo in  $I^x$* , rispetto a  $\beta(T^y)$ , quando è semicontinuo sia superiormente che inferiormente rispetto a  $\beta(T^y)$ .

Infine, se  $I^x$  è un insieme lebesguiano rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T^x)$ , diciamo che l'insieme  $K(x)$  è *quasi continuo in  $I^x$* , rispetto alle due funzioni determinanti  $\alpha(T^x)$  e  $\beta(T^y)$ , quando, scelto comunque un inter-

vallo  $T^y$  di  $S^y$  e fissato ad arbitrio un numero  $\eta > 0$ , si può costruire un insieme chiuso  $C^x$  contenuto in  $I^x$ , in modo che si abbia

$$(3) \quad \text{mis}_\alpha (I^x - C^x) < \eta$$

e l'insieme  $T^y K(x)$  risulti lebesguiano e continuo in  $C^x$  rispetto a  $\beta(T^y)$ .

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema:

*Se la proiezione  $I^x$  dell'insieme  $I$  è un insieme lebesguiano rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T^x)$ , condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme  $I$  sia lebesguiano rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T^x) \beta(T^y)$ , è che la sezione  $K(x)$  di  $I$  sia un insieme quasi continuo in  $I^x$  rispetto alle funzioni  $\alpha(T^x)$  e  $\beta(T^y)$ .*

Supponiamo, com'è lecito, che l'insieme  $I$  sia limitato.

Per dimostrare che la condizione è necessaria, fissiamo ad arbitrio un numero  $\eta > 0$  e consideriamo una successione convergente a zero di numeri positivi

$$(4) \quad \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$$

ed una successione di insiemi chiusi contenuti nell'insieme lebesguiano  $I$

$$(5) \quad C_1, C_2, \dots, C_n, \dots,$$

in modo che si abbia

$$\text{mis}_{\alpha\beta} I - \text{mis}_{\alpha\beta} C_n < \eta \sigma_n / 2^{n+1},$$

cioè (per quanto è noto)

$$(6) \quad \int_{I^x} \{ \text{mis}_\beta K(x) - \text{mis}_\beta [C_n K(x)] \} dV_\alpha < \eta \sigma_n / 2^{n+1}.$$

Denotiamo con  $G_n^x$  l'insieme dei punti di  $I^x$  pei quali *non* è

$$(7) \quad \text{mis}_\beta K(x) - \text{mis}_\beta [C_n K(x)] < \sigma_n$$

e facciamo notare che tale insieme contiene quello (di  $\text{mis}_\alpha$  nulla) costituito dai punti di  $I^x$  pei quali  $K(x)$  non è lebesguiano rispetto a  $\beta(T^y)$ ; l'insieme  $G_n^x$  è inoltre lebesguiano rispetto a  $\alpha(T^x)$ , giacchè le funzioni  $\text{mis}_\beta K(x)$  e  $\text{mis}_\beta [C_n K(x)]$  sono (com'è noto) quasi continue in  $I^x$  rispetto a  $\alpha(T^x)$ . Dalla (6), tenuto conto che nei punti di  $G_n^x$  *non vale* la (7), si trae  $\text{mis}_\alpha G_n^x < \eta / 2^{n+1}$  e quindi, ponendo  $E_1^x = G_1^x + G_2^x + \dots + G_n^x + \dots$ ,  $\text{mis}_\alpha E_1^x < \eta / 2$ . L'insieme  $I^x - E_1^x$  è lebesguiano rispetto a  $\alpha(T^x)$  e la sua misura differisce da quella di  $I^x$  per meno di  $\eta / 2$ ; denotiamo allora con  $C_1^x$  un insieme chiuso contenuto in  $I^x - E_1^x$ , tale che si abbia ancora

$$(8) \quad \text{mis}_\alpha I^x - \text{mis}_\alpha C_1^x < \eta / 2$$

e dimostriamo che in  $C_1^x$  l'insieme  $K(x)$  è semicontinuo superiormente rispetto a  $\beta(T^y)$ .

A tal fine, fissato ad arbitrio un numero  $\sigma > 0$ , consideriamo un termine  $\sigma_r < \sigma$  della successione (4) e prendiamo in corrispondenza l'insieme  $C_r$

della (5); poniamo  $C(x) = K(x) C_r$  in ogni punto di  $C_1^x$ . L'insieme  $C(x)$  risulta chiuso; inoltre, tenuto conto che per  $n = r$  la (7) non vale solo nei punti di  $G_r^x$  (contenuto in  $E_1^x$ , e quindi in  $I^x - C_1^x$ ), ha luogo la (2) in ogni punto dell'insieme chiuso  $C_1^x$ .

Basta far vedere ora che l'insieme chiuso  $C(x)$  è semicontinuo superiormente in  $C_1^x$  rispetto a  $\beta(T^y)$ .

Scelto comunque un punto  $x_0$  di  $C_1^x$  e fissato ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$ , consideriamo la successione  $A_n^{C(x_0)} (n = 1, 2, 3, \dots)$  degli intorni di  $C(x_0)$ . Poichè si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{C(x_0)} = C(x)$ , esiste un indice  $n$  pel quale valga la (1). Sia  $T^y$  un intervallo di  $S^y$  contenente l'insieme aperto  $A_n^{C(x_0)}$  e le varie sezioni  $C(x)$  di  $C_r$ ; l'insieme  $\Gamma A(x_0) \equiv T^y - A_n^{C(x_0)}$  è chiuso e non contiene punti di  $C(x_0)$ . Se con  $\Delta_m$  denotiamo l'intorno di  $x_0$  (su  $S^x$ ) di raggio  $1/m$  e con  $B_m$  l'insieme *bicilindrico*  $(\Delta C_1^x, \Gamma A(x_0))$ , cioè l'insieme che ha la proiezione  $\Delta_m C_1^x$  e la sezione costantemente uguale a  $\Gamma A(x_0)$ , si fa  $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = \Gamma A(x_0)$ , sicchè un eventuale punto  $P$  comune a tutti gli insiemi

$$(9) \quad B_1 C_r, B_2 C_r, \dots, B_m C_r, \dots$$

dovrebbe appartenere a  $\Gamma A(x_0)$  e  $C_r$  e quindi a  $C(x_0)$ , contrariamente al fatto che  $\Gamma A(x_0)$  non contiene punti di  $C(x_0)$ . Dunque gli insiemi della successione (9) sono vuoti da un certo posto in poi. Se  $B_1 C_r$  è il primo di quelli vuoti, vuol dire che per ogni punto  $x$  di  $\Delta_1 C_1^x$  i due insiemi  $C(x)$  (variabile) e  $\Gamma A(x_0)$  (fisso) non hanno punti in comune, cioè  $C(x)$  è sempre contenuto nell'insieme  $A_n^{C(x_0)}$ , complementare di  $\Gamma A(x_0)$  rispetto a  $T^y$ .

È così provato che l'insieme  $K(x)$  è semicontinuo superiormente in  $C_1^x$  rispetto a  $\beta(T^y)$ .

Osserviamo ora che, se l'intervallo  $T$  di  $S$  contiene  $I$  e  $T^y$  è la proiezione di  $T$  su  $S^y$ , l'insieme bicilindrico  $B = (I^x, T^y)$  è lebesguiano rispetto alla funzione determinante  $\alpha(T^x) \beta(T^y)$  ed è pure lebesguiano l'insieme  $\Gamma I \equiv B - I$ . Denotando allora con  $\Gamma K(x)$  la sezione di  $\Gamma I$  con  $S^y$  di piede  $x$ , per quanto abbiamo già visto, possiamo trovare un insieme chiuso  $C^x$ , contenuto in  $C_1^x$ , tale che si abbia

$$(10) \quad \text{mis}_\alpha C_1^x - \text{mis}_\alpha C^x < \eta/2$$

e nel quale l'insieme  $\Gamma K(x)$  risulti lebesguiano e semicontinuo superiormente rispetto a  $\beta(T^y)$ . Dunque nell'insieme chiuso  $C^x$  la sezione  $K(x)$  è un insieme lebesguiano e continuo rispetto a  $\beta(T^y)$  e poichè dalle (8) e (10) si ricava la (3), il nostro assunto è dimostrato.

Viceversa, sempre supponendo che l'insieme  $I$  sia limitato, qualora la sezione  $K(x)$  sia un insieme quasi continuo in  $I^x$  rispetto a  $\alpha(T^x)$  e  $\beta(T^y)$ , possiamo dimostrare che  $I$  è lebesguiano, rispetto alla funzione  $\alpha(T^x) \beta(T^y)$ , cioè che in corrispondenza ad ogni numero  $\sigma > 0$  si possono costruire due insiemi lebesguiani  $C$  e  $A$ , il primo contenuto in  $I$  ed il secondo contenente  $I$ , in modo che risulti

$$(11) \quad \text{mis}_{\alpha\beta} A - \text{mis}_{\alpha\beta} C < \sigma.$$



Sia  $T$  un intervallo quadrato dello spazio  $S$ , contenente internamente  $I$  e siano  $T^z$  e  $T^s$  le proiezioni di  $T$  su  $S^z$  e  $S^s$ ; sia  $M$  un numero positivo non minore di  $\text{mis}_\alpha T^z$  e  $\text{mis}_\beta T^s$ . Dato ad arbitrio un numero  $\sigma > 0$ , poichè  $K(x)$  è quasi continuo, possiamo costruire un insieme chiuso  $C^z$ , contenuto in  $I^z$ , nel quale  $K(x)$  sia lebesguiano e continuo rispetto a  $\beta(T^z)$ , e tale che si abbia  $\text{mis}_\alpha I^z - \text{mis}_\alpha C^z < \sigma/2M$ ; inoltre, ricordando che  $I^z$  è lebesguiano, possiamo costruire un insieme aperto  $A^z$  contenente  $I^z$ , ma contenuto, in  $T^z$ , pel quale risulti ancora

$$(12) \quad \text{mis}_\alpha A^z - \text{mis}_\alpha C^z < \sigma/2M.$$

Considerando la semicontinuità superiore, possiamo costruire, per ogni punto  $x$  di  $C^z$ , un insieme chiuso  $C^s(x)$ , contenuto in  $K^s(x)$ , in modo che si abbia

$$(13) \quad \text{mis}_\beta K^s(x) - \text{mis}_\beta C^s(x) < \sigma/4M$$

e l'insieme chiuso  $C^s(x)$  sia semicontinuo superiormente in ogni punto di  $C^z$ . Denotiamo con  $C$  l'insieme che ha la proiezione  $C^z$  e la sezione  $C^s(x)$  (nel punto  $x$ ) e dimostriamo che  $C$  è chiuso.

Sia infatti  $P(x_0, y_0)$  un punto di accumulazione di  $C$  (dove  $x_0$  e  $y_0$  sono le proiezioni di  $P$  su  $S^z$  e  $S^s$ ). Il punto  $x_0$  non può essere esterno all'insieme  $C^z$ , sicchè  $x_0$  appartiene a  $C^z$ , essendo questo un insieme chiuso. Se  $y_0$  non appartenesse a  $C^s(x_0)$ , dalla relazione  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{C(x_0)} = C^s(x_0)$ , seguirebbe che il punto  $y_0$  non potrebbe appartenere a tutti gli intorno  $A_n^{C(x_0)}$  e se  $A_n^{C(x_0)}$  è il primo di quelli che non lo contiene, ogni altro intorno  $A_n^{C(x_0)}$  ( $n = \nu + 1, \nu + 2, \dots$ ), lo avrà come punto esterno; basta porre allora  $\varepsilon = \text{mis}_\beta A_n^{C(x_0)} - \text{mis}_\beta C^s(x_0)$ , perchè  $y_0$  risulti esterno ad ogni insieme  $A_n^{C(x_0)}$  pel quale valga la (1). Ma  $C^s(x)$  è semicontinuo superiormente nel punto  $x_0$ , sicchè si può trovare un intorno  $A_n^{C(x_0)}$  pel quale valga la (1) e si può costruire un intorno  $\Delta$  di  $x_0$  in modo che per ogni punto  $x$  di  $\Delta$  l'insieme  $C^s(x)$  risulti contenuto in  $A_n^{C(x_0)}$ . In tal modo  $P(x_0, y_0)$  risulterebbe esterno a  $C$ , contro l'ipotesi che ne sia un punto di accumulazione. Dunque  $C$  è chiuso e si ha

$$(14) \quad \text{mis}_{\alpha\beta} C = \int_{C^z} \text{mis}_\beta C^s(x) dV_\alpha.$$

Adesso, poichè l'insieme  $T^z - K^z(x)$  è semicontinuo superiormente in  $C^z$  rispetto a  $\beta(T^z)$ , per quanto abbiamo visto, possiamo costruire un insieme chiuso  $\Gamma C$ , contenuto nell'insieme definito dalla proiezione  $C^z$  e dalla sezione (variabile,  $T^z - K^z(x)$ , in modo che risulti in  $C^z$

$$(15) \quad \text{mis}_\beta [T^z - K^z(x)] - \text{mis}_\beta \Gamma C(x) < \sigma/4M.$$

Con  $\Gamma C^s(x)$  abbiamo indicato la sezione di  $\Gamma C$ . Consideriamo l'insieme lebesguiano  $A$  formato dalla differenza tra l'insieme bicilindrico (lebesguiano,  $A^z, T^z$ ), e l'insieme chiuso  $\Gamma C$  e denotiamo con  $A^s(x)$  la sezione di  $A$ . Risulta

$A(x) = T^y$  se  $x$  non appartiene a  $C^x$  ed in ogni caso  $K(x)$  risulta contenuto in  $A(x) = T^y - \Gamma C(x)$ .

Dalla (15) si trae  $\text{mis}_\beta A(x) - \text{mis}_\beta K(x) < \sigma/4 M$  in  $C^x$ , e per la (13),

$$(16) \quad \text{mis}_\beta A(x) - \text{mis}_\beta C(x) < \sigma/2 M$$

sempre in ogni punto di  $C^x$ ; d'altra parte, poichè  $A$  è lebesguiano,

$$\begin{aligned} \text{mis}_{\alpha\beta} A &= \int_{A^x} \text{mis}_\beta A(x) dV_\alpha = \int_{C^x} \text{mis}_\beta A(x) dV_\alpha + \int_{A^x - C^x} \text{mis}_\beta A(x) dV_\alpha = \\ &= \int_{C^x} \text{mis}_\beta A(x) dV_\alpha + \text{mis}_\beta T^y \text{mis}_\alpha (A^x - C^x) \end{aligned}$$

e per la (12) e per essere  $\text{mis}_\beta T^y \leq M$ ,

$$\text{mis}_{\alpha\beta} A < \int_{C^x} \text{mis}_\beta A(x) dV_\alpha + \frac{\sigma}{2}$$

Da questa, tenuto conto della (16), si ricava

$$\text{mis}_{\alpha\beta} A < \int_{C^x} \text{mis}_\beta C(x) dV_\alpha + \frac{\sigma}{2M} \text{mis}_\alpha C^x + \frac{\sigma}{2}$$

e in definitiva, avendo presente la (14) ed osservando che  $\text{mis}_\alpha C^x < \text{mis}_\alpha T^x \leq M$ ,

$$\text{mis}_{\alpha\beta} A < \text{mis}_{\alpha\beta} C + \sigma/2 + \sigma/2$$

e quindi la (11).

**Matematica.** — *Intorno alla distribuzione degli zeri di certi polinomi.* Nota di G. COLOMBO, presentata (\*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. In questa Nota stabilisco che:

Se  $P(x)$  e  $Q(x)$  sono due polinomi di ugual grado e coefficienti reali, ed a radici tutte reali e mutuamente separantisi, l'equazione

$$P(x) + i Q(x) = 0$$

ha tutte le sue radici situate da una stessa banda dell'asse reale.

Avevo inizialmente ottenuto tale risultato, il quale inverte un teorema dovuto a Ch. Hermite<sup>(1)</sup> ed a Ch. Biehler<sup>(2)</sup>, mediante un procedimento

(\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) CH. HERMITE, *Sur l'indice des fractions rationnelles*. « Bull. Soc. Math. de France », 7 (1879), 131 e parzialmente in LAGUERRE, *Oeuvres*, I, 109 e 360.

(2) CH. BIEHLER, *Sur une classe d'equations algébriques dont toutes les racines sont réelles*. « Journ. de Crelle », 87 (1879), 350.

simile ma meno semplice di quello quì esposto. A quest'ultimo fui condotto dalle gentili osservazioni del prof. B. Segre, che mi hanno spinto alla ricerca di risultati analoghi inerenti al caso in cui non si assuma la realtà delle radici di  $P(x)$  e  $Q(x)$ . Qui dimostro vari teoremi in questo indirizzo, dai quali l'inverso del teorema di Hermite-Biehler segue poi come corollario (n. 4) in forma anche più precisa.

2. Considero l'equazione

$$(1) \quad \prod_i^n (z - a_i) = K \prod_i^n (z - b_i),$$

dove le  $a_i, b_i$ , sono numeri reali o complessi, ed è  $K \neq 0$ . Denoto con  $\vartheta$  l'argomento di  $K$  ridotto ad essere compreso tra  $0$  e  $2\pi$ , con  $\Theta$  il valore assoluto dello stesso argomento ridotto tra  $-\pi$  e  $\pi$ , di guisa che  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \Theta \leq \pi$ . Indico poi ogni punto del piano di Argand Gauss col numero complesso di cui è l'affissa. Sussiste allora il seguente teorema.

*Se i punti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sono soltanto soggetti alla condizione di stare sopra una data ovale  $C$ , e di separarsi ivi mutuamente, si ha che:*

a) *La (1) ha tutte le sue radici interne o sul contorno della regione delimitata dalla curva, diciamola  $\Gamma$ , luogo dei punti da cui escono due raggi di appoggio di  $C$  formati l'angolo,  $\Theta$ .*

b) *Se  $K$  è reale, nessuna radice della (1) è interna od esterna alla regione convessa delimitata da  $C$ , secondochè  $K < 0$  o  $K > 0$ .*

Per dimostrarlo, scrivo l'equazione (1) nella forma

$$(2) \quad \prod_i^n \frac{z - a_i}{z - b_i} = K$$

ed osservo che, qualunque siano i punti distinti  $a, b, z$ , risulta

$$(3) \quad \argomento \frac{z - a}{z - b} = \argomento b \hat{z} a,$$

gli angoli essendo qui ed in seguito misurati in radianti nel verso antiorario. Suppongo inoltre di aver numerati i punti  $a_i, b_i$  in modo ch'essi si succedano su  $C$  nell'ordine  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ , secondo il verso orario. Indicando con  $\vartheta_i$  l'angolo  $b_i \hat{z} a$ , ove  $z$  sia un punto arbitrario distinto da  $a_i$  e  $b_i$ , si ha ovviamente che il primo membro della (2) ha l'argomento  $\sum_i \vartheta_i$ ; questo deve essere congruo modulo  $2\pi$  all'argomento  $\vartheta$  del secondo membro, se si vuole che  $z$  sia una radice delle (1).

Se  $z$  è un punto interno alla regione convessa delimitata da  $C$ , ogni semiretta del fascio di centro  $z$  incontra  $C$  in un punto solo. Gli angoli  $\vartheta_i$  ( $0 < \vartheta_i < 2\pi$ ) hanno il solo vertice  $z$  in comune, per l'ipotesi che i punti  $a$  e  $b$  si succedano su  $C$  nell'ordine  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$  secondo il verso orario. Perciò si ha

$$(4) \quad 0 < \sum_i \vartheta_i < 2\pi,$$

se  $\chi$  è un punto interno alla regione convessa delimitata da  $C$ . Ne segue che, per ogni  $\chi$  siffatto, l'argomento del primo membro della (2) non può essere congruo a zero modulo  $2\pi$ , onde la (1) non può essere soddisfatta se  $K$  è reale positivo.

Assunto il verso orario come verso di percorrenza di  $C$ , e presi due punti  $a, b$  arbitrari di  $C$ , indichiamo con  $(a, b)$  l'arco di  $C$  che, nel verso fissato, ha come origine  $a$  ed estremo  $b$ . Se  $\chi$  è esterno alla regione convessa delimitata da  $C$ , denotiamo poi con  $C_1, C_2$  i due archi in cui  $C$  viene divisa dai punti  $c_1, c_2$  di contatto di  $C$  coi raggi di appoggio uscenti da  $\chi$ ; più precisamente, gli archi siano numerati nell'ordine in cui vengono incontrati dai raggi del fascio di centro  $\chi$ , ed i punti  $c_1, c_2$  siano numerati in modo che risulti  $C_1 = (c_1, c_2), C_2 = (c_2, c_1)$ . Sia  $\gamma$  infine il valore assoluto dell'angolo convesso formato dai raggi  $\chi c_1, \chi c_2$ .

Ove l'arco  $(a_i, b_i)$  appartenga a  $C_1 (C_2)$ , potendo  $a_i$  coincidere con  $c_1 (c_2)$ ,  $b_i$  coincidere con  $c_2 (c_1)$ , il relativo angolo convesso  $\vartheta_i$  ( $-\pi < \vartheta_i < \pi$ ) sarà minore (maggiore) di zero per le ipotesi fatte sulla numerazione dei punti  $a$  e  $b$ . Se l'arco  $(a_r, b_r)$  contiene  $c_2 (c_1)$ , denotando con  $\vartheta_r'$  l'angolo convesso positivo (negativo)  $b_r \hat{\chi} c_2 (b_r \hat{\chi} c_1)$  e con  $\vartheta_r''$  l'angolo convesso negativo (positivo)  $c_2 \hat{\chi} a_r (c_1 \hat{\chi} a_r)$ , si ha che  $\vartheta_r$  è la somma di  $\vartheta_r'$  e  $\vartheta_r''$ .

Indichiamo con  $\Sigma_1 (\Sigma_2)$  la somma degli angoli convessi  $\vartheta_i$  relativi alle eventuali coppie  $a_i, b_i$  che appartengono a  $C_1 (C_2)$ , cui si aggiunga l'angolo convesso  $b_r \hat{\chi} c_1 (b_r \hat{\chi} c_2)$  se  $C_1 (C_2)$  è interno all'arco  $(a_r, b_r)$ , come pure l'angolo convesso  $c_2 \hat{\chi} a_r (c_1 \hat{\chi} a_r)$  se  $c_2 (c_1)$  è interno all'arco stesso.

Gli angoli che compaiono come addendi in  $\Sigma_1 (\Sigma_2)$  sono tutti negativi (positivi), hanno fra loro il solo vertice in comune, ed appartengono tutti all'angolo  $c_2 \hat{\chi} c_1$ ; sarà pertanto

$$(5) \quad -\gamma \leq \Sigma_1 \leq 0 \quad , \quad 0 \leq \Sigma_2 \leq \gamma.$$

Ne risulta che, nel suddetto punto  $\chi$ , l'argomento  $\Sigma_1 + \Sigma_2$  del primo membro della (2) è in valore assoluto minore od uguale a  $\gamma$ .

D'altra parte, se  $\chi$  è un punto della regione infinita delimitata da  $\Gamma$ , vale la disuguaglianza  $\gamma < \Theta$  onde allora si ha

$$0 \leq |\Sigma_1 + \Sigma_2| \leq \gamma < \Theta \leq \pi.$$

Dunque per tale  $\chi$  gli argomenti dei due membri delle (2) non possono essere congrui modulo  $2\pi$ , ciò che dimostra *a*).

Per completare la dimostrazione di *b*), basterà osservare che  $\Gamma$  si riduce a  $C$  ogni volta che sia  $\Theta = \pi$ , e cioè per  $K$  reale negativo.

3. Siano  $a_i, b_i$  i vertici di un  $2n$ -gono convesso,  $P$ , succedentisi nell'ordine  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  secondo il verso orario. Introduciamo le seguenti notazioni, oltre a quelle già usate nel n. 1: denotiamo con  $A_s$  la regione esterna a  $P$ , che può estendersi all'infinito, limitata dal lato  $a_s b_s$  e dei prolungamenti dei due lati adiacenti, con  $B_s$  la regione analoga relativa al lato  $b_s a_{s+1}$  ( $a_{n+1} \equiv a_1$ ). Costruiamo poi su tutti i lati e su tutte le diagonali di  $P$ , e da ambo le parti,



gli archi di cerchio capaci dell'angolo  $\Theta$ , e consideriamo i segmenti circolari delimitati da quegli archi e dai segmenti su cui sono stati costruiti. L'insieme dei punti di  $P$  e dei punti esterni a  $P$  che appartengono ad almeno uno di quei segmenti circolari, costituisce una regione chiusa semplicemente connessa, chiamiamola  $R$ . Il suo contorno,  $L$ , è ovviamente costituito di alcune porzioni degli archi di cerchio suddetti.

Vale allora il seguente teorema:

- a) Nessuna radice della (I) è esterna alla regione  $R$ .  
 b) Esistono due numeri  $\sigma$  e  $\tau$ , soddisfacenti alle disuguaglianze.

$$0 < \sigma < \pi < \tau < 2\pi,$$

tali che se  $\vartheta$  è esterno all'intervallo  $(\sigma, \tau)$  nessuna soluzione della (I) è interna a  $P$ .

- c) Esistono per ogni  $s = 1, 2, \dots, n$  un  $\alpha_s$  ed un  $\beta_s$  soddisfacenti alle disuguaglianze

$$0 < \alpha_s < \pi, \quad 0 < \beta_s < \pi,$$

tali che se  $\vartheta > \beta_s$  nessuna radice della (I) è interna a  $B_s$  e se  $\vartheta < 2\pi - \alpha_s$  nessuna radice delle (I) è interna ad  $A_s$ .

- d) Esiste un  $\rho < \pi$  tale che, se  $\Theta > \rho$ , nessuna radice della (I) è esterna a  $P$ .

La a) discende immediatamente dal Teorema del n. 2, poichè la linea  $\Gamma$  ivi definita diventa la  $L$  se l'ovale  $C$  si riduce al poligono dianzi considerato.

Per completare la dimostrazione, premettiamo alcune considerazioni ausiliarie. Sia dato un segmento  $ab$  che faccia parte del contorno di una regione finita e convessa  $\Sigma$ . La lunghezza degli archi di cerchio di estremi  $a$  e  $b$  che delimitano assieme al segmento suddetto una regione convessa contenente  $\Sigma$  ammette un minimo, e denotiamo con  $(a, b; \Sigma)$  l'arco minimo. Detto  $\sigma_i$  l'angolo di cui è capace l'arco  $(a_i, b_i; P)$ , se  $z$  è interno e  $P$  risulta  $\vartheta_i > \sigma_i$  e quindi

$$(6) \quad \sum_i \sigma_i < \sum_i \vartheta_i < 2\pi.$$

Se  $\vartheta_i$  è l'angolo convesso  $b_i \hat{\angle} a_{i+1}$ , si ha inoltre:

$$(7) \quad \sum_i \vartheta_i + \sum_i \vartheta'_i = 2\pi.$$

Indichiamo con  $\tau_i$  l'angolo di cui è capace l'arco  $(b_i, a_{i+1}; P)$ ; sempre per  $z$  interno e  $P$  abbiamo

$$(8) \quad \sum_i \vartheta'_i > \sum_i \tau_i,$$

e quindi

$$(9) \quad \sum_i \vartheta_i < 2\pi - \sum_i \tau_i.$$

Poichè d'altra parte, come facilmente si vede, esiste un  $z$  interno a  $P$  per cui è  $\sum_i \vartheta_i > \pi$  ed anche un  $z$  per cui è  $\sum_i \vartheta_i > \pi$ , sarà, come ora proveremo,

$$(10) \quad \sum_i \sigma_i < \pi, \quad \sum_i \tau_i < \pi.$$

Chè se fosse  $\sum_i \sigma_i \geq \pi$ , per ogni  $\zeta$  interno a  $P$  risulterebbe  $\sum_i \vartheta_i > \pi$  e quindi per le (7)  $\sum_i \vartheta_i < \pi$ , contrariamente a quanto detto sopra; e similmente per l'altra disuguaglianza (10).

Dalle (6), (9), (10) segue la  $b$ , avendo posto  $\sigma = \sum_i \sigma_i$ ,  $\tau = 2\pi - \sum_i \tau_i$ .

Costruito esternamente a  $P$  il semicerchio di diametro  $a_s b_s$ , denotiamo con  $C_s$  la porzione di questo che appartiene ad  $A_s$ ; e sia  $\alpha'_s$  ( $r = s$ ) l'angolo di cui è capace l'arco  $(a_r, b_r; P + C_s)$ . Ove  $\zeta$  si trovi in  $C_s$  si ha che

$$(11) \quad -\pi + \sum_r \alpha'_{sr} \leq \sum_i \vartheta_i \leq 0.$$

Ciò si ottiene mediante considerazioni analoghe a quelle svolte nel n. 2, tenendo presente che  $\sum_i \vartheta_i = \vartheta_s - \sum_{i \neq s} \vartheta_i$ , dove  $-\pi \leq \vartheta_s \leq 0$  e  $0 \leq \sum_{i \neq s} \vartheta_i \leq \vartheta_s$ , ed inoltre che  $\sum_r \alpha'_{sr} < \sum_{i \neq s} \vartheta_i$ . Se  $\zeta$ , invece, appartiene ad  $A_s$  ma non  $C_s$ , si ha ovviamente

$$(12) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sum_i \vartheta_i \leq 0.$$

Analogamente, denotiamo con  $C'$  la regione comune a  $B_s$  ed al semicerchio, esterno a  $P$ , di diametro  $b_s a_s$ ; se inoltre indichiamo con  $\beta'_s$  l'angolo di cui è capace l'arco  $(a_r, b_r; P + C'_s)$ , valgono le

$$(13) \quad 0 \leq \sum_i \vartheta_i \leq \pi - \sum_r \beta'_{sr},$$

$$(14) \quad 0 \leq \sum_i \vartheta_i \leq \frac{\pi}{2},$$

rispettivamente per ogni  $\zeta$  di  $B_s$  che appartenga o non appartenga a  $C'$ .

Detto  $\alpha_s$  il maggiore dei numeri  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\sum_r \alpha'_{sr}$ , dalle (11), (12) si deduce che per  $\vartheta < 2\pi - \alpha_s$  nessuna radice della (1) è interna ad  $A_s$ . Analogamente, detto  $\beta_s$  il maggiore dei numeri  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\sum_r \beta'_{sr}$ , delle (14), (15) si ottiene che per  $\vartheta > \beta_s$  nessuna radice della (1) appartiene a  $B_s$ . Così risulta provata la  $c$ . Denotiamo ora con  $\lambda_i$  ( $\mu_i$ ) l'angolo interno del poligono  $P$ , di vertice  $a_i$  ( $b_i$ ). Se  $\zeta$  è un punto interno all'angolo opposto al vertice di  $\lambda_i$  ( $\mu_i$ ), la somma degli angoli convessi  $\vartheta_i$  soddisfa alla

$$(15) \quad |\sum_i \vartheta_i| < \lambda_i \quad (|\sum_i \vartheta_i| < \mu_i).$$

In base alle (11)–(15), detto  $\rho$  il massimo dei numeri  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$ ,  $\lambda_s$ ,  $\mu_s$ , ciascuno dei quali è minore di  $\pi$ , si trae la  $d$ ).

4. Dai teoremi dei nn. 2, 3 seguono i seguenti corollari, che ci limitiamo ed enunciare:

I. – Se  $K$  è reale positivo, nessuna radice della (1) è interna ad una delle regioni  $P$ ,  $A_r$ ,  $B_r$ .

II. – Se  $K$  è reale negativo, nessuna radice è esterna a  $P$ .

III. – Diciamo  $I_a$  ed  $I_b$  rispettivamente gli insiemi dei punti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , e supponiamo che i punti dei due insiemi stiano su di

una retta orientata, ove si succedano nell'ordine in cui sono numerati. Ammettiamo inoltre che i punti di ciascun insieme possano eventualmente coincidere a coppie, ma che i due insiemi non abbiano punti in comune. Una coppia di punti consecutivi dello stesso insieme si dirà separata o non separata, secondochè tra gli elementi della coppia cade o non cade qualche elemento dell'altro insieme. Diciamo  $a$  il primo e  $b$  l'ultimo dei  $2n$  punti  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  e supponiamo infine che questi punti verifichino le seguenti condizioni:

a) Tre punti consecutivi non appartengano mai allo stesso insieme  $I_a$  o  $I_b$ .

b) Se il punto  $a$  appartiene ed  $I_a$  ( $I_b$ ), la prima coppia non separata appartenga ad  $I_b$  ( $I_a$ ).

c) Tra due coppie non separate di  $I_a$  ( $I_b$ ) cada sempre una ed una sola coppia non separata di  $I_b$  ( $I_a$ ).

Sussiste allora il seguente teorema:

Se  $K$  non è reale, nessuna radice delle (1) è esterna alla regione finita delimitata dai due archi di cerchio, capaci dell'angolo  $\Theta$ , costruiti da bande opposte sul segmento  $ab$ . Se  $K$  è reale negativo, ogni radice delle (1) è reale ed interna al segmento  $ab$ .

IV. — Se i punti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sono allineati e si separano mutuamente, onde non è restrittivo supporre che  $a_1$  sia il primo e  $b_n$  sia l'ultimo di tali punti, allora se  $\Theta = 0$  o  $\Theta = \pi$  tutte le radici delle (1) risultano interne alla regione delimitata dal segmento  $a_1 b_n$  e dall'arco di cerchio capace dell'angolo  $\Theta$  costruito su questo, alla sinistra o alla destra di un osservatore che vada da  $a_1$  a  $b_n$ , secondochè  $\pi < \vartheta < 2\pi$  oppure  $0 < \vartheta < \pi$ . Se invece risulta  $\Theta = 0$ , o  $\Theta = \pi$ , tutte le radici sono reali ed interne ai segmenti  $a_i b_i$  se  $\Theta = \pi$ , ai segmenti  $b_i a_{i+1}$  se  $\Theta = 0$ .

Dall'ultimo corollario si deduce la seguente precisazione del risultato enunciato nel n. I:

V. — Siano  $P(x)$  e  $Q(x)$  due polinomi di ugual grado a coefficienti reali, le cui radici  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  siano tutte reali e tali che

$$a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n$$

ovvero

$$b_n < a_n < b_{n-1} < \dots < b_1 < a_1.$$

Se  $p$  e  $q$  sono i coefficienti dei termini di massimo grado dei due polinomi, le radici dell'equazione

$$P(x) + iQ(x) = 0$$

stanno tutte nel semicerchio di diametro il segmento  $a_1 b_n$ , situato alla sinistra o alla destra di un osservatore che percorra questo segmento da  $a_1$  a  $b_n$ , secondochè risulta  $pq > 0$  o  $pq < 0$ .

**Geometria.** — *Sui sistemi di ipersuperficie di  $S_r$  che ammettano lo stesso sistema primo polare nei casi in cui l'omografia determinata dai poli sia particolare.* Nota di C. LONGO, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. È noto<sup>(1)</sup> che le ipersuperficie  $V_{r-1}^n$  di  $S_r$  aventi lo stesso sistema primo polare si distribuiscono in uno od infiniti sistemi lineari  $\Lambda$  e che tra i poli sussiste una omografia  $\Omega$  determinata da due generiche  $V_{r-1}^n$  (non coni) di uno stesso sistema  $\Lambda$ .

Nel caso che  $\Omega$  sia generale siano  $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(\sigma)}-1}$  ( $\sum h^{(i)} = r+1$ ) i suoi spazi fondamentali e sia  $S_{r-h^{(i)}}^{(i)}$  lo spazio coniugato allo spazio fondamentale  $S_{h^{(i)}-1}$ . Indicata con  $W_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \sigma$ ) una ipersuperficie avente come spazio  $n^{plo}$  lo spazio  $S_{r-h^{(i)}}$  si ha<sup>(2)</sup>

$$\Lambda \equiv \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \dots + \lambda_\sigma W_\sigma.$$

Nella presente Nota determino i sistemi  $\Lambda$  nei casi in cui la  $\Omega$  sia particolare ( $\sum h^{(i)} < r+1$ ) esaminando il caso in cui  $\Omega$  abbia una sola radice caratteristica ed una sola catena<sup>(3)</sup> e dando i risultati negli altri casi ( $\Omega$  con una sola radice caratteristica e più catene dello stesso ordine;  $\Omega$  con una sola radice caratteristica e più catene non tutte dello stesso ordine;  $\Omega$  con più radici caratteristiche). Con ciò rimane completamente esaurito il problema della determinazione dei sistemi  $\Lambda$ .

In una Nota dei «Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni», dell'Università di Roma, esporrò le dimostrazioni anche in questi ultimi casi e darò alcune proprietà geometriche dei sistemi  $\Lambda$ .

## 2. RICHIAMI GENERALI. — Siano:

$$(1.2) \quad \gamma_i = \sum a_{ik} z_k$$

le equazioni di una *determinata* omografia (non degenera). Se  $\varphi(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$  ed  $f(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$  sono le equazioni di due  $V_{r-1}^n$  appartenenti ad uno stesso sistema  $\Lambda$  di ipersuperficie aventi lo stesso sistema primo polare e tali che la (1.2) sia l'omografia  $\Omega$  tra i poli, posto:

$$f_b = \frac{\partial f}{\partial x_b}, \quad f_{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k}$$

(\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) BERTINI, *Sui sistemi di ipersuperficie di  $S_r$  aventi le stesse prime polari*. «Acc. Lincei», 7, 217, 1898; LONGO, *Sui sistemi di ipersuperficie di  $S_r$  aventi lo stesso sistema primo polare*. «Acc. Lincei», vol. III, fasc. 3-4, p. 282, 1947.

(2) BERTINI, Nota citata.

(3) LONGO, Nota citata.



si deve avere identicamente

$$(2.2) \quad f_b = \sum a_{kb} \varphi_k.$$

Le relazioni

$$(3.2) \quad \sum a_{ki} \varphi_{kj} = \sum a_{kj} \varphi_{ki}$$

rappresentano le condizioni di integrabilità del sistema (2.2).

Il Bertini ha dimostrato che:

1°) le condizioni (3.2) sono *necessarie e sufficienti* affinché una  $\varphi = 0$  appartenga al sistema  $\Lambda$ .

2°) presa una *determinata*  $\varphi = 0$  soddisfacente alle (3.2) applicando ad essa una trasformazione  $y_i = \sum a'_{ik} z_k$  della stessa specie della (1.2), la trasformata di  $\varphi = 0$ , variando le  $a'_{ik}$  da tutte le  $V_{r-1}^n$  del sistema  $\Lambda$  di cui fa parte la  $\varphi = 0$ .

3.  $\Omega$  CON UNA SOLA RADICE CARATTERISTICA ED UNA SOLA CATENA. — È noto <sup>(4)</sup> che le equazioni della  $\Omega$  si possono ridurre al tipo:

$$y_1 = ax_1 \quad ; \quad y_2 = a_2 x_1 + ax_2 ; \dots ; \quad y_{r+1} = a_{r+1} x_r + ax_{r+1}.$$

In tale caso le relazioni (3.2) divengano:

$$(1.3) \quad a_{b+1} \varphi_{b+1, k} = a_{k+1} \varphi_{k+1, b}.$$

Posto:

$$(2.3) \quad [k, b+1] = \varphi_{k, b+1} = [b+1, k] \quad (s)$$

$$(3.3) \quad N_i^j = a_i \cdot a_{i+1} \dots a_j \quad (i \leq j)$$

$$(4.3) \quad D_i = \frac{1}{a_2 \cdot a_3 \dots a_i}.$$

dalle (1.3) segue:

$$(5.3) \quad [k, b+1] = N_{k+1}^{b+k} D_{b+1} [b+k, 1] = N_{b+2}^{b+k} D_k [b+k-1].$$

Indicata con  $(i_1, \dots, i_s)$  una combinazione con ripetizione di classe  $s$  sugli indici  $2, 3, \dots, r+1$  e posto:

$$\delta_{i_1, \dots, i_s} = \begin{cases} 1 & \text{se gli indici } i_1, \dots, i_s \text{ sono distinti} \\ \frac{1}{\alpha! \beta! \dots} & \text{se tra gli indici } i_1, \dots, i_s \text{ ve ne sono } \alpha \text{ uguali tra loro,} \\ & \text{altri } \beta \text{ uguali tra loro, ecc.} \end{cases}$$

scriviamo la funzione  $\varphi$  nella forma:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{r+1}) = \sum_1^n x_1^{n-s} \sum_{(i_1, \dots, i_s)} \delta_{i_1, \dots, i_s} c_{i_1, \dots, i_s} x_{i_1} \dots x_{i_s},$$

(4) PREDELLA, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*. « Annali di Matematica », 113, 1889; BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*. Ed. Principato, p. 75.

(5) Evidentemente  $[i, j] = 0$  se uno degli indici  $i$  o  $j$  è maggiore di  $r+1$ .

in cui si è posta in evidenza la variabile  $x_i$ , che posta uguale a zero fornisce l'iperpiano unito nell'omografia  $\Omega$ ; la  $\sum_{(i_1, \dots, i_s)}$  va estesa a tutte le combinazioni  $(i_1, \dots, i_s)$  e  $c_{i_1, \dots, i_s}$  sono costanti da determinare in modo che siano soddisfatte le (5.3).

Per le  $c$  a due e a tre indici si ha con computo diretto:

$$\begin{aligned} c_{i_1 i_2} &= (n-1) c_{i_1+i_2-1} D_{i_1} N_{i_2+1}^{i_1+i_2-1}, \\ c_{i_1 i_2 i_3} &= (n-1)(n-2) c_{i_1+i_2+i_3-2} D_{i_1} D_{i_2} N_{i_3+1}^{i_1+i_2+i_3-2}. \end{aligned}$$

Sopposto ora che le relazioni precedenti si estendano fino all'indice  $i_{s-1}$ , cioè che sia:

$$(6.3) \quad c_{i_1, \dots, i_{s-1}} = (n-1)(n-2) \dots (n-s+2) c_{i_1+\dots+i_{s-1}-s+2} D_{i_1} \dots D_{i_{s-2}} N_{i_{s-1}+1}^{i_1+\dots+i_{s-1}-s+2}$$

determiniamo le  $c_{i_1, \dots, i_s}$  in base alle (5.3) e proviamo che esse hanno espressione analoga alla precedente.

Posto nella (5.3)  $k = i_\tau$  e  $h+1 = i_t$ , si deve avere:

$$\begin{aligned} c_{i_1, \dots, i_{t-1}, i_t, i_{t+1}, \dots, i_{\tau-1}, i_\tau, i_{\tau+1}, \dots, i_s} = \\ = (n-s+1) c_{i_1, \dots, i_{t-1}, i_{t+1}, \dots, i_{\tau-1}, i_{\tau+1}, \dots, i_s, i_t+i_\tau-1} D_{i_t} N_{i_\tau+1}^{i_t+i_\tau-1}. \end{aligned}$$

Per la (6.3) si ha:

$$\begin{aligned} c_{i_1, \dots, i_s} &= (n-1)(n-2) \dots (n-s+1) c_{i_1+\dots+i_{s-1}+1} D_{i_1} \dots D_{i_{s-1}} \\ &\quad \cdot D_{i_{s-1}+1} \dots D_{i_s} N_{i_{s-1}+1}^{i_1+\dots+i_{s-1}+1} N_{i_s+1}^{i_1+\dots+i_s-1}. \end{aligned}$$

Per le (3.3) e (4.3) segue, come si voleva dimostrare:

$$c_{i_1, \dots, i_s} = (n-1)(n-2) \dots (n-s+1) c_{i_1+\dots+i_s-s+1} D_{i_1} \dots D_{i_{s-1}} N_{i_s+1}^{i_1+\dots+i_s-s+1}.$$

Poichè l'indice massimo per le  $c_i$  è  $r+1$ , si deve avere:

$$(7.3) \quad \sum_i i_i - s \leq r$$

ed il valore massimo  $s^*$  di  $s$  si ha quando nella precedente vale il segno di uguaglianza ed è  $i_1 = i_2 = \dots = i_s = 2$ . Per  $s^*$  si ha quindi:  $s^* = r$ . Posto:

$$A/o = x_1^{n-1}, \quad A/s = \frac{d^s x_1^{n-1}}{dx_1^s}$$

si ha allora:

$$\begin{aligned} (8.3) \quad & \varphi(x_1, \dots, x_{r+1}) = \\ & = \sum_{i=0}^r A/s-i \sum_{(i_1, \dots, i_s)} \delta_{i_1, \dots, i_s} c_{i_1+\dots+i_s-s+1} D_{i_1} \dots D_{i_{s-1}} N_{i_s+1}^{i_1+\dots+i_s-s+1} x_{i_1} \dots x_{i_s}, \end{aligned}$$

ove la  $\sum_{(i_1, \dots, i_s)}$  va estesa a tutte le combinazioni con ripetizione per le quali sia soddisfatta la (7.3).

L'espressione precedente si può anche scrivere mettendo in evidenza i termini che dipendono da una stessa costante  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r+1$ ).

Indicata con  $\Gamma(x_1, \dots, x_{t+1})$  la somma dei termini che dipendono dalla costante  $c_{t+1}$  si ha:

$$(9.3) \quad \Gamma(x_1, \dots, x_{t+1}) = \sum_{i=1}^t A_{i-s-1} \sum_{(i_1, \dots, i_s)} \delta_{i_1, \dots, i_s} D_{i_1} \dots D_{i_{s-1}} N_{i_s+1}^{i_1+\dots+i_s-s+1} x_{i_1} \dots x_{i_s}$$

con

$$\sum_{i=1}^s i_i = t + s.$$

Si ha allora:

$$(8'.3) \quad \varphi(x_1, \dots, x_{r+1}) = \sum_{i=0}^r c_{i+1} \Gamma(x_1, \dots, x_{i+1}) = c_{r+1} \Gamma(x_1, \dots, x_{r+1}) + \varphi(x_1, \dots, x_r).$$

L'espressione precedente pone in evidenza come la conoscenza delle  $\Gamma$  date dall'espressione (9.3) sia atta a determinare l'equazione  $\varphi = 0$  delle  $V_{r-1}^n$ , e che questa è determinata anche in modo ricorrente dalla conoscenza della  $\varphi = 0$  relativa ad una variabile in meno e dalla  $\Gamma$  relativa a tutte le variabili.

4.  $\Omega$  CON UNA SOLA RADICE CARATTERISTICA ED  $h$  CATENE UGUALI. — Supponiamo che  $\Omega$  abbia  $h$  catene ciascuna impegnante  $\rho+1$  variabili [ $h(\rho+1) = r+1$ ] ed indichiamo con  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{(\rho+1)i_s}$  le variabili relative alla  $i^{ma}$  catena. Una qualsiasi variabile sarà allora indicata con  $x_{(i_1)_{i_s}}$  ove l'indice  $i_s$  può assumere i valori  $1, 2, \dots, (\rho+1)$  e l'indice  $i_1$  può assumere i valori  $1, 2, \dots, h$ .

Indichiamo poi con  $a_{i_1}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, \rho+1$ ) le costanti che concorrono nella  $i^{ma}$  catena delle equazioni di  $\Omega$ , ed analogamente alle (3.3) e (4.3) poniamo:

$$N_{(i_1)_{i_1}}^{(i_2)_{i_1}} = a_{(i_1)_{i_1}} a_{(i_1+1)_{i_1}} \dots a_{(i_2)_{i_1}}, \quad D_{(i_1)_{i_1}} = \frac{1}{a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{(i_1)_{i_1}}}$$

Indichiamo poi con  $B_{j_t}$  [ $j = 2, \dots, \rho+1$ ;  $t = 1, 2, \dots, h$ ]  $h\rho$  forme di grado  $n-1$  nelle variabili  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_h}$  soddisfacenti alle relazioni;

$$N_{i_1}^{j_t} \frac{\partial B_{j_t}}{\partial x_{i_1}} = N_{i_2}^{j_t} \frac{\partial B_{j_t}}{\partial x_{i_2}}$$

e per il resto del tutto arbitrarie, ed indichiamo con  $W_n$  una forma di grado  $n$  nelle stesse variabili.

Ciò posto si può dimostrare che si ha:

$$(1.4) \quad \varphi(x_{1_1}, \dots, x_{(q+1)_1}; \dots; x_{1_b}, \dots, x_{(q+1)_b}) = \\ = W_n + \sum_1^q \sum_{((i_1)_{1_1}, \dots, (i_s)_{1_s})} \delta_{(i_1)_{1_1}} \dots \delta_{(i_s)_{1_s}} D_{(i_1)_{1_1}} \dots \\ \dots D_{(i_{s-1})_{1_{s-1}}} N_{((i_s+1)_{1_s})}^{(i_1+\dots+i_{s-1}+1)_{1_s}} \frac{\partial^{s-1} B_{(i_1+\dots+i_{s-1}+1)_{1_s}}}{\partial x_{1_{1_1}} \dots \partial x_{1_{1_{s-1}}}} x_{(i_1)_{1_1}} \dots x_{(i_s)_{1_s}}$$

ove la seconda sommatoria va estesa a tutte le combinazioni con ripetizione  $((i_1)_{1_1}, \dots, (i_s)_{1_s})$  di classe  $s$  degli indici  $2_1, \dots, (\rho+1)_1, \dots, 2_b, \dots, (\rho+1)_b$  per cui  $\sum_1^s i_i \leq s + \rho$ .

Indicata con  $\Gamma_{j,b}(x_{1_1}, \dots, x_{(j+1)_1})$  la somma dei termini che dipendono dalla forma  $B_{(j+1)_1}[t=1, 2, \dots, b; j+1=\text{cost}]$  si ha:

$$(2.4) \quad \Gamma_{j,b} = \sum_1^j \sum_{((i_1)_{1_1}, \dots, (i_s)_{1_s})} \delta_{(i_1)_{1_1}} \dots \delta_{(i_s)_{1_s}} D_{(i_1)_{1_1}} \dots \\ \dots D_{(i_{s-1})_{1_{s-1}}} N_{((i_s+1)_{1_s})}^{(i_1+\dots+i_{s-1}+1)_{1_s}} \frac{\partial^{s-1} B_{(i_1+\dots+i_{s-1}+1)_{1_s}}}{\partial x_{1_{1_1}} \dots \partial x_{1_{1_{s-1}}}} x_{(i_1)_{1_1}} \dots x_{(i_s)_{1_s}}$$

ossia l'espressione della  $\Gamma_{j,b}$  è dello stesso tipo della (1.4) con la condizione che  $s$  vari da 1 a  $j$  e che la seconda sommatoria sia estesa alle combinazioni  $((i_1)_{1_1}, \dots, (i_s)_{1_s})$  per cui si abbia:  $\sum_1^s i_i = s + j$ . Ciò posto l'espressione della (1.4) si può scrivere:

$$(1'4) \quad \varphi = W_n + \sum_1^q \Gamma_{j,b}.$$

Questa espressione pone in evidenza un modo ricorrente per determinare la funzione  $\varphi$  nel caso di più catene uguali.

Per  $b=1$ , ossia nel caso di una sola catena, le formule precedenti (1.4) e (1'4) si riducono rispettivamente alle (8.3) e (8'3).

5.  $\Omega$  CON UNA SOLA RADICE CARATTERISTICA ED  $b$  CATENE NON TUTTE UGUALI. - Supponiamo che la prima catena impegni  $\rho^{(1)}+1$  variabili, la seconda ne impegni  $\rho^{(2)}+1, \dots$ , la  $\rho^{\text{ma}}$ ,  $\rho^{(b)}+1$ , con  $\rho^{(1)} \geq \rho^{(2)} \geq \dots \geq \rho^{(b)} \geq 0$  e le  $\rho^{(i)}$  non tutte uguali tra loro (altrimenti si ricade nel caso del numero precedente).

Indichiamo con  $x_{1_1}, x_{2_1}, \dots, x_{(\rho^{(1)}+1)_{1_1}}$  le variabili relative alla prima catena, con  $x_{1_2}, x_{2_2}, \dots, x_{(\rho^{(2)}+1)_{2_2}}$  quelle relative alla seconda catena, ecc.

A maggior chiarimento diamo dapprima il risultato su un esempio.

Supposto  $b=4$ ,  $\rho^{(1)}=5$ ,  $\rho^{(2)}=\rho^{(3)}=3$ ,  $\rho^{(4)}=2$  la funzione  $\varphi$  è determinata dalle funzioni  $\Gamma(x_{1_1}, \dots, x_{6_1})$ ,  $\Gamma(x_{1_2}, \dots, x_{5_2})$ ,  $\Gamma_{3,4}$  e  $\varphi(x_{1_1} \dots x_{3_4}; \dots; x_{1_4}, \dots, x_{3_4})$  le cui espressioni sono determinate rispettivamente dalle (9.3), (2.4) ed (1.4).



Supposto, in generale:

$$\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \dots = \rho^{(v_1)} > \rho^{(v_1+1)} = \dots = \rho^{(v_1+v_2)} > \rho^{(v_1+v_2+1)} \dots,$$

ossia che le catene si distribuiscano in gruppi di  $v_1, v_2, \dots, v_l$  uguali tra loro  $[v_1 + v_2 + \dots + v_l = b; 1 \leq v_i < b; 1 < l \leq b]$  si può allora dimostrare che per la funzione  $\varphi$  si ha:

$$\begin{aligned} & \varphi(x_{1_1}, \dots, x_{(q^1+1)_1}; \dots; x_{1_b}, \dots, x_{(q^{(b)}+1)_b}) = \\ & = \sum_{\tau=1}^{l-1} q^{\sigma_\tau} \sum_{j=1}^{q^{\sigma_\tau+1}} \Gamma_{j, \sigma_\tau} + \varphi(x_{1_1}, \dots, x_{(q^{(b)}+1)_1}; \dots; x_{1_b}, \dots, x_{(q^{(b)}+1)_b}) \end{aligned}$$

ove  $\sigma_\tau = v_1 + v_2 + \dots + v_\tau$ . Quindi la funzione  $\varphi$  si esprime mediante funzioni già note date dalle espressioni (9.3), (2.4) ed (1.4).

6.  $\Omega$  CON PIÙ RADICI CARATTERISTICHE. — Supponiamo che si abbiano  $\sigma$  radici caratteristiche, ed indichiamo con  $x_{1_\tau}, x_{2_\tau}, \dots, x_{q_\tau}$  le variabili impegnate dalla  $\tau$ ma radice caratteristica (alla quale potranno corrispondere una o più catene uguali o no).

Indicato con  $\Lambda_i \equiv \Lambda(x_{1_\tau}, \dots, x_{q_{(\tau)}})$  un sistema lineare di ipersuperficie di  $S_{q_\tau-1}$  aventi lo stesso sistema primo polare e tale che l'omografia dei poli  $\Omega_i$  coincida con l'omografia subordinata in  $S_{q_\tau-1}$  dalla  $\Omega$ , per un sistema  $\Lambda$  si può dimostrare che si ha:

$$\Lambda = \sum_{\tau=1}^{\sigma} \Lambda_i.$$

cosicchè in questo caso, che è il più generale, i sistemi  $\Lambda$  sono determinati dai sistemi particolari che si sono determinati nei numeri precedenti.

**Geometria.** — *Sulle forme che contengono una data varietà algebrica.* Nota di L. ROTH, presentata (\*) dal corrisp. B. SEGRE.

1. Data in  $S_r$  una varietà algebrica irriducibile  $V_d^m$  ( $d < r-1$ ), ci si può domandare se essa è contenuta in qualche forma  $V_{r-1}$  di un ordine  $n$  assegnato. Se  $n \geq m-r+d+1$  la questione ha sempre risposta affermativa, ottenendosi una  $V_{r-1}^n$  contenente  $V_d^m$  ad esempio coll'aggregare una forma d'ordine  $n-m+r-d-1$  al cono proiettante  $V_d^m$  dallo spazio che congiunge  $r-d-1$  suoi punti generici. Il problema ha quindi interesse soltanto in corrispondenza a valori bassi di  $n$ , pei quali le formule di postulazione, che del resto sono note — almeno in forma utilizzabile — soltanto per  $d \leq 3$ , rare volte possono servire. In questa Nota, mediante considerazioni di carattere proiettivo, vengono stabiliti alcuni criteri semplici, atti a fornire in vari casi l'esistenza di forme del tipo voluto.

(\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

Incominciamo col dimostrare il seguente teorema <sup>(1)</sup>:

*Se  $V_d$  è normale in  $S_r$ , e se la sua sezione iperpiana generica giace su d'una quadrica  $V_{r-2}^2$ , la  $V_d$  giace su d'una quadrica  $V_{r-1}^2$ .*

Siano  $C$  una sezione siffatta, e  $V_{r-2}^2$  la quadrica che la contiene. Le quadriche di  $S_r$  passanti per  $V_{r-2}^2$  formano un sistema lineare di dimensione

$$(I) \quad \binom{r+2}{2} - \binom{r+1}{2} = r+1,$$

e tagliano  $V_d$ , fuori di  $C$ , in varietà appartenenti al sistema completo  $|C|$  individuato da  $C$ . Siccome, per ipotesi, il sistema  $|C|$  è di dimensione  $r$ , risulta che  $V_d$  è contenuta in una  $V_{r-1}^2$ .

Una semplice modificazione del ragionamento precedente mostra, più generalmente, che *se  $C$  giace su  $\infty^t$  quadriche di  $S_{r-1}$ , allora  $V_d$  giace su  $\infty^t$  quadriche di  $S_r$ .*

Notiamo alcune tra le molteplici applicazioni di questo risultato.

(i) Ogni curva normale di  $S_4$ , di ordine  $m$  non superiore a nove, deve stare su almeno  $\infty^{9-m}$  quadriche.

(ii) Consideriamo una quartica razionale di  $S_4$ ; essa è normale e quindi, in base ad (i), giace su  $\infty^5$  quadriche di  $S_4$ . Ne consegue che la superficie di Veronese e la rigata quadrica, ognuna delle quali appartiene all' $S_5$ , stanno su  $\infty^5$  quadriche di  $S_5$ ; e che la  $V_3^4$ , luogo di  $\infty^1$  piani, situata in  $S_6$ , sta su  $\infty^5$  quadriche di  $S_6$ .

(iii) Risulta da una classica ricerca di Castelnuovo <sup>(2)</sup> che una curva di  $S_{r-1}$ , di dato ordine e di massimo genere, è necessariamente normale e giace su  $\binom{r-2}{2}$  quadriche linearmente indipendenti; quindi ogni superficie di  $S_r$  di cui questa curva sia sezione iperpiana è normale ed è contenuta nello stesso numero di quadriche del suo spazio; altrettanto si può dire d'una varietà  $V_3$  che abbia questa superficie come sezione iperpiana; e così via.

(iv) In una Memoria di Fano <sup>(3)</sup>, il suddetto risultato di Castelnuovo viene esteso alle curve di ordine e di genere abbastanza elevati. Tali curve giacciono quindi su  $\binom{r-2}{2}$  quadriche linearmente indipendenti di  $S_{r-1}$ ; e siccome esse pure sono normali, così ogni superficie che le ammetta per sezioni iperpiane deve stare su  $\binom{r-2}{2}$  quadriche linearmente indipendenti di  $S_r$ ; e così via.

2. Passando ora al caso  $n=3$ , supponiamo che la sezione generica  $C$  di  $V_d$  sia contenuta in una  $V_{r-2}^3$  di  $S_{r-1}$ , e che due distinte di queste ultime,

(1) Nel caso  $r=4$ ,  $d=2$ , esso già trovasi in un manoscritto inedito di COMESSATTI; l'estensione qui riportata è stata data dall'A. in una precedente Memoria [« Proc. London Math. Soc. » (2) 42 (1937), pp. 142-170].

(2) « Atti Acc. Torino », 24 (1889), p. 346.

(3) « Memorie Acc. Torino » (2) 44 (1894), p. 335.

per esempio  $V_{r-2}^{(1)}$  e  $V_{r-2}^{(2)}$ , seghino l' $S_{r-2}$  comune ai loro spazi lungo una medesima  $V_{r-3}^3$ . Allora le forme cubiche di  $S_r$  che contengono  $V_{r-2}^{(1)}$  e  $V_{r-2}^{(2)}$  costituiscono un sistema lineare di dimensione

$$(2) \quad \left[ \binom{r+3}{3} - 1 \right] - 2 \left[ \binom{r+2}{3} - 1 \right] + \left[ \binom{r+1}{3} - 1 \right] = r + 1.$$

Ragionando come nel n. 1, da qui si deduce che, se  $V_d$  è normale in  $S_r$ , esiste almeno una forma cubica di  $S_r$  passante per  $V_d$ .

Da questo risultato segue, in particolare, che una superficie normale di  $S_4$  la cui sezione iperpiana generica sia una curva di ordine superiore a 9 giacente su d'una superficie cubica, dev'essere contenuta in una forma cubica; perchè il piano comune a due iperpiani incontra la data superficie in un gruppo di punti che stanno su d'una curva del terz'ordine, ma certamente non su due di tali curve.

3. Mediante considerazioni del tutto analoghe a quelle dianzi esposte, si perviene ad estendere i risultati dei nn. 1, 2 poggiando sul lemma seguente:

*Siano  $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(n-1)}$   $n-1$  varietà  $V_{r-2}^n$  atte a formare altrettante sezioni iperpiane generiche d'una  $V_{r-1}^n$  di  $S_r$ , ove  $r \geq n-1$ ; allora il sistema lineare di tutte le forme  $V_{r-1}^n$  contenenti  $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(n-1)}$  ha la dimensione  $r+1$ .*

L'ipotesi fatta sulle  $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(n-1)}$  equivale più precisamente a supporre che ogni coppia di esse abbia in comune una  $V_{r-3}^n$  di  $S_{r-2}$ , ogni terna una  $V_{r-4}^n$  di  $S_{r-3}$ , e così via; infine, se  $r > n-1$ , tutte le varietà abbiano in comune una  $V_{r-n+1}^n$  di  $S_{r-n+1}$ , la quale invece mancherà per  $r = n-1$ . Siccome le forme  $V_{r-1}^n$  di  $S_r$  costituiscono un sistema lineare di dimensione  $\binom{n+r}{n} - 1$ , si vede che il sistema lineare di cui nel lemma ha la dimensione

$$(3) \quad N_r(n) \equiv \left[ \binom{n+r}{n} - 1 \right] - \binom{n-1}{1} \left[ \binom{n+r-1}{n} - 1 \right] + \\ + \binom{n-1}{2} \left[ \binom{n+r-2}{n} - 1 \right] \cdots \pm \left[ \binom{r+1}{n} - 1 \right].$$

Notiamo anzitutto che l'espressione  $-1 + \binom{n-1}{1} - \binom{n-1}{2} + \cdots \pm (-1)$  è identicamente nulla; in secondo luogo, posto  $(n+r)(n-1+r) \cdots (1+r) = f(r)$ , e adoperando la notazione del calcolo delle differenze finite, possiamo scrivere i termini rimanenti della (3) sotto la forma  $\Delta^{n-1} f(r)/n!$ . Essendo  $f(r)$  un polinomio di grado  $n$  in  $r$ ; la sua  $(n-1)$ -esima differenza sarà funzione lineare di  $r$ ; e poichè il secondo membro della (3) è evidentemente divisibile per  $r+1$ , avremo  $\Delta^{n-1} f(r) = A(r+1)$ , con  $A$  costante. Dal termine di grado massimo in  $r$  di  $f(r)$  si vede che  $A = n!$ ; e così il lemma è dimostrato.

Supponiamo ora che la  $V_d$  sia normale in  $S_r$ , e che la sua sezione iperpiana sia contenuta in una  $V_{r-2}^n$ , ove  $r \geq n-1$ : se possiamo fissare  $n-1$  sezioni tali che le relative varietà  $V_{r-2}^{(1)}, V_{r-2}^{(2)}, \dots, V_{r-2}^{(n-1)}$  abbiano il comportamento specificato nel lemma, da questo si deduce che  $V_d$  giace in almeno una  $V_{r-1}^n$ .

4. Nel caso  $r < n-1$ , che abbiamo escluso nel lemma, si può procedere come nel n. 3, salvo che ora alcuni fra i termini della (3) vengono a mancare; ciò nonostante, se le condizioni ammesse per  $V_d$  alla fine del n. 3 sono ancora soddisfatte, e se con ragionamento opportuno possiamo dimostrare che il sistema lineare delle forme  $|V_{r-1}^n|$  passanti per le  $n-1$  sezioni fissate ha dimensione  $\rho \geq r+1$ , anche la conclusione finale del n. 3 vale ancora in questo caso.

Nell'ipotesi che sia  $r < n-1$ , la dimensione  $\rho$  di  $|V_{r-1}^n|$  è precisamente data da

$$(4) \quad N_r(n) = \left[ \binom{n+r}{r} - 1 \right] - \binom{n-1}{1} \left[ \binom{n+r-1}{r-1} - 1 \right] + \\ + \binom{n-1}{2} \left[ \binom{n+r-2}{r-2} - 1 \right] - \dots + (-1)^{r-1} \binom{n-1}{r-1} \left[ \binom{n+1}{1} - 1 \right].$$

La funzione  $N_r(n)$  è un polinomio di grado  $r$  in  $n$ , in cui il coefficiente di  $n^r$  è

$$\frac{1}{r!} - \frac{1}{1!(r-1)!} + \dots + (-1)^{r-1} \frac{1}{(r-1)!1!} = \frac{(-1)^{r-1}}{r!}.$$

Inoltre, come abbiamo visto nel n. 3,  $N_r(n)$  assume il valore  $r+1$  per  $n = 2, 3, \dots, r+1$ .

Ne consegue che dev'essere

$$(5) \quad N_r(n) = r+1 + (-1)^{r-1} \binom{n-2}{r}.$$

La (5) mostra che, se  $r$  è un numero pari,  $N_r(n)$  è negativa per tutti i valori abbastanza elevati di  $n$ , sicchè, in questo caso, non si possono assegnare ad arbitrio  $n-1$  sezioni iperpiane della  $V_{r-1}^n$ , per un valore qualsiasi di  $n$ . Però se  $r$  è dispari ( $\geq 3$ ) ciò è sempre possibile, risultando  $\rho \geq r+1$ , onde ora il teorema può venire anche esteso al caso  $n > r+1$ . Così risulta che

*Se  $V_d$  è normale in  $S_r$ , e se le sue sezioni iperpiane giacciono su delle varietà  $V_{r-2}^n$  tali che  $n-1$  di queste possono essere sezioni iperpiane d'una  $V_{r-1}^n$ , allora, se  $r$  è dispari,  $V_d$  giace su d'una  $V_{r-1}^n$  per ogni valore di  $n$ ; mentre invece per  $r$  pari, possiamo soltanto asserire che  $V_d$  giace su d'una  $V_{r-1}^n$  se  $n \leq r+1$ .*

5. Il lemma del n. 3 può generalizzarsi fissando  $n-s$  sezioni iperpiane della  $V_{r-1}^n$ ; se  $r+s \geq n$ , la dimensione del sistema lineare delle forme  $V_{r-1}^n$  passanti per esse è data da:



$$(6) \quad N'_r(n) = \left[ \binom{n+r}{n} - 1 \right] - \binom{n-s}{1} \left[ \binom{n+r-1}{n} - 1 \right] + \\ + \binom{n-s}{2} \left[ \binom{n+r-2}{n} - 1 \right] - \dots \pm \left[ \binom{r+s}{n} - 1 \right].$$

Come al n. 3 si vede che  $N'_r(n) = \binom{r+s}{s}$ ; quindi

Se le forme di ordine  $s$  segano su  $V_d$  un sistema lineare completo, e se le sezioni iperpiane di  $V_d$  giacciono su delle  $V_{r-2}^n$  tali che  $n-s$  di queste (ove  $n \leq r+s$ ) siano atte a costituire delle sezioni iperpiane d'una  $V_{r-1}^n$ , allora  $V_d$  giace su d'una  $V_{r-1}^n$ .

**Geometria.** — *Su alcuni sistemi triplamente infiniti di curve su una superficie.* Nota di A. TERRACINI, presentata (\*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

Su una superficie  $S$  di uno spazio qualunque dirò che un sistema  $\infty^3 \Gamma$  di curve possiede la *proprietà proiettiva* quando, fissati due punti  $A, B$  della superficie, i fasci delle rette tangenti in  $A, B$  alle  $\infty^1$  curve del sistema che passano per essi risultano costantemente tra loro proiettivi. Tale proprietà, evidentemente invariante per trasformazioni puntuali, sarà considerata nel campo analitico, e per di più « in piccolo », sia in quanto concerne la mutua posizione dei punti  $A, B$ , sia il sistema  $\infty^1$  delle curve di  $\Gamma$  che passano per essi. Se lo spazio ambiente è  $S_3$ , si hanno esempi sia, come è ovvio, nel sistema  $\infty^3$  delle sezioni piane della  $S$ , sia in quello delle  $\infty^3$  linee di contatto della  $S$  (supposta non sviluppabile) con i coni circoscritti: invero le tangenti in  $A, B$  a una di tali linee corrispondono, nelle involuzioni di tangenti coniugate di centri  $A, B$ , alle tangenti che uniscono gli stessi  $A, B$  con un punto variabile della retta intersezione dei piani tangenti alla  $S$  in quei due punti.

In realtà, vogliamo occuparci della possibilità che la proprietà proiettiva sussista *in senso approssimato*, in vari ordini di approssimazione, in una accezione concettualmente analoga a quella in cui, per esempio, ho studiato vari anni or sono i sistemi  $\infty^1$  di piani dello  $S_3$  tali che un piano sia « incidente al consecutivo in un punto » in vari ordini di approssimazione (1). Ritengo che questo ordine di idee può essere fecondo nello studio dei sistemi di curve; per il caso di  $\infty^3$  curve di un piano già indicai alcuni risultati (2);

(\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) A. TERRACINI, *Sull'incidenza di spazi infinitamente vicini*, in *Scritti mat. offerti a L. Berzolari*, Pavia, 1936.

(2) A. TERRACINI, A) *Sobre las ecuaciones diferenciales de tipo (G) y de tipo (F)*, « Rev. de Mat. y de Fís. teor. de la Univ. Nac. de Tucumán », vol. VI, 1947 (in corso di stampa). V. anche A. TERRACINI, B) *Caracterizaciones geométricas de la ecuación (G) subordinada a una ecuación diferencial de tipo (F)*, ibid. (in corso di stampa).

di altri casi si sta occupando la signora M. Romaña, studentessa dell'università di Tucumán.

Adottiamo sulla  $S$  coordinate curvilinee  $u, v$ , e supponiamo il sistema  $\Gamma$  definito da un'equazione differenziale del terz'ordine (analitica)  $v''' = \varphi(u, v, v', v'')$  nella funzione incognita  $v(u)$ . Sia  $A \equiv (u_0, v_0)$ ,  $B \equiv (u, v)$ : la proprietà proiettiva si può tradurre nella condizione che - per una curva integrale variabile passante per  $A, B$  - posto  $t = (dv/du)_0$ ,  $\theta = dv/du$ , e considerando  $\theta$  come funzione di  $t$ , la  $\theta(t)$  soddisfi all'equazione differenziale

$$(I) \quad 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^3\theta}{dt^3} - 3 \left( \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)^2 = 0.$$

Se lungo una curva del sistema  $\Gamma$  consideriamo  $v = f(u_0, v_0, t, v''_0, u)$  come funzione non solo di  $u$ , ma anche dei valori iniziali  $u_0, v_0, t, v''_0$ , (cosicchè fungono da variabili indipendenti  $u_0, v_0, t, v''_0, u$ , anzichè  $u_0, v_0, t, u, v$ , come precedentemente) e poniamo  $f_3 = \partial f / \partial t$ ,  $f_4 = \partial f / \partial v''_0$ ,  $f_5 = \partial f / \partial u$ , ecc., la (I) moltiplicata per  $f_4^6$  diventa

$$(E) \quad 2J[f_5] \{ f_4^2 \mathfrak{N}[f_5] - 3f_4 J[f_{45}] \mathfrak{L}[f_4] + 3f_{45} J[f_4] \mathfrak{L}[f] - f_4 \mathfrak{N}[f] \} - \\ - 3(f_4 \mathfrak{L}[f_5] - f_{45} \mathfrak{L}[f])^2 = 0,$$

dove, per una funzione  $\Phi = \Phi(u_0, v_0, t, v''_0, u)$  abbiamo posto

$$J[f] = f_4 \Phi_3 - f_3 \Phi_4, \\ \mathfrak{L}[f] = f_4^2 \Phi_{33} - 2f_4 f_3 \Phi_{34} + f_3^2 \Phi_{44}, \\ \mathfrak{N}[f] = f_4^3 \Phi_{333} - 3f_4^2 f_3 \Phi_{334} + 3f_4 f_3^2 \Phi_{344} - f_3^3 \Phi_{444}.$$

Ci riferiamo precisamente alla (E) come espressione della proprietà proiettiva. Orbene, se non si particolarizza il sistema  $\Gamma$ , il primo membro della (E), sviluppato in serie di potenze di  $h = u - u_0$ , incomincia in generale con un termine in  $h^{11}$ ; perciò diciamo che il sistema  $\Gamma$  gode della proprietà proiettiva in prima approssimazione almeno quando manca detto termine. In tal caso, manca necessariamente anche il termine in  $h^{12}$ , cosicchè diciamo che la proprietà proiettiva sussiste in seconda approssimazione almeno quando manca anche il termine in  $h^{13}$ .

È essenziale notare che le locuzioni così introdotte sono lecite perchè le circostanze in base alle quali le abbiamo definite sono indipendenti dalla scelta delle coordinate curvilinee. Se invero si assumono nuove coordinate curvilinee  $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$ ,  $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ , cosicchè  $\bar{h} = \bar{u} - \bar{u}_0$  è un infinitesimo del prim'ordine rispetto ad  $h$ , si ha, chiamando  $\Omega$  il primo membro della (E) e ponendo  $\bar{u}_u = \partial \bar{u} / \partial u$ , ecc.:

$$\bar{\Omega} = \frac{\bar{f}_4^6}{f_4^6} \left[ \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right]^2 \left[ \left( \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right)_0 \right]^{-4} \frac{[(\bar{u}_u)_0 + t(\bar{u}_v)_0]^8}{[\bar{u}_u + \theta \bar{u}_v]^4} \Omega,$$

cosicchè gli ordini di infinitesimo di  $\bar{\Omega}$  rispetto ad  $\bar{h}$  e di  $\Omega$  rispetto ad  $h$  coincidono fra loro.

Perciò, inoltre, la proprietà che un sistema  $\infty^3$  di curve di una superficie  $S$  possieda la proprietà proiettiva in un certo ordine di approssimazione è invariante per trasformazioni puntuali (ciò che già era presumibile a priori in base all'invarianza della proprietà proiettiva in senso finito).

Dal punto di vista analitico, possiamo applicare sulla superficie  $S$  i risultati che ho dimostrati in loc. cit. <sup>(2)</sup> A) nel caso del piano, e concludere che su una superficie  $S$  i sistemi  $\infty^3$  di curve che possiedono la proprietà proiettiva in prima approssimazione almeno sono i sistemi (F) <sup>(3)</sup>, cioè sistemi delle curve integrali di un'equazione del tipo

$$(F) \quad v''' = F(u, v, v') + G(u, v, v') v'' + H(u, v, v') v'^2;$$

laddove la proprietà sussiste in seconda approssimazione almeno quando e solo quando

$$(2) \quad H = 3 \frac{b(u, v) + c(u, v) v'}{a(u, v) + 2b(u, v) v' + c(u, v) v'^2};$$

$$(3) \quad G = \frac{P(u, v) + 3Q(u, v) v' + 3R(u, v) v'^2 + W(u, v) v'^3}{a(u, v) + 2b(u, v) v' + c(u, v) v'^2},$$

dove  $a(u, v), \dots, W(u, v)$  sono funzioni arbitrarie assoggettate unicamente alle condizioni

$$(4) \quad \begin{cases} cP - 2bQ + aR + (ac_u) - 2(ab_v) = 0, \\ cQ - 2bR + aW + 2(bc_u) - (ac_v) = 0. \end{cases}$$

(Per esempio, le linee proiettive di una superficie di  $S_3$ , introdotte da Beniamino Segre soddisfano a queste condizioni, essendo rappresentate, in parametri asintotici, da un'equazione (F) con  $G = 0, H = 3/2v'$ ).

Nei miei lavori loc. cit. <sup>(2)</sup> ho data un'interpretazione geometrico-proiettiva delle condizioni (2)-(4) nel caso del piano, chiamando (FF) i sistemi di curve piane che ad esse soddisfano. Perciò, su una superficie qualunque, i sistemi  $\infty^3$  di linee che possiedono la proprietà proiettiva in seconda approssimazione almeno restano così caratterizzati geometricamente, sia pure in modo indiretto, come sistemi di curve che si proiettano su un piano secondo sistemi (FF).

(3) Alcuni risultati da me ottenuti precedentemente sui sistemi (F) si trovano riassunti nella mia Nota: *Sulla geometria delle equazioni differenziali*, in corso di stampa negli « Annali di Matematica ».

**Meccanica (Aerodinamica).** — *Anemometro a testa sferica*<sup>(\*)</sup>.  
 Nota di C. MORTARINO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PANETTI.

1. **PREMESSA.** — Nel corso dello studio e dell'approntamento di un'attrezzatura per ricerche sperimentali su schiere di palettaggi, si è rivelata l'opportunità di un apparecchio adatto per la rapida esplorazione del campo di velocità; è stato perciò costruito un anemometro a testa sferica che permette di determinare la direzione e la grandezza della velocità e la pressione statica di un vento comunque diretto, entro un ampio cono semprechè la corrente sia rettilinea e uniforme in relazione alle dimensioni della sfera.

L'apparecchio già noto dal 1929<sup>(1)</sup> è applicato dalla Sulzer per misure di carattere industriale entro condotte di acqua<sup>(2)</sup>.

L'apparecchio sviluppato, su mio schema, nei dettagli di disegno dal sig. Enrico Bordoni del Laboratorio è stato costruito dall'Officina Meccanica del Politecnico.

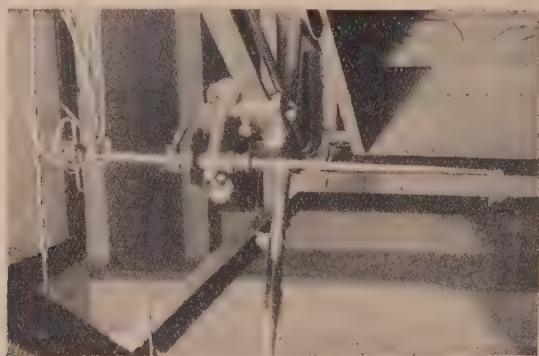


Fig. 1.

Ho eseguito la messa a punto dell'attrezzatura sperimentale di taratura e la determinazione del tempo di messa a regime, in collaborazione con l'ing. Flavio Olivero; ho sviluppato la taratura con l'ing. Mario Guida che ha con molta precisione elaborato una notevole parte degli esperimenti.

Qui riferisco sulle caratteristiche d'impiego di tale tipo di anemometro e particolarmente sulla sensibilità e la precisione.

2. **DESCRIZIONE.** — L'apparecchio è fotografato in fig. 1 e schematizzato in fig. 3. Una testina sferica di ottone di mm. 12,7 di diametro è portata

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio Aeronautico Politecnico di Torino.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) VAN DER HEGGE ZIJNEN, « Proceedings of the Royal Akademie Amsterdam », vol. XXXII, n. 5, 1929.

(2) *Mesure du débit d'une installation de pompe à l'aide d'une sonde spherique.* « Revue Sulzer », n. 2, 1935.



da un'asta graduata che può traslare con movimento micrometrico lungo il proprio asse e ruotare intorno ad esso; la posizione angolare  $\psi$  viene misurata su un cerchio graduato munito di nonio al  $1/10^0$ . La sfera porta 5 fori radiali di mm. 0,5; il 2 è perpendicolare all'asse nel piano equatoriale: 1 e 3 stanno su un cerchio meridiano a  $50^0$  rispetto a 2; 4 e 5 su un parallelo a  $45^0$  rispetto a 2.

Il nostro Laboratorio già possedeva un telaio con guide graduate fra loro perpendicolari munite di nonio e di volantini di manovra.

L'anemometro, che è a sua volta dotato di tre movimenti di rotazione e del movimento di traslazione lungo il proprio asse, permette, montato sul telaio anzidetto di raggiungere un qualsiasi punto di un volume di circa  $0,80 \times 1,00 \times 0,60$  e con orientamento variabile entro ampi limiti.

3. CONTROLLI GEOMETRICI. — Interessa che i punti 4 e 5 si trovino su un parallelo e che la superficie della pallina sia di rotazione anche se non perfettamente sferica. Se questa condizione è esattamente realizzata variando l'angolo  $\delta$  rispetto al vento per  $p_4 = p_5$ ,  $\psi$  rimane rigorosamente costante; si sono misurate, nell'intervallo di taratura variazioni massime  $\Delta\psi = \pm 0,2$ . Altri controlli geometrici non hanno particolare interesse perchè non danno luogo ad alcun inconveniente nell'uso dell'apparecchio.

4. TEMPO DI MESSA A REGIME. — Le prese di pressione sono collegate ai manometri da tubetti capillari di diametro mm. 0,5 e lunghi circa cm. 60; è perciò notevole il tempo di messa a regime e particolare attenzione deve essere posta al riguardo per ottenere dall'apparecchio la precisione di cui è capace.

Nell'uso, il tempo di messa a regime dipende dalla precedente condizione di equilibrio del manometro e dalla successione di manovre eseguite per determinare l'angolo  $\psi$ .

In sede di taratura si è considerato un caso più semplice; individuato nel 4 il manometro più lento è stata applicata rapidamente una differenza di pressione tra 4 e 5 variando l'angolo  $\psi$  rispetto alla posizione di equilibrio e si sono registrati il tempo e la lettura al manometro. Il risultato di tre prove per  $p_\infty = 0,7; 5,13; 10; 15 \text{ Kg/m}^2$  permette di esprimere, con ottima approssimazione, la curva di azzeramento con la

$$(1) \quad p_t = p_\infty (1 - e^{-Kt}) \quad (K = 0,00813; t \text{ sec})$$

avendo indicato con  $p_t$  e  $p_\infty$  le letture al tempo  $t$  e per  $t = \infty$  (fig. 2).

L'effetto dell'inerzia della colonna liquida è appena sensibile all'inizio del moto. Nell'uso si potrebbe attendere l'azzeramento per ogni posizione  $\psi$  di tentativo; con un po' di pratica si giunge molto più rapidamente ad azzerare manovrando durante il movimento del liquido manometrico e attendendo la messa a regime quando l'azzeramento è già quasi perfettamente ottenuto.

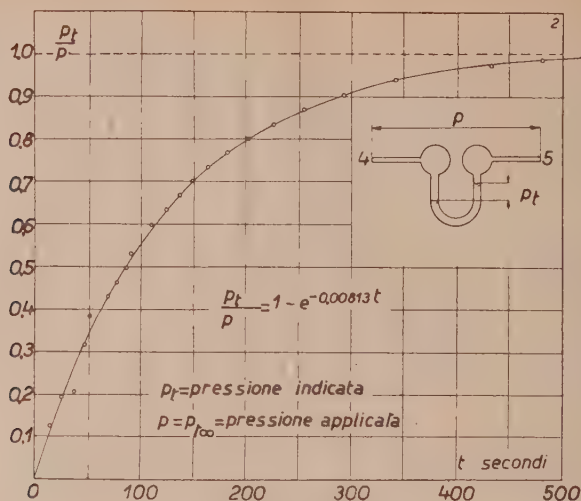


Fig. 2.

5. MODALITÀ D'USO. — Le prese di pressione vengono collegate a tubi manometrici aperti all'altra estremità verso l'ambiente oppure collegati fra loro in modo da ottenere la maggiore precisione con la lettura diretta delle differenze che interessano.

Posta la sfera con il suo centro nel punto da esplorare, viene ruotata fino a che:

$$(2) \quad p_4 = p_5$$

Sul cerchio graduato si legge l'angolo  $\psi$ .

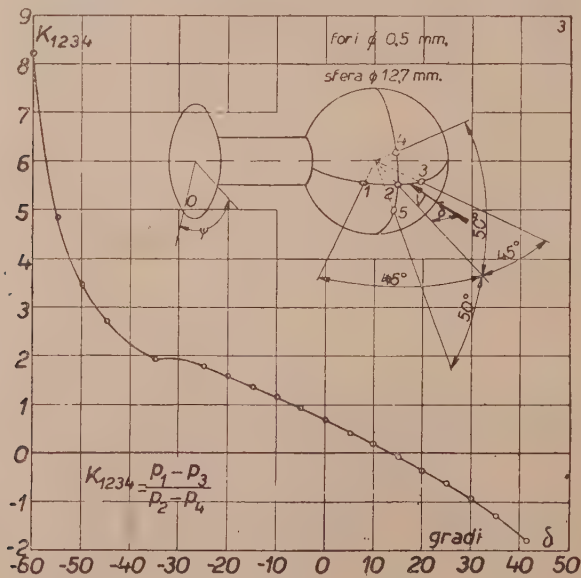


Fig. 3.

L'angolo  $\delta$  risulta dal calcolo del coefficiente:

$$(3) \quad K_{1234} = \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_4}$$

e dal grafico di taratura di fig. 3.

Dal grafico di fig. 4 risulta, in funzione di  $\delta$ , il coefficiente  $K_{24}$  mediante il quale si calcola la velocità:

$$(4) \quad V = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_4)}{K_{24} \rho}}$$

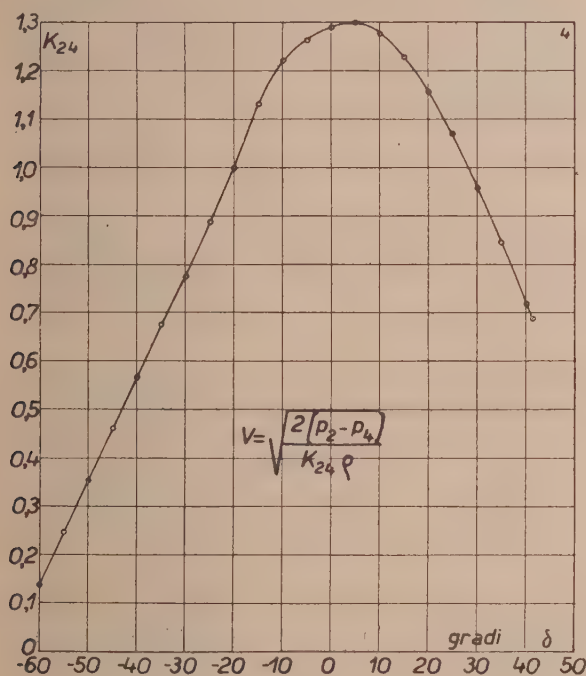


Fig. 4.

Dai grafici di fig. 5 risultano i coefficienti  $K_1$ ;  $K_2$ ;  $K_3$ ;  $K_4$  uno qualsiasi dei quali, però con diversa precisione, permette il calcolo della pressione  $p_s$  mediante la

$$(5) \quad p_s = p_n - K_n \frac{1}{2} \rho V^2 = p_n - \frac{K_n}{K_{24}} (p_2 - p_4).$$

È opportuno notare che la condizione (2) si ottiene per 4 orientamenti della sferetta rispetto al vento; ogni ambiguità cade se si considera che la sferetta è correttamente orientata se la  $p_2$  è molto maggiore di  $p_4$ .

In relazione al forte smorzamento interno l'apparecchio misura la media delle pressioni delle correnti pulsanti ed è inadatto alla misura in correnti non permanenti. La taratura è eseguita in corrente rettilinea uniforme e

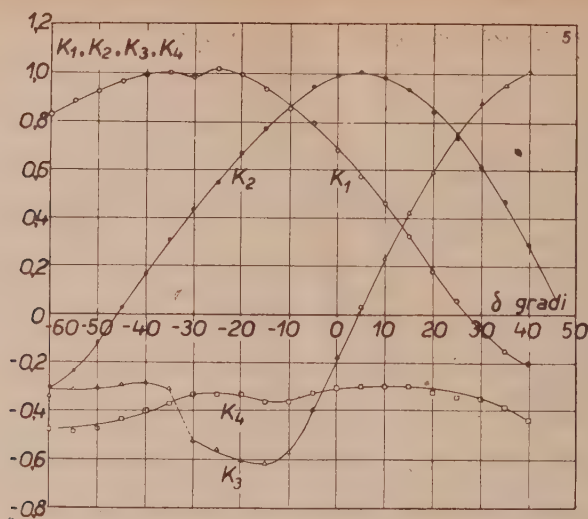


Fig. 5.

quindi cade sempre più in difetto quanto più la corrente è curva. Le prove di controllo dell'influenza della velocità, riferite al punto (6), assicurano che i coefficienti non dipendono da essa entro i limiti indicati.

6. TARATURA E CONTROLLO DELL'INFLUENZA DELLA VELOCITÀ. — È stata eseguita nella galleria aperta da cm. 60. La sfera è stata posta nella corrente sull'asse della galleria e variato l'angolo  $\delta$  e registrate le letture ai manometri. Le prove sono state eseguite alla velocità di circa 36 m/s; la precisione di misura delle pressioni è stata di 1 Kg/m<sup>2</sup> per le misure di  $p_1$ ;  $p_2$ ;  $p_3$ ;  $p_4$  rispetto alla pressione ambiente e di  $p_1 - p_3$ ;  $p_2 - p_4$  e di 0,25 Kg/m<sup>2</sup> per  $p_4 - p_5$ .

In una successiva esperienza un Pitot posto nei medesimi punti occupati dal centro della sfera ha servito alla misura della pressione statica e della velocità della corrente. Un Pitot a monte servì a mettere in correlazione fra loro le due serie di esperimenti.

La effettiva direzione della corrente è stata individuata mediante lo stesso anemometro a testa sferica disponendo l'asta dell'anemometro in due posizioni perpendicolari fra loro e all'asse geometrico della galleria.

Il Pitot non serve ad individuare la direzione avendo una sensibilità dell'ordine di 1/20 di quella dell'anemometro in taratura.

L'influenza della velocità è stata controllata per  $\delta = 35^\circ$ ;  $20^\circ$ ;  $-30^\circ$ ;  $-37^\circ$  e per  $24 \leq V \leq 65$  m/s. Le pressioni, entro i limiti della precisione di taratura, sono proporzionali alla pressione dinamica e quindi i coefficienti sono costanti.

Gli esperimenti, citati nel rif. 1, per  $6 \leq V \leq 30$  m/s. assicurano anche in questo intervallo la costanza dei coefficienti.

Altre prove complementari sono state fatte per ottenere gli elementi per il calcolo del limite di sensibilità.



7. **RISULTATI.** — Sono raccolti nei grafici delle figg. 3, 4, 5. Nell'intervallo  $-35 \leq \delta \leq -30^\circ$  esiste una discontinuità nell'andamento della  $p_3$ , che si riflette sui coefficienti  $K_{1234}$  e  $K_3$ .

Nell'intervallo di discontinuità la  $p_3$  varia linearmente.

Nell'intervallo  $6 \leq V \leq 64$  m/s i coefficienti sono costanti.

8. **LIMITE DI SENSIBILITÀ E PRECISIONE.** — Durante la taratura la cura particolare nell'uso degli strumenti, la ripetizione delle misure e l'interpolazione riducono l'effetto degli errori accidentali, gli errori residui rimangono come errori sistematici.

Nell'uso dello strumento sono presenti le seguenti cause di errori accidentali:

a) insufficienza del tempo concesso ai manometri per raggiungere il regime;

b) errore nella lettura ai manometri;

c) errore di lettura sui grafici.

Gli errori a) e c) possono essere facilmente resi di un ordine di grandezza inferiore a quello di b); a), concedendo un tempo sufficiente che gli esperimenti di messa a regime permettono di prevedere; c) scegliendo una scala adatta per i grafici.

Discuto perciò l'errore b). Le grandezze misure sono  $p_1 - p_3$ ;  $p_2 - p_4$  che indico per brevità con  $p_{13}$  e  $p_{24}$  e rispetto all'ambiente le  $p_1$ ;  $p_2$ ;  $p_3$ ;  $p_4$ .

Gli errori sono espressi dalle seguenti formule valevoli in tutto il campo di taratura, escluso l'intervallo  $-35^\circ \leq \delta \leq 30^\circ$ ;

$$(6) \quad \Delta K_{1234} = \frac{1}{p_{24}} \left[ \left( \frac{dp_{13}}{dp_{45}} - K_{1234} \frac{dp_{24}}{dp_{45}} \right) \Delta p_{45} + \Delta p_{13} - K_{1234} \Delta p_{24} \right]$$

e poichè:  $\frac{dp_{13}}{dp_{45}} \approx 0$

$$(6') \quad \Delta K_{1234} = \frac{1}{p_{24}} \left[ \Delta p_{13} - K_{1234} \Delta p_{24} - K_{1234} \frac{dp_{24}}{dp_{45}} \Delta p_{45} \right]$$

$$(7) \quad \Delta \delta = \frac{\Delta K_{1234}}{dK_{1234}/d\delta}$$

$$(8) \quad \Delta \psi = \frac{\Delta p_{45}}{dp_{45}/d\psi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

$$(9) \quad \Delta \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) = \frac{\Delta p_{24}}{K_{24}} - \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{\Delta K_{24}}{K_{24}}$$

e poichè:  $\Delta K_{24} = \Delta \delta \frac{dK_{24}}{d\delta}$  risulta:

$$(9') \quad \Delta \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) = -A' \Delta p_{13} + B' \Delta p_{24} + C' \Delta p_{45}$$

in cui è posto:

$$\begin{aligned}
 A' &= \frac{A}{K_{24}} & A &= \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dK_{24}/d\delta}{p_{24} dK_{1234}/d\delta} \\
 B' &= \frac{1}{K_{24}} (1 + AK_{1234}) & C' &= \frac{AK_{1234}}{K_{24}} \frac{dp_{24}}{dp_{45}} \\
 (10) \quad \Delta p_s &= \Delta p_n - K_n \Delta \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) - \frac{1}{2} \rho V^2 \Delta K_n
 \end{aligned}$$

che espressa in funzione delle grandezze direttamente misurate, dà:

$$(10') \quad \Delta p_s = \Delta p_n + A'' \Delta p_{13} + B'' \Delta p_{24} + C'' \Delta p_{45}$$

in cui:

$$\begin{aligned}
 A'' &= K_n A' - \frac{D'_n}{p_{24}} & \frac{D'_n}{p_{24}} &= \frac{1}{K_{24}} \frac{dK_n/d\delta}{dK_{1234}/d\delta} \\
 B'' &= K_{1234} \frac{D'_n}{p_{24}} - K_n B' & C'' &= K_{1234} \frac{dp_{24}}{dp_{45}} \frac{D'_n}{p_{24}} - K_n C'
 \end{aligned}$$

Se si considerano com'è logico, i limiti di sensibilità di misura in relazione all'intervallo di graduazione delle scale manometriche dato che i livelli sono

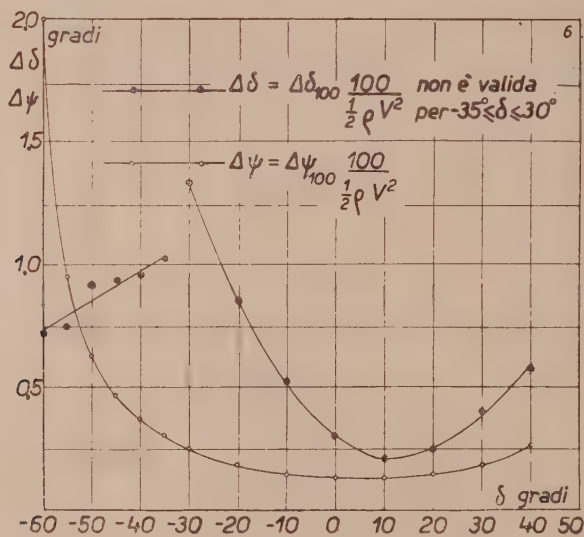


Fig. 6.

stabili e quindi facilmente leggibili,  $\Delta \delta$  e  $\Delta \psi$  sono inversamente proporzionali a  $\frac{1}{2} \rho V^2$  mentre  $\Delta p_s$  e  $\Delta \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right)$  ne sono indipendenti.

Nell'intervallo  $-35^\circ \leq \delta \leq -30^\circ$  gli errori sono molto rilevanti, dato che  $K_{1234} - \delta$  è quasi orizzontale, e obbligano ad escluderlo dal campo di misura.

I grafici delle figure 6 e 7, rappresentano i risultati del calcolo degli errori massimi assoluti conseguenti ad errori di  $\pm 1 \text{ Kg/m}^2$  nella misura delle pressioni.

L'esame di tali grafici permette di prestabilire le modalità più opportune per l'uso dell'apparecchio.

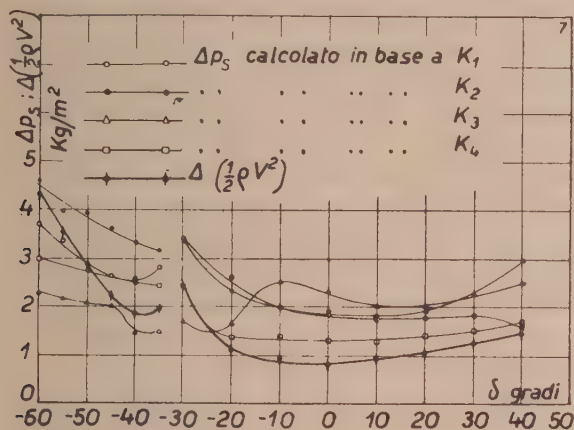


Fig. 7.

Il tempo di messa a regime, calcolato per  $\frac{1}{2} \rho V^2 = 100 \text{ Kg/m}^2$  nell'ipotesi che i manometri vadano a regime a partire dalla pressione ambiente e che la sfera sia già dall'inizio correttamente orientata rispetto al vento, risulta, per un errore residuo di  $0,1 \text{ Kg/m}^2$ , di circa  $15'$ , costante in tutto il campo di misura.

In una serie di rilievi il tempo per ogni misura successiva alla prima risulta, per  $\frac{1}{2} \rho V^2 = 100 \text{ Kg/m}^2$ , dell'ordine di  $5'$ .

**Astronomia (Nautica).** — *Principi di un nuovo metodo per la determinazione immediata del punto nave astronomico* (\*). Nota di M. BINI, presentata (\*\*) dal Corrisp. M. TENANI.

1. Come è noto, la posizione geografica di un osservatore viene comunemente determinata, con i metodi della navigazione astronomica, per intersezione di particolari luoghi di posizione, i «cerchi di altezza». A questi cerchi si sostituiscono, all'atto pratico, le tangenti («rette di altezza»), avendo cura che lo scostamento fra esse ed i cerchi sia compreso entro limiti sufficientemente piccoli.

Il tracciamento delle rette di altezza viene eseguito rispetto al punto stimato relativo all'istante di osservazione, e gli elementi necessari e suffi-

(\*) Lavoro eseguito all'Accademia Navale di Livorno.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

cienti per individuare ciascuna retta sono l'azimut dell'astro osservato e la differenza fra l'altezza effettivamente misurata dall'osservatore e quella che nello stesso istante l'astro aveva sull'orizzonte del punto stimato (altezza ed azimut stimati).

L'altezza e l'azimut stimati sono un angolo ed il complemento di un lato di un triangolo sferico, il triangolo di posizione, e si possono ottenere risolvendo questo triangolo di cui sono noti due lati e l'angolo compreso, rispettivamente uguali ai complementi della latitudine stimata, della declinazione dell'astro osservato, ed alla differenza fra l'ora siderea locale e l'ascensione retta dell'astro (ascensione retta e declinazione si ricavano dalle Effemeridi).

La determinazione del punto nave consta quindi di due operazioni separate: osservazione e calcolo, che a sua volta, come si è già veduto, si compone di tre parti: *a*) ricerca degli elementi noti del triangolo di posizione (ora siderea e coordinate degli astri), *b*) risoluzione del triangolo di posizione per ottenere l'altezza e l'azimut stimati, *c*) tracciamento delle rette di altezza sulla carta nautica e scelta del punto da esse individuato.

Per venire incontro alle crescenti esigenze di rapidità che la moderna navigazione impone al navigante, sono stati escogitati numerosi espedienti intesi a rendere più facili e spediti i calcoli, ed attraverso continue miglioni e modifiche si è oggi giunti a disporre di Effemeridi che permettono di ricavare il più rapidamente possibile i dati di partenza, e di tavole che offrono direttamente gli elementi incogniti del triangolo (HO 214, americane): in tal modo il problema della determinazione del punto nave, così impostato, è giunto alla sua più soddisfacente soluzione.

2. Il metodo che ci accingiamo a descrivere rappresenta un ulteriore passo in avanti sulla via della semplicità e della rapidità: questo si ottiene semplificando non già la particolare soluzione cui abbiamo accennato (il che d'altra parte non sarebbe neppure possibile o almeno pratico), bensì ponendo su basi del tutto diverse l'impostazione stessa del problema. Il concetto su cui il nuovo metodo si basa è il seguente.

Ogni volta che l'ora siderea  $t_s$  assume un determinato valore, la sfera celeste riprende esattamente la stessa posizione rispetto ad un qualsiasi osservatore: se le stelle fisse fossero rigidamente « fissate » alla sfera celeste, se cioè avessero coordinate costanti, è evidente che ad una determinata ora siderea  $t_s$  ogni osservatore vedrebbe tutte le stelle riprendere indefinitamente lo stesso azimut e la stessa altezza.

Se quindi l'ipotesi della costanza delle coordinate fosse vera, si avrebbe il grande vantaggio che - assegnata la latitudine  $\phi$  - gli elementi necessari per il tracciamento delle rette di altezza sarebbero funzione della sola ora siderea locale e quindi sarebbe possibile la costruzione di tavole perpetue nelle quali sarebbe sufficiente entrare col  $t_s$  per avere direttamente, di grado in grado di latitudine del punto stimato, gli azimut e le altezze in un certo numero di colonne intitolate ciascuna al nome di uno degli astri utilizzabili per l'osservazione.



Si verrebbe in tal modo ad abolire la prima fase del calcolo (ricerca ed elaborazione dei dati delle Effemeridi) che risulterebbe implicita nell'unica consultazione da compiersi: e per tale ragione le tavole costruite su tale principio meriterebbero il nome di « immediate ».

Purtroppo nessuna stella presenta la caratteristica di essere assolutamente fissa nel senso sovra esposto, in quanto in realtà tutti i corpi celesti hanno coordinate che più o meno lentamente variano al trascorrere del tempo. Il metodo sovra esposto può però modificarsi in modo da permettere l'uso di tavole immediate sufficientemente precise per gli usi pratici, nel modo che adesso esporremo.

3. Le cause che producono variazioni sensibili nelle coordinate degli astri sono le seguenti: *a)* moto di precessione degli equinozi, *b)* mutazione dell'asse terrestre, *c)* aberrazione della luce, *d)* moti propri degli astri.

I moti *b)*, *c)*, si possono trascurare senz'altro data la piccolezza della variazione che essi producono; inoltre, fissando per esempio di voler fare delle tavole valide per 50 anni (che verrebbero evidentemente calcolate con le coordinate relative all'anno intermedio) anche i moti propri, per le stelle che il navigante effettivamente impiega per le sue determinazioni, si mantengono tutti <sup>(1)</sup> al di sotto dei 30".

Anche nel caso che tutte le suddette quantità trascurate siano contemporaneamente massime e dello stesso segno, l'errore che possono dare raggiunge al massimo 59", ed è quindi dello stesso ordine di grandezza dell'errore accidentale dal quale sono affette le altezze misurate da bordo in buone condizioni, che è di circa 1' con sestante marino e almeno 3 o 4 volte più grande con sestante ad orizzonte artificiale.

Rimane quindi da tener conto del solo moto di precessione degli equinozi, che non può assolutamente essere trascurato in quanto le variazioni che esso produce si sommano di anno in anno.

È necessario riflettere a tale riguardo che, per effetto di questo moto, una generica stella *A* (fig. 1) si muove sul suo parallelo eclittico incrementando la longitudine celeste  $\lambda$  di 50",25 all'anno, mentre resta inalterata la sua latitudine celeste  $\beta$ . Lo spostamento è quindi angularmente uguale a 50",25 all'anno intorno all'asse dell'eclittica, e, in unità di cerchio massimo, risulta di  $50'',25 \cos \beta$ . Un punto qualsiasi di un cerchio di altezza relativo ad *A*, come *P*, *P'*, *P''*, ecc., si sposta quindi sulla sfera celeste di  $50'',25 \cos \beta_{P, P', P'', \dots}$  all'anno.

Fissata una data ed un determinato valore dell'ora siderea locale  $t_s$ , se *Z* (fig. 2) è la posizione sulla sfera celeste dello zenit di un punto fisso sulla terra, ed *A* un astro qualsiasi, al trascorrere degli anni l'osservatore in *Z* misurerà, di questo astro, delle altezze  $h_A, h'_A, h''_A$  (delle quali in figura compaiono i complementi) che, per effetto del moto di precessione che fa

(1) Ad eccezione di Sirio ( $1'$ ) ed  $\alpha$  Centauri ( $1',5$ ) per le quali si dà una piccola correzione, necessaria solo agli estremi del periodo di validità delle tavole.

scorrere l'astro A nel senso della freccia, risulteranno via via differenti mano a mano che l'astro occupa le successive posizioni A, A', A'', ecc.

Se quindi — sempre per la stessa data e per lo stesso valore dell'ora siderea locale  $t_s$  — noi consideriamo più stelle, ad esempio le tre stelle A, B, C (fig. 3) dalle quali partono i tre cerchi di altezza  $90^\circ - h_A$ ,  $90^\circ - h_B$ ,  $90^\circ - h_C$ , la cui intersezione sulla sfera celeste definisce la posizione dello zenit dell'osservatore (Z), e che dopo un certo numero di anni si saranno portate, per effetto del moto di precessione degli equinozi, nelle posizioni A', B', C', è chiaro che alla nuova data l'osservatore, che supporremo sempre

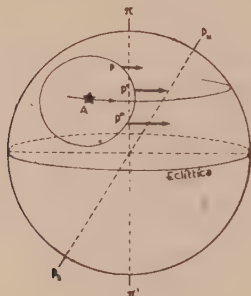


Fig. 1.

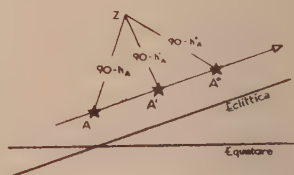


Fig. 2.

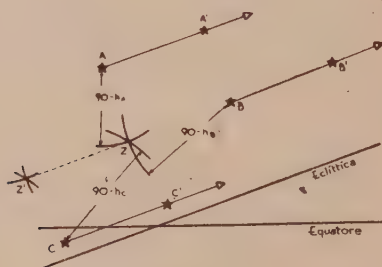


Fig. 3.

fermo in Z, osserverebbe, alla stessa ora siderea locale, altezze dei tre astri ovviamente variate. Chiamiamo  $h'_A$ ,  $h'_B$ ,  $h'_C$  queste nuove altezze, rappresentate in figura dagli archi complementari (non tracciati)  $ZA'$ ,  $ZB'$ ,  $ZC'$ .

Ora, se l'osservatore supponesse invariabili le coordinate degli astri come se il moto di precessione non esistesse, cioè se riferisse tali nuove altezze osservate  $h'_A$ ,  $h'_B$ ,  $h'_C$  alle vecchie posizioni degli astri A, B, C otterrebbe evidentemente un punto come Z' (fig. 3), anch'esso sul parallelo di eclittica passante per Z, ma che rispetto a Z risulterebbe spostato in ragione di  $50'' \cdot 25 \cdot \cos \beta$  all'anno.

Questo è chiarito nella fig. 4 dalla quale risulta come il considerare costanti le coordinate degli astri, cioè il riferire le altezze attuali alle vecchie posizioni A, B, C, corrisponde in definitiva a:

a) prendere i tre astri nelle posizioni A', B', C', con i loro cerchi di altezza  $90^\circ - h'_A$ ,  $90^\circ - h'_B$ ,  $90^\circ - h'_C$ ;

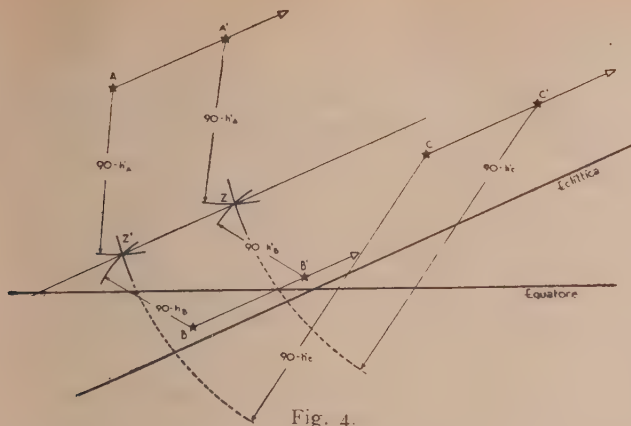


Fig. 4.

b) riportate tutto indietro fino a far ritornare gli astri  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  nelle vecchie posizioni  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Questa seconda operazione equivale ad una rotazione della sfera celeste intorno all'asse dell'eclittica in senso retrogrado (che porta con sè gli astri fissati alla sfera celeste ed i cerchi di altezza solidali agli astri) dell'angolo  $50'', 25 \cdot n$ , ove  $n$  è il numero di anni intercorrente fra le posizioni  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ed  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

Poichè in tale moto, come abbiamo già accennato, qualunque punto di un cerchio di altezza si sposta sul parallelo di eclittica di un arco misurato in unità di cerchio massimo da

$$(1) \quad 50'', 25 \cdot \cos \beta \cdot n$$

il punto che i tre cerchi di altezza hanno in comune nel punto  $Z$ , sia pensato appartenente all'uno che all'altro dei tre cerchi, si sposta anch'esso della quantità (1), il che equivale a dire che i tre cerchi continuando ad incontrarsi in un punto, darebbero, al termine del calcolo, una posizione spostata di una quantità data al solito dalla (1), ed in direzione perfettamente nota, che è quella del parallelo di eclittica passante per  $Z$ .

Le considerazioni finora svolte ci autorizzano quindi ad enunciare il seguente principio:

«Se determinando un punto nave con osservazioni astronomiche si mantengono le coordinate degli astri costanti ed uguali al valore che esse avevano in un certo anno, il punto nave che si ottiene risulta, nell'approssimazione imposta dalle misure che si possono eseguire da bordo, semplicemente spostato dalla posizione effettivamente occupata dall'osservatore all'istante di osservazione, di una quantità espressa da:

$$50'', 25 \cdot \cos \beta \cdot n$$

«in direzione del parallelo di eclittica passante per il punto stesso». Al solito  $n$  è il tempo, misurato in anni, compreso fra l'istante in cui gli astri avevano le coordinate utilizzate per il calcolo, e l'istante di osservazione.

4. Dopo quanto si è detto è evidente che le tavole, una volta realizzate, avrebbero un aspetto di questo tipo:

LATITUDINE 36° NORD						
★	$t_s = 0612$			$t_s = 0614$		
	$\Delta h$	$h$	$az$	$\Delta h$	$h$	$az$
Aldebaran . . . . .	3,4	65 09,4	171	3,8	65 13,2	173
Altair . . . . .	9,2	37 34,5	156	9,3	37 43,8	157
Arturo . . . . .	5,9	56 51,7	164	6,2	56 57,9	166
Betelgeuze . . . . .	9,8	18 00,9	221	9,9	17 51,0	223
Capella . . . . .	22,4	19 16,0	305	22,4	18 53,6	307
Castore . . . . .	19,5	31 49,5	56	19,5	31 30,0	59
Deneb . . . . .	19,3	61 56,1	87	19,4	62 15,5	90

La direzione ed entità dello spostamento, necessari per avere il punto esatto, risultano funzione della latitudine, dell'ora siderea e della data, e si possono ricavare direttamente e contemporaneamente da una tabellina del tipo di quella che si riporta, di uso intuitivo.

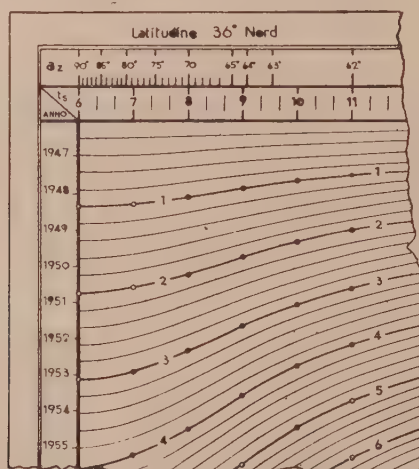


Fig. 5.

Questo metodo, che si può ovviamente realizzare anche sotto forma diversa, si può applicare sia allo scopo di rendere di uso immediato tutte quelle tavole nelle quali compaiono le coordinate variabili degli astri, che per estendere nel tempo la validità di quei grafici che le rappresentano per una determinata epoca, come quelli del Weems.



**Fisica** (Fisica matematica). — *Attorno ad una determinazione di W. Thomson dell'età della Terra.* Nota (\*) di L. CASTOLDI, presentata dal Socio L. ROLLA.

1. È dovuto a William Thomson<sup>(1)</sup> un procedimento di calcolo della età della Terra, cioè del tempo trascorso dall'ipotetico istante dell'iniziale formazione di una crosta solida sulla superficie terrestre ai nostri giorni, basato su risultati della teoria della conduzione del calore risalenti all'Opera classica del Fourier.

Si tratta, com'è risaputo, sostanzialmente, di ciò: Assimilata la Terra ad un semispazio omogeneo conduttore limitato da un piano  $\pi$ , che possiamo assumere come piano coordinato  $x=0$ , e giacente dalla parte delle  $x$  positive, si suppone che essa sia dotata inizialmente di una temperatura uniforme  $T = T_0$  e che, a partire da un certo istante  $t = 0$ , la sua superficie  $\pi$  venga portata ad una temperatura costante  $A$  ( $A < T_0$ ). Si cerca la distribuzione della temperatura, ovviamente funzione soltanto di  $x$  e di  $t$ , a partire dall'istante  $t = 0$  in poi.

Analiticamente si tratta del problema di valori al contorno per la nota equazione differenziale della conduzione del calore

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2)$$

caratterizzato dalle condizioni

$$(2) \quad \begin{cases} T = T_0 & \text{per } x > 0 \text{ e } t = 0 \\ T = A & \text{per } x = 0 \text{ e } t > 0. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema era stata precedentemente fornita dal Fourier sotto la forma

$$(3) \quad T = A + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_0 - A) \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} \cdot d\xi.$$

Da questa espressione di  $T$  subito consegue

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_0 - A) e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \frac{1}{2a\sqrt{t}},$$

e, per  $x = 0$ ,

$$(4) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{T_0}{a\sqrt{\pi t}},$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1947.

(1) *Mathematical and Physical Papers*, vol. III, p. 295 e sg. (1890).

(2) Come è noto,  $a^2$  è una costante materiale del mezzo conduttore legata alla conducibilità interna  $k$ , al calore specifico  $\sigma$  e alla densità  $\rho$  dalla relazione  $a^2 = \frac{k}{\rho\sigma}$ .

Tenuto conto dell'odierno valore sperimentale medio di  $\frac{1}{25} \frac{\text{grado}}{\text{metro}}$  del *gradiente geotermico*  $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$  in superficie, e di quello, dedotto con argomenti teorici da altri fenomeni di conduzione del calore nella crosta terrestre, di  $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\text{metro}}{\sqrt{\text{giorno}}}$  per la costante  $a$ , la relazione (4) fornisce infine per la cercata età  $t$  della Terra il valore, ritenuto dal Thomson almeno grossolanamente indicativo, di  $4 \cdot 10^{10}$  giorni, pari circa a 100 milioni di anni.

Lo stesso Thomson osservava successivamente <sup>(3)</sup> che l'ipotesi iniziale di una Terra occupante un semispazio indefinito non può modificare che di poco i risultati che si otterrebbero trattando la questione come analogo problema di raffreddamento di una sfera di raggio pari a quello terrestre. Effettivamente risulta <sup>(4)</sup> da (3) che ad una profondità  $x$  di 700 Km., dopo 100 milioni di anni, si ha ancora una temperatura che supera i 995/1000 di  $T_0 - A$  <sup>(5)</sup>. Una sensibile diminuzione della primitiva temperatura si sarebbe dunque prodotta in uno strato della crosta terrestre di spessore tale da apparire trascurabile anche di fronte all'effettivo raggio del Globo.

2. È stato osservato che ad una impostazione del problema del raffreddamento della Terra più aderente alla realtà fisica dei fatti si perviene sostituendo alla precedente ipotesi di una temperatura costante  $A$  cui sarebbe venuta a trovarsi, a partire dall'istante  $t = 0$  la superficie terrestre, l'altra di una discontinuità della temperatura nel passaggio da punti interni a punti esterni alla Terra e immediatamente vicini alla sua superficie, discontinuità legata a un fenomeno di *conduttività in superficie* (o *esterna*) caratterizzato dalla condizione al contorno, da sostituire alla seconda delle (2):

$$(2') \quad k \frac{\partial T}{\partial x} = hT,$$

dove  $h$  è il coefficiente di conduttività esterna, e si è supposta nulla la temperatura dello spazio circostante alla Terra.

Ma è anche noto <sup>(6)</sup> che una tale modificazione delle ipotesi non porta in definitiva ad alcun mutamento nel risultato numerico dell'età della Terra,

(3) Loco citato nella nota (1), p. 302.

(4) Tavole dei valori della funzione  $\Theta(x) = \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$  si trovano, per esempio, in appendice al *Trattato di Calcolo delle Probabilità* di G. CASTELNUOVO.

(5) Effettivamente il THOMSON fonda la sua argomentazione sul fatto che, ad una profondità  $x$  pari a 568 miglia, il valore di  $\frac{\partial T}{\partial x}$  è già estremamente prossimo a zero. Ma ci è parso più probativo riferirci, come nel testo, al valore stesso di  $T$ .

(6) Si confronti, per esempio M. PLANCK, *Einführung in die Theorie der Wärme* (1932), p. 133; o anche: P. FRANK e R. V. MISES, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, vol. II, p. 583.

giacchè, anche attraverso alla nuova impostazione, si perviene, alla fine, alla stessa formula (4), e quindi al medesimo valore di  $t$ .

Non, dunque, di questo ci occuperemo nel presente lavoro, ma piuttosto di un altro punto in cui la teoria del Thomson lascia, *a priori*, qualche perplessità, e tuttavia, come vedremo, può rigorosamente giustificarsi: precisamente, dell'argomentazione esposta alla fine del n. 2. E, infatti, a questa può *a priori* obbiettarsi che lo spessore di 700 Km. entro cui, dopo 100 milioni di anni, è ancor confinata ogni sensibile diminuzione della temperatura iniziale, è, sì, piccolo di fronte al raggio terrestre, *ma ottenuto in base all'ipotesi essenziale di una Terra semispaziale indefinita*, e nulla lascia, *a priori*, prevedere l'entità della modificazione numerica di tale spessore cui condurrebbe l'ipotesi, fatta fin da principio, di una Terra sferica di raggio finito. E va ancor qui notato che, come subito mostreremo, il calcolo diretto pienamente conferma la geniale intuizione del grande Fisico inglese.

3. Consideriamo infatti, attenendoci dapprima allo schema del Thomson relativamente alle condizioni al contorno, una sfera di raggio  $R$  termicamente omogenea e dotata inizialmente di temperatura uniforme  $T_0$ , indi, a partire dall'istante  $t = 0$ , portata, in superficie, a temperatura costante  $A$ . A partire da allora, la temperatura  $T$  in un generico punto della sfera riuscirà, per ovvie ragioni di simmetria, funzione soltanto di  $t$  e della distanza  $r$  dal centro. Cosicchè il problema si riduce, analiticamente, all'integrazione dell'equazione indefinita

$$(5) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

colle condizioni al contorno

$$(5') \quad \begin{cases} T = T_0 & \text{per } 0 \leq r < R & \text{e } t = 0 \\ T = A & \text{per } r = R & \text{e } t > 0. \end{cases}$$

Posto

$$(6) \quad r(T - A) = V,$$

le (5), (5') assumono la forma più semplice

$$(7) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

$$(7') \quad \begin{cases} V = r(T_0 - A) & \text{per } 0 \leq r < R & \text{e } t > 0 \\ V = 0 & \text{per } r = R & \text{e } t > 0. \end{cases}$$

Procedendo per separazione di variabili, col porre  $V(r, t) = \rho(r) \tau(t)$ , un noto metodo di integrazione permette di calcolare l'integrale  $V$  della (7) soddisfacente alle condizioni (7'), e, in definitiva, la cercata soluzione  $T$  di (5) e (5'). Si ottiene in tal modo:

$$(8) \quad T = A + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi r}{R} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{R^2} t}, \quad \text{con } B_n = (-1)^n \frac{1}{n} \frac{2R(T_0 - A)}{\pi}$$

da cui, derivando termine a termine, si perviene all'espressione del gradiente geotermico

$$(9) \quad -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2R(T_0 - A)}{\pi r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{R} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{R^2} t} - \\ - \frac{2(T_0 - A)}{r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{n\pi r}{R} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{R^2} t} \quad (7)$$

In superficie, per  $r = R$ , si ha poi:

$$(10) \quad \left( -\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{2(T_0 - A)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{R^2} t}$$

Attribuendo alle costanti che qui compaiono i valori approssimati

$$R = 6\,371\,000 \text{ m.} \quad ; \quad \pi^2 = 10 \quad ; \quad a^2 = \frac{1}{4\pi}$$

e a  $t$  un valore presunto di  $4 \cdot 10^{10}$  giorni, gli esponenti dei termini delle serie a secondo membro della (10) assumono, con discreta approssimazione, l'espressione  $\frac{1}{1200} n^2$ . Ne segue che numerosi termini di quella serie, a partire dal primo, si mantengono abbastanza prossimi all'unità, talchè la limitazione, valida in ogni caso per la sua somma  $\Sigma$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 a^2}{R^2} x^2} dx - 1 < \Sigma < \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 a^2}{R^2} x^2} dx,$$

fornisce qui il risultato, di sufficiente approssimazione per i nostri scopi:  $30 < \Sigma < 31$ . Assumendo 30 come valore di  $\Sigma$  e 4000 come valore di  $T_0 - A$ , si ottiene da (1), per il gradiente geotermico in superficie

$$\left( -\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \approx \frac{1}{26},$$

praticamente ottima riprova della fondatezza della argomentazione del Thomson.

4. Anche nell'attuale ipotesi di una Terra sferica, può interessare, per una più soddisfacente aderenza alla natura dei fatti, sostituire alla condi-

(7) La convergenza assoluta ed uniforme delle serie (8), (9) e di quella che si dedurrebbe da (9) per ulteriore derivazione termine a termine rispetto ad  $r$ , quindi la giustificazione del procedimento stesso di calcolo della derivata e l'effettiva proprietà di (8) di soddisfare alla (5), risultano dalla convergenza, per ogni fissato valore di  $t > 0$ , della serie numerica

a termini positivi  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{R^2}}$ , quale parte della serie geometrica di ragione minore di 1:  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{R^2}}$ , nonchè dalla limitatezza dei moduli dei coefficienti per cui risultano moltiplicati in (8) e in (9) i termini di tale serie.



zione al contorno rappresentata dalla seconda delle (2), un'analoga condizione di tipo (2'), il che richiede poi di accertare se, anche dopo tale ulteriore modificazione delle ipotesi, il risultato del Thomson non venga sensibilmente mutato<sup>(8)</sup>.

Si tratta perciò di riprendere l'equazione indefinita (5) e di sostituire la (5') colle altre

$$(11) \quad \begin{cases} T = T_0, & \text{per } 0 \leq r < R \quad \text{e} \quad t = 0, \\ \left( -\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{h}{k} (T)_{r=R}, & \text{per } t > 0, \end{cases}$$

col significato già dichiarato per  $h$ .

Posto ora

$$(12) \quad rT = V,$$

dalla (5) nuovamente si perviene alla (7), e quindi, per separazione di variabili, a un'espressione di  $T$  della forma

$$(13) \quad T = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \lambda_n r \cdot e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \quad (9).$$

Tenuta presente la seconda condizione (11), facilmente si perviene a stabilire per gli autovalori  $\lambda_n$  l'equazione trascendente

$$(14) \quad \frac{Rk}{k - hR} \lambda_n = \operatorname{tg} R\lambda_n,$$

la quale, posto  $\frac{h}{k} = H$  e  $\lambda_n R = \sigma_n$ , più brevemente si scrive

$$(15) \quad \frac{\sigma_n}{1 - HR} = \operatorname{tg} \sigma_n.$$

Determinata, per esempio, per via grafica, la successione delle soluzioni positive  $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots$  di quest'ultima equazione, e quindi gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  del nostro problema, le corrispondenti autofunzioni normalizzate risultano della forma

$$(16) \quad \frac{1}{\sqrt{I_n}} \operatorname{sen} \lambda_n r,$$

con

$$(17) \quad I_n = \int_0^R \operatorname{sen}^2 \lambda_n r dr = \frac{R}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 \lambda_n R}{4 \lambda_n}.$$

(8) Notizie storiche e bibliografiche attorno alle ricerche fatte sulla conduzione del calore in una sfera, sia in condizioni di indipendenza della distribuzione termica dalla direzione del generico raggio centrale, sia in casi più complessi, si trovano nell'Articolo di E. W. HOBSON e H. DIESELHORST nella *Encyclopädie der Math. Wissenschaften*, vol. V, parte I, p. 199.

(9) Per quanto concerne la convergenza e la derivabilità delle serie, va qui ripetuto quanto è detto nella nota (7), osservando che è, ora, per ogni  $t > 0$ , convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_n^2 t}, \text{ minorante dell'altra } \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{R^2}}.$$

Dopo ciò, ponendo  $t = 0$  nella (13), si ottengono per i coefficienti  $B_n$  le seguenti espressioni

$$(18) \quad B_n = \frac{T_0}{I_n} \int_0^R r \operatorname{sen} \lambda_n r \cdot dr,$$

le quali, sostituite, insieme con i valori già noti delle  $\lambda_n$ , nella (13) stessa, forniscono la soluzione cercata.

Per effettuare, come è nostro scopo, un confronto numerico tra la soluzione ora ottenuta e la (8) del numero precedente, occorre anzitutto procurarsi un valore approssimato della costante  $H$  che compare nella (15) e dalla quale direttamente dipendono le soluzioni  $\sigma_n$  di questa equazione e, in definitiva gli autovalori  $\lambda_n$ .

Attribuito al gradiente geotermico in superficie il valore già adottato di  $\frac{1}{25} \frac{\text{grado}}{\text{metro}}$  e alla temperatura dei punti della superficie terrestre il valore attuale approssimato di  $300^\circ$  assoluti (si ricordi che si è assunta come nulla la temperatura dello spazio vuoto circostante, la quale, d'altra parte, può ragionevolmente identificarsi collo zero assoluto), la seconda delle (11) fornisce immediatamente per  $H$  il valore

$$(19) \quad H = \frac{1}{7500} \frac{1}{\text{metro}}.$$

La (15) diventa allora, sempre in via di grossa approssimazione

$$(20) \quad -\frac{\sigma_n}{1000} = \operatorname{tg} \sigma_n,$$

la quale mostra che, per qualche decina di valori di  $n$ , a partire da  $n = 1$ , si ha sensibilmente

$$\sigma_n = n\pi \quad \text{e quindi} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{R},$$

come già, esattamente forniva la (10). Più precisamente, si può osservare che, come subito risulta dalla risoluzione grafica della (20),

$$0 < n\pi - \sigma_n < |\operatorname{tg} \sigma_n| = \frac{\sigma_n}{1000},$$

e quindi, a maggior ragione

$$(21) \quad 0 < n\pi - \sigma_n < \frac{n\pi}{1000}.$$

Ne segue anche che è

$$(22) \quad |\operatorname{sen} \sigma_n| = (-1)^{n-1} \operatorname{sen} \sigma_n < \frac{n\pi}{1000}.$$

Le (21), (22) costituiscono efficaci limitazioni per piccoli valori di  $n$  (non superiori a qualche decina), ma perdono vieppiù di interesse al crescere di  $n$ , per diventare, infine, banali allorchè è  $n > 1000$ . Va per altro notato che,

allora, le considerate disuguaglianze utilmente risultano sostituite dalle relazioni-limite:

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi,$$

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \sigma_n = (-1)^{n-1}.$$

Tenuto conto di ciò la (17) fornisce per  $I_n$  la seguente limitazione:

$$(25) \quad \frac{R}{2} < I_n < \frac{R}{2} + \frac{1}{1000} R,$$

da cui segue l'altra:

$$(25') \quad \frac{2}{R} \left(1 - \frac{2}{1000}\right) < \frac{1}{I_n} < \frac{2}{R},$$

entrambe valide per qualunque valore intero positivo di  $n$ .

La (18), equivalente a

$$(18') \quad B_n = \frac{T_0}{I_n} \left[ \frac{\operatorname{sen} \sigma_n}{\lambda_n^2} - \frac{R}{\lambda_n} \cos \sigma_n \right],$$

consente poi di stabilire per  $B_n$  le seguenti limitazioni:

$$(26) \quad \frac{2 T_0 R}{n \pi} \left(1 - \frac{2}{1000}\right) \left(1 - \frac{n \pi}{1000}\right) < B_n < \frac{2 T_0 R}{n \pi} \left[1 + \frac{1}{1000} \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^2\right],$$

per  $n$  dispari; e

$$(26') \quad -\frac{2 T_0 R}{n \pi} \left[1 + \frac{1}{1000} \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^2\right] < B_n < -\frac{2 T_0 R}{n \pi} \left(1 - \frac{2}{1000}\right) \left(1 - \frac{n \pi}{1000}\right),$$

per  $n$  pari, valide entrambe per  $n$  qualunque in valore assoluto, ma significative soltanto per valori di  $|n|$  non superiori ad alcune decine. Per esempio, per  $n \leq 40$ , le (26), (26') possono scriversi insieme:

$$(27) \quad \frac{85}{100} \frac{2 T_0 R}{n \pi} \left(1 - \frac{2}{1000}\right) < |B_n| < \frac{2 T_0 R}{n \pi} \left(1 + \frac{2}{1000}\right),$$

la quale, confrontata colla (8), e riconosciute le concordanze di segno, mostra che almeno i primi 40 coefficienti  $B_n$  dell'attuale problema differiscono per meno dei  $\frac{15}{100}$  circa del loro valore dai corrispondenti coefficienti forniti dalla (8) per il problema del numero precedente. Confrontando poi l'espressione del gradiente geotermico

$$(28) \quad \left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ \frac{1}{R} \operatorname{sen} \lambda_n R - \lambda_n \cos \lambda_n R \right] e^{-\lambda_n^2 \lambda_n^2 t}$$

colla (10), e tenendo conto in ciò dei risultati testè conseguiti, si riconosce che dello stesso ordine di grandezza è la differenza relativa tra la somma

dei primi 40 termini nei secondi membri di queste relazioni<sup>(10)</sup>. Quanto ai termini rimanenti, ancora facendo uso delle tavole della funzione  $\Theta(x)$ , si trova che il contributo proveniente dalla prima sommatoria in (28) è del tutto trascurabile, mentre, sia quello proveniente dalla sommatoria (10), sia quello dovuto alla seconda sommatoria in (28), non superano, in valore assoluto i  $\frac{15}{100}$  dell'intero importo della stessa espressione (10).

Ne concludiamo che le quantità (10) e (28) non differiscono certamente fra loro di un importo superiore ai  $\frac{30}{100}$  circa del più grande dei loro valori, e, presumibilmente, differiscono in effetti per assai meno.

È dunque possibile rispondere anche alla questione posta all'inizio di questo numero, affermando che neppure la modificazione ultimamente apportata alle ipotesi iniziali può sostanzialmente alterare l'ordine di grandezza del risultato del Thomson<sup>(11)</sup>.

**Fisica (Ottica).** — *Sull'effetto delle piccole irregolarità di lavorazione negli specchi per riflettori astronomici.* Nota (\*) di G. TORALDO DI FRANCIA, presentata dal Socio G. ABETTI.

§ 1. In un lavoro recente<sup>(1)</sup> ho studiato la diffrazione da parte di innumerevoli aperture eguali ed egualmente orientate, distribuite a caso su un diaframma.

Il fenomeno è caratterizzato dal fatto che in ciascuna direzione si devono comporre innumerevoli vibrazioni coerenti, le cui fasi sono distribuite a caso fra due limiti finiti. Dopo ciò H. Linfoot mi ha suggerito di applicare il metodo allo studio dei piccolissimi difetti di lavorazione degli specchi per riflettori astronomici. È questo lo scopo del presente lavoro. Esso mi ha dato occasione, fra l'altro, di generalizzare alquanto la trattazione e di giungere ad una formula più precisa per mezzo di una discussione matematica più rigorosa.

§ 2. Supponiamo di osservare una stella situata sull'asse dello strumento. Se lo specchio è perfetto, l'onda riflessa sarà sferica<sup>(2)</sup>. È noto che per la

(10) Si suppone qui di attribuire il medesimo valore alle costanti  $T_0 - A$  e  $T_0$  che rispettivamente compaiono nella (10) e nella (28), ossia, ad entrambe, un valore approssimativo di 4000°.

(11) Ringrazio qui pubblicamente il prof. R. Serini per avermi proposto l'argomento del presente lavoro.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1947.

(1) TORALDO DI FRANCIA, *Sull'interferenza di molte vibrazioni con fasi distribuite a caso*. « Atti Acc. Naz. Linc. », febbraio 1947, p. 186.

(2) Evidentemente nel nostro caso non fa differenza che lo specchio sia parabolico o che, essendo sferico, abbia corretta l'aberrazione da una lamina anteposta o da uno specchio convesso susseguente.



trattazione della diffrazione è lecito ammettere che lo specchio sia piano e che rifletta un'onda piana, la quale venga poi resa sferica da un successivo sistema convergente. Studiare il fenomeno di diffrazione all'infinito dell'onda piana equivale a studiare il fenomeno di diffrazione dell'onda sferica nel piano focale del sistema convergente.

L'onda piana riflessa dallo specchio piano fittizio, quando questo è perfetto, abbia l'ampiezza complessa  $A$ . Se invece lo specchio ha una zona  $\Sigma$  incavata di una quantità  $\varepsilon/2$  (positiva o negativa), l'ampiezza complessa in corrispondenza di  $\Sigma$  sarà  $Ae^{2\pi i \varepsilon/\lambda}$ . Nel caso poi che  $\varepsilon$  sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda, tale ampiezza complessa potrà scriversi  $A(1 + 2\pi i \varepsilon/\lambda)$ .

Ammettiamo ora che lo specchio presenti un gran numero di piccole zone  $\Sigma$ , che, per cominciare, supporremo tutte eguali e con lo stesso valore di  $\varepsilon$ . Potremo allora dire che dopo la riflessione avremo un'onda piana, di ampiezza complessa  $A$ , uniforme su tutta la superficie, e in più, in corrispondenza delle zone  $\Sigma$ , una vibrazione di ampiezza complessa  $2\pi i A \varepsilon/\lambda$ .

Nel piano focale dello strumento avremo dunque l'ordinaria distribuzione di ampiezza complessa, dovuta ad uno specchio perfetto (*centrica*) e ad essa dovrà aggiungersi l'ampiezza complessa prodotta dalla seconda vibrazione, proveniente dalle zone  $\Sigma$ . Nel fuoco la seconda vibrazione è in quadratura di fase rispetto alla prima. Ma se prendiamo una direzione differente da quella assiale, le vibrazioni provenienti dalle singole zone  $\Sigma$  avranno fasi differenti l'una dall'altra e distribuite a caso, perchè a caso sono distribuite le zone stesse.

§ 3. Per studiare la diffrazione da parte delle zone  $\Sigma$  in funzione della direzione, fisseremo sullo specchio piano due assi cartesiani ortogonali  $\xi, \eta$ , mentre faremo coincidere il terzo asse  $\zeta$  con l'asse ottico. Consideriamo poi una direzione individuata dai coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$ . Le vibrazioni inviate dalle zone  $\Sigma$  in tale direzione avranno tutte la stessa ampiezza scalare, che noi porremo eguale all'unità. Le fasi invece saranno differenti. Precisamente una zona di coordinate  $(\xi, \eta)$  invierà una vibrazione che, rispetto a quella della zona  $(0, 0)$ , avrà la fase

$$(1) \quad \varphi = k(\alpha\xi + \beta\eta) \quad \left[ k = \frac{2\pi}{\lambda} \right].$$

Rappresenteremo la vibrazione risultante nella direzione considerata mediante un punto  $P(x, y)$  su un piano cartesiano convenendo, come si fa di solito, che la distanza di  $P$  dall'origine sia eguale all'ampiezza, mentre l'inclinazione del suo raggio vettore rispetto all'asse  $x$  sia la fase.

La probabilità che  $P$  cada nel rettangolo  $dx dy$  sarà proporzionale all'area di esso e dipenderà in generale da  $x$ , da  $y$  e dal numero  $N$  delle vibrazioni da comporre. Indicheremo pertanto tale probabilità con  $f(x, y, N) dx dy$ .

Aggiungiamo ora a caso un'altra zona  $\Sigma$ , ossia un'altra vibrazione unitaria alle  $N$  già considerate. Il punto  $P$  si sposterà in  $P_1$  e la probabilità che  $P_1$  cada nel rettangolino di cui sopra sarà  $f(x, y, N+1) dx dy$ . D'altra parte

se  $P_1$  ha le coordinate  $x, y$  quelle di  $P$  dovevano avere la forma  $x - \cos \varphi$ ,  $y - \sin \varphi$  essendo  $\varphi$  la fase della nuova vibrazione unitaria aggiunta. La probabilità corrispondente era

$$f(x - \cos \varphi, y - \sin \varphi, N) dx dy$$

ovvero per la (1)

$$f\{x - \cos[k(\alpha\xi + \beta\eta)], y - \sin[k(\alpha\xi + \beta\eta)], N\} d\xi d\eta.$$

Inoltre la probabilità che la nuova zona  $\Sigma$  cada nel rettangolo  $d\xi d\eta$  di coordinate  $\xi, \eta$ , è  $d\xi d\eta/S$ ,  $S$  essendo l'area totale dello specchio. Pertanto la probabilità che la zona cada in tale rettangolo e che ciò abbia per effetto di portare il punto  $P$  in  $P_1(x, y)$  sarà eguale al prodotto delle due probabilità, ovvero a

$$f\{x - \cos[k(\alpha\xi + \beta\eta)], y - \sin[k(\alpha\xi + \beta\eta)], N\} dx dy \frac{d\xi d\eta}{S}.$$

Integrando rispetto a tutti i valori possibili di  $\xi$  e di  $\eta$  avremo la probabilità totale che  $P_1$  cada in  $(x, y)$ . Si ottiene così

$$(2) \quad f(x, y, N+1) = \frac{1}{S} \iint_S f\{x - \cos[k(\alpha\xi + \beta\eta)], y - \sin[k(\alpha\xi + \beta\eta)], N\} d\xi d\eta$$

essendo l'integrazione estesa a tutta l'area dello specchio.

§ 4. L'equazione funzionale (2) è facilmente risolvibile quando si supponga che  $N$  sia molto grande rispetto all'unità. In questo caso infatti saranno grandi anche  $x$  e  $y$  e gli incrementi delle variabili che compaiono nella (2) potranno essere considerati infinitesimi. Sviluppando allora la  $f$  in serie di Taylor ed arrestandosi alle derivate prime, la (2) fornisce l'equazione

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial N} = -F(\alpha, \beta) \frac{\partial f}{\partial x} - G(\alpha, \beta) \frac{\partial f}{\partial y}$$

dove si è posto

$$(4) \quad \begin{cases} F(\alpha, \beta) = \frac{1}{S} \iint_S \cos[k(\alpha\xi + \beta\eta)] d\xi d\eta, \\ G(\alpha, \beta) = \frac{1}{S} \iint_S \sin[k(\alpha\xi + \beta\eta)] d\xi d\eta. \end{cases}$$

L'integrale generale della (3) è

$$(5) \quad f(x, y, N) = g(x - NF, y - NG)$$

con  $g$  funzione arbitraria. Dunque la (3) ci dice che la probabilità è funzione soltanto dei due argomenti  $x - NF$  e  $y - NG$ . Già questo può portare ad una conclusione importante. Infatti nella direzione dell'asse  $\zeta$  tutte le vibrazioni sono in fase e la loro risultante è  $N$ . Dunque per  $\alpha = \beta = 0$  si deve avere in ogni caso  $x = N, y = 0$ . E poichè per  $\alpha$  e  $\beta$  nulli le (4) danno

$F = 1$ ,  $G = 0$ , si vede che la  $g$  è una funzione tale da dare probabilità 1, ossia certezza, per quei valori di  $x$  e  $y$  che annullano i suoi due argomenti e probabilità zero per qualsiasi altro valore. Avremo dunque in ogni caso

$$(6) \quad x = NF(\alpha, \beta) \quad , \quad y = NG(\alpha, \beta)$$

Si noti ora, osservando le (4), che  $F$  e  $G$  non sono altro che i due noti integrali, mediante i quali si calcola la figura di diffrazione all'infinito del diaframma dello specchio. Possiamo dunque concludere che *quando  $N$  tende all'infinito, le  $N$  vibrazioni unitarie, partenti dalle zone  $\Sigma$  dello specchio, danno luogo alla figura di diffrazione del diaframma, avente al centro l'ampiezza  $N$ .*

Questa figura si sovrappone a quella dell'onda normale ed è in quadratura di fase con essa. Allora, a parte la variazione di luminosità, che del resto è trascurabile se  $\varepsilon$  è piccola, si vede che la figura di diffrazione non viene influenzata dalla presenza delle irregolarità  $\Sigma$ . In particolare il potere risolutivo non ne risentirà danno. Questa conclusione non viene infirmata dal fatto che abbiamo supposto le  $\varepsilon$  tutte eguali. Infatti se ciò non è, potremo sempre suddividere le zone  $\Sigma$  in tante classi, ciascuna con un dato valore di  $\varepsilon$  e troveremmo per ogni classe il medesimo risultato. È questa una circostanza molto fortunata per la costruzione degli strumenti ottici in generale. Per esempio una grande quantità di piccoli graffi distribuiti a caso sulle superficie non abbassa sensibilmente il potere risolutivo. Ciò è confermato dall'esperienza.

§ 5. L'aver trovato per  $x$  e  $y$  i due valori ben determinati dati dalle (6), nonostante la distribuzione casuale delle zone  $\Sigma$ , può recar meraviglia. Ma in realtà ciò non significa che non vi sia dispersione attorno a quei valori. Basta tener presente il procedimento matematico seguito, per comprendere che la dispersione può esserci; rimane soltanto dimostrato che essa, per  $N$  tendente all'infinito, è di ordine inferiore a  $N$ . Per trovare la legge di questa dispersione, basta fare un passo più avanti nello sviluppo in serie di Taylor della  $f$ .

Facciamo prima di tutto il seguente cambiamento di variabili, suggerito dalla discussione precedente

$$x - NF = X \quad , \quad y - NG = Y \quad , \quad N = Z.$$

Indicheremo cioè con  $X$  e  $Y$  gli scostamenti di  $x$  e  $y$  dal loro valore più probabile. Inoltre vogliamo trovare la probabilità in funzione di questi nuovi argomenti; porremo pertanto

$$f(x, y, N) = h(X, Y, Z).$$

Sostituendo allora nella (2), si ottiene

$$\begin{aligned} & h(X - F, Y - G, Z + 1) = \\ & = \frac{1}{S} \iint_S h\{X - \cos[k(\alpha\xi + \beta\eta)], Y - \sin[k(\alpha\xi + \beta\eta)], Z\} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Sviluppiamo ora in serie di Taylor, arrestandosi alle derivate seconde per gli argomenti  $X$  e  $Y$  e alla derivata prima rispetto a  $Z$ . L'esclusione delle altre derivate seconde verrà giustificata a posteriori. Si ottiene così, dopo avere eseguite le integrazioni

$$(7) \quad \frac{\partial h}{\partial Z} = a \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + b \frac{\partial^2 h}{\partial X \partial Y} + c \frac{\partial^2 h}{\partial Y^2}$$

avendo posto

$$(8) \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4} [1 + F(2\alpha, 2\beta) - 2F^2(\alpha, \beta)] \\ b = \frac{1}{2} [G(2\alpha, 2\beta) - 2F(\alpha, \beta)G(\alpha, \beta)] \\ c = \frac{1}{4} [1 - F(2\alpha, 2\beta) - 2G^2(\alpha, \beta)] \end{cases}$$

Integrando la (7) con metodi noti, si trova che la soluzione che per  $Z = 0$  è nulla ovunque tranne che nell'origine è

$$(9) \quad h = \frac{K}{Z} \exp \left[ -\frac{1}{Z} \frac{cX^2 + aY^2 - bXY}{4ac - b^2} \right]$$

con  $K$  costante arbitraria, il cui valore si può determinare esigendo che l'integrale di  $h$  esteso a tutto il piano, ovvero la probabilità di trovare il punto rappresentativo in un luogo qualsiasi, sia eguale all'unità.

Quando  $h$  ha la forma (9) si ha una probabilità sensibilmente diversa da zero soltanto se  $X$  e  $Y$  non sono di ordine superiore a  $\sqrt{Z}$ . Si verifica allora che le derivate che compaiono nella (7) rappresentano infinitesimi di ordine  $1/Z^2$ , mentre  $\partial^2 h / \partial Z^2$ ,  $\partial^2 h / \partial X \partial Z$ ,  $\partial^2 h / \partial Y \partial Z$  sono infinitesimi di ordine superiore. È stato lecito quindi trascurare queste ultime derivate nella (7).

Una discussione generale della (9) si presenta interessante, ma è molto laboriosa e non rientra nello scopo di questo lavoro. Ci limiteremo pertanto al caso più interessante nella pratica di uno specchio a diaframma circolare di diametro  $D$ . In questo caso si ha, come è noto

$$(10) \quad F = 2 \frac{J_1 \left( \pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta \right)}{\pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta}, \quad G = 0$$

con  $J_1$  funzione di Bessel di prima specie di ordine 1 ed essendo  $\theta$  l'angolo che la direzione di diffrazione forma con l'asse. La direzione più importante poi è quella del primo anello scuro della centrica, per cui è  $\pi D \sin \theta / \lambda = j_1$ , essendo  $j_1$  il primo zero non nullo della funzione  $J_1$ . Si trova allora per mezzo delle (8), (9), (10) che la distribuzione di probabilità in questa direzione è

$$h = \frac{K}{Z} \exp \left\{ -\frac{1}{Z} \left[ \frac{X^2}{1 + \frac{J_1(2j_1)}{j_1}} + \frac{Y^2}{1 - \frac{J_1(2j_1)}{j_1}} \right] \right\}$$



Eseguendo l'integrazione su tutto il piano XY si calcola nel modo già detto il valore di K e si ottiene in definitiva

$$(11) \quad h = \frac{1}{\pi Z \sqrt{1 - \frac{J_1^2(2j_1)}{j_1^2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{Z} \left[ \frac{X^2}{1 + \frac{J_1(2j_1)}{j_1}} + \frac{Y^2}{1 - \frac{J_1(2j_1)}{j_1}} \right] \right\}.$$

È questa la legge di probabilità, alla quale obbedisce la luce diffusa nel primo anello scuro.

Si osservi ora che da una tavola di valori delle funzioni di Bessel si ricava

$$\frac{J_1(2j_1)}{j_1} = 0.045$$

per cui non si commetterà errore sensibile, scrivendo la (11) semplicemente

$$(12) \quad h = \frac{1}{\pi Z} e^{-\frac{x^2 + y^2}{Z}}.$$

Si ottiene allora la legge già trovata da Lord Rayleigh<sup>(3)</sup> per l'interferenza di un gran numero di vibrazioni con le fasi distribuite a caso fra  $-\infty$  e  $+\infty$ . In tal caso lo stesso Lord Rayleigh ha calcolato mediante la (12) che in media c'è da aspettarsi un'intensità eguale a  $Z = N$ . Ora poichè invece al centro della figura di diffrazione le zone  $\Sigma$  di per sè darebbero un'intensità eguale a  $N^2$ , si ricava ancora, e in modo più preciso, la conclusione che *la luce diffusa nell'anello scuro è di ordine inferiore rispetto a quella diffusa nella direzione assiale*. Purchè il numero delle zone  $\Sigma$  sia molto grande e la loro distribuzione sia veramente casuale, la loro presenza non danneggia il potere risolutivo.

**Cristallografia.** — V) *Operatori matriciali di simmetria e quaternioni*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di F. FUMI, presentata dal Corrisp. C. PERRIER.

Molti anni addietro C. Viola propose l'uso del calcolo dei quaternioni per la trattazione scientifica della cristallografia geometrica, illustrando in una serie di Memorie<sup>(1)</sup> come le leggi più comuni di quest'ultima si ottengano per suo tramite « *con un tratto di penna* ».

(3) RAYLEIGH, *On the Resultant of a Large Number of Vibrations of the Same Pitch and of Arbitrary Phase*. « Phil. Mag. », X, p. 73 (1880).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1947.

(1) C. VIOLA, *Il calcolo dei quaternioni applicato in Cristallografia*, « Giornale di Min. Crist. e Petrografia », 4, 4 (1894); *Ein Wort ueber den Hauptsatz der Symmetrie der Krystalle*. « Zs. f. Kryst. », 23, 466 (1894); *Die Einführung des geometrischen Rechnen in die geometrische Krystallographie*. « N. Jahr. f. Min. », 10, 167 (1895); *Ueber die Symmetrie der Krystalle und Anwendung der Quaternionrechnung*. « N. Jahr. f. Min. », 10, 495 (1895). Per brevi notizie illustrative sui Quaternioni rinvio alla mia Nota: *Operazioni di simmetria macro- e microscopica* in corso di stampa sul « Periodico di Mineralogia ».

Questo premesso, appare logico tentare un accostamento tra i quaternioni e gli operatori matriciali di simmetria macroscopica <sup>(2)</sup>; invero in questa Nota ci proponiamo di estendere il raffronto anche nei riguardi di quel più generale tipo di operatori lineari che il Seitz <sup>(3)</sup> introdusse per lo studio dei gruppi spaziali dei cristalli.

1. L'uso dei quaternioni in cristallografia poggia naturalmente sulla applicazione della loro interpretazione operativa nello spazio fisico tridimensionale. Invero, come ha sostanzialmente mostrato L. Castoldi <sup>(4)</sup> in un suo recente lavoro, *la identificazione dei quaternioni con entità operatoriali è effettuabile in senso proprio soltanto riferendosi ad una varietà euclidea quadridimensionale*.

Infatti, mentre sussiste notoriamente la possibilità di rappresentare geometricamente nello spazio euclideo tridimensionale il quaternion  $l + v_1 i + v_2 j + v_3 k$  mediante l'ente complessivamente costituito dallo scalare  $l$  e dal vettore  $\bar{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ , non sembra invece giustificabile appieno l'ulteriore identificazione dello stesso quaternion con l'operatore omografico tridimensionale  $l + \bar{v}_\Lambda$ . È invero di immediata constatazione il fatto che il prodotto di due quaternioni  $l + v_1 i + v_2 j + v_3 k, l' + w_1 i + w_2 j + w_3 k$ , definito nel modo noto, non ha in generale come corrispondente, nella identificazione accennata, il prodotto in senso operativo dei corrispondenti operatori  $(l' + \bar{w}_\Lambda)(l + \bar{v}_\Lambda)$ ; anzi quest'ultimo operatore non può più farsi corrispondere in generale ad alcun quaternion.

Perciò la possibilità comunemente asserita di rappresentare il quaternion  $l + v_1 i + v_2 j + v_3 k$  mediante l'operatore  $l + \bar{v}_\Lambda$ , va piuttosto intesa con significato ben più limitato. Siano  $l + v_1 i + v_2 j + v_3 k, l' + w_1 i + w_2 j + w_3 k$  due quaternioni;  $L + V_1 i + V_2 j + V_3 k$  il loro prodotto: se facciamo ad essi ordinatamente corrispondere gli operatori  $l + \bar{v}_\Lambda, l' + \bar{w}_\Lambda, L + \bar{V}_\Lambda$ , e se  $\bar{x}, \bar{y}$  sono due vettori, il primo perpendicolare a  $\bar{v}$ , il secondo a  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$ , tali che:

$$\bar{v} = l \bar{x} + \bar{v}_\Lambda \bar{x}$$

posto

$$\bar{\bar{x}} = l' y + \bar{w}_\Lambda y$$

si ha anche

$$\bar{\bar{x}} = L \bar{x} + \bar{V}_\Lambda \bar{x}.$$

In altre parole, *l'equivalenza accennata tra quaternioni e operatori omografici tridimensionali  $l + \bar{v}_\Lambda$  sussiste soltanto subordinatamente all'applicazione di questi ultimi a vettori particolari dello spazio (precisamente a vettori del piano perpendicolare al vettore operativo della parte assiale dell'omografia) vale a dire con una essenziale limitazione del significato di operatore*.

(2) Per particolari su questi ultimi cfr. ad esempio: F. FUMI, *Sugli operatori matriciali di simmetria macroscopica*. « Rend. Acc. Lincei ... »

(3) « Zs. f. Kryst. » 91, 376 (1935).

(4) *Alcune osservazioni sui numeri complessi e sui quaternioni*. « Periodico di Matematiche », 20, 178 (1940).

Sussiste invece la possibilità di concepire i quaternioni come veri operatori lineari nello spazio euclideo quadridimensionale, in quanto sono pienamente identificabili <sup>(4)</sup> con le matrici quadrate

$$\begin{pmatrix} l & v_1 & v_2 & v_3 \\ -v_1 & l & v_3 & -v_2 \\ -v_2 & -v_3 & l & v_1 \\ -v_3 & v_2 & -v_1 & l \end{pmatrix}.$$

Concludendo, solamente in una varietà euclidea quadridimensionale i quaternioni costituiscono delle vere omografie vettoriali aventi  $l$  come parte dila-

tatoria omotetica e come parte assiale l'espressione  $\begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ -v_1 & 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_2 & -v_3 & 0 & v_1 \\ -v_3 & v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}$

formata colle componenti di  $\bar{v}$ , o, il che è lo stesso, dei tensori doppi operatori aventi  $l$  come parte simmetrica isotropa e, come parte emisim-

metrica, la espressione  $\begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ -v_1 & 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_2 & -v_3 & 0 & v_1 \\ -v_3 & v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}$  formata colle componenti di  $\bar{v}$ .

Nello spazio tridimensionale una interpretazione omografica o tensoriale dei quaternioni va limitata al piano euclideo perpendicolare a  $\bar{v}$ .

In quanto segue, data la perfetta equivalenza dello schema dei tensori doppi e di quello delle omografie vettoriali nello spazio fisico cui ci riferiamo, ricorreremo soltanto al secondo di essi.

## 2. Poche parole sugli operatori di simmetria macroscopica.

Da quanto ho detto altrove <sup>(1), (2)</sup> consegue immediatamente che si tratta di omografie vettoriali dello spazio fisico, costituite dalla somma di una dilatazione e di una omografia assiale il cui vettore operativo è diretto come la direzione unita reale della dilatazione, che rappresenta la direzione dell'asse di simmetria corrispondente.

Rispetto ad una terna cartesiana ortogonale qualsiasi, la dilatazione sarà rappresentata da una matrice simmetrica, mentre la omografia assiale sarà rappresentata da una matrice emisimmetrica generica; la speciale disposizione reciproca delle due parti dell'omografia apparirà riferendosi a terne opportune <sup>(5)</sup>.

Caratteristica essenziale delle omografie vettoriali corrispondenti agli operatori di simmetria macroscopica è quella che il modulo dei vettori trasformati è sempre eguale a quello dei vettori iniziali.

(5) Precisazioni ulteriori sulle matrici rappresentative degli operatori di simmetria macroscopica, rispetto a terne cartesiane generiche, costituiranno l'oggetto di altra Nota.

3. Illustriamo ora l'essenza fisica degli operatori di simmetria microscopica del Seitz.

Nello studio della simmetria microscopica dei cristalli bisogna evidentemente tenere conto della loro costituzione intima; perciò si tratterà di studiare e di esprimere analiticamente i più generali spostamenti che possono produrre il ritorno in sè stessa di una molteplicità rigida e discontinua di particelle. Evidentemente, non si potrà trattare che di rotazioni dotate di significato cristallografico, ossia permesse cristallograficamente, attorno ad un punto fisso, assumibile come origine degli assi coordinati, combinate con traslazioni <sup>(6)</sup>.

Individuando ogni punto nodale con un vettore coordinato  $\bar{x}$  riferito all'origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, la più generale trasformazione esprimente i moti spaziali di ricoprimento di una molteplicità cristallina rigida potrà perciò scriversi:

$$(I) \quad \bar{x}' = \alpha \bar{x} + \bar{a} = \{ \alpha | \bar{a} \} \cdot \bar{x}$$

dove  $\alpha$  denota un operatore rotatorio ed  $\bar{a}$  una traslazione vettoriale.

Sorge ora spontaneamente il problema di attribuire alla trasformazione (I), dato il suo carattere lineare, una rappresentazione matriciale.

All'uopo conviene scrivere per disteso le tre componenti del vettore trasformato  $\bar{x}'$

$$(I') \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_1 \\ x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_2 \\ x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_3 \end{cases}$$

Le  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) sono gli elementi della matrice rappresentativa della trasformazione lineare corrispondente all'operatore  $\alpha$ ; le  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) sono invece le componenti della traslazione vettoriale  $\bar{a}$ .

Evidentemente il fattore addittivo  $a_1$  si può conglobare come costante moltiplicativa, funzione del valore della componente  $x_1$  di  $\bar{x}$ , nel fattore moltiplicativo  $a_{11}$ , scrivendo però che  $a_{11}$ , anzichè una costante è una funzione  $a_{11}(x_1)$  di  $x_1$ , ossia una funzione particolare del posto dipendente solo dalla prima coordinata; esplicitamente

$$(II) \quad a_{11}(x_1) = a_{11} + \frac{a_1}{x_1}.$$

Data la forma analitica di  $a_{11}(x_1)$  bisogna fissare un poco l'attenzione sul caso particolare  $x_1 = 0$ ; infatti matematicamente si viene ad avere la forma indeterminata

$$\left( a_{11} + \frac{a_1}{0} \right) 0 = \infty \cdot 0.$$

L'interpretazione geometrica suggerisce però immediatamente il valore  $a_1$ . Altrettanto può farsi per  $a_2$  e  $a_3$  nei riguardi di  $a_{22}$  e di  $a_{33}$ .

(6) Per una discussione più accurata delle basi analitiche dello studio della simmetria microscopica (e macroscopica), dei cristalli, cfr. la mia Nota di cui a (1).



Concludendo all'operazione lineare (I) si può attribuire la rappresentazione matriciale

$$(III) \quad \begin{pmatrix} a_{11}(x_1) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}(x_2) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}(x_3) \end{pmatrix}$$

e quindi agli operatori  $\{\alpha | \bar{a}\}$  il nome di *operatori matriciali di simmetria microscopica*.

Possiamo affermare che la generica trasformazione di simmetria (I), rappresentata dall'operatore di Seitz  $\{\alpha | \bar{a}\}$ , è una omografia tridimensionale vera e propria nello spazio fisico ordinario, costituita da una dilatazione

$$(IV) \quad \begin{pmatrix} a_{11}(x_1) & 1/2(a_{12} + a_{21}) & 1/2(a_{13} + a_{31}) \\ 1/2(a_{21} + a_{12}) & a_{22}(x_2) & 1/2(a_{23} + a_{32}) \\ 1/2(a_{31} + a_{13}) & 1/2(a_{32} + a_{23}) & a_{33}(x_3) \end{pmatrix}$$

e da una omografia assiale

$$(V) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/2(a_{12} - a_{21}) & 1/2(a_{13} - a_{31}) \\ 1/2(a_{21} - a_{12}) & 0 & 1/2(a_{23} - a_{32}) \\ 1/2(a_{31} - a_{13}) & 1/2(a_{32} - a_{23}) & 0 \end{pmatrix}.$$

La possibilità di considerare gli operatori di simmetria microscopica del Seitz come omografie vettoriali è dal punto di vista matematico, una conseguenza del fatto che queste ultime altro non sono che affinità entro stelle di vettori (7).

In particolare, tenendo presente che con una conveniente scelta del riferimento cartesiano ortogonale  $x_1, x_2, x_3$ , tutti gli operatori di simmetria rotazionale (o macroscopica) si possono scrivere nella forma (6):

$$(VI) \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \varphi = \frac{m}{n} 2\pi$$

( $n = 1, 2, 3, 4, 6$ ;  $m = \text{numero intero} \geq 0$ )

se ne conclude che rispetto a tali terne la parte dilatatoria e la parte assiale dell'omografia tridimensionale rappresentata dal generico operatore  $\{\alpha | \bar{a}\}$  di Seitz sono

$$(VII) \quad \begin{pmatrix} \pm k_1(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(x_2) \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_3(x_3) \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

(7) G. GIORGI, *Sul calcolo spaziale più esteso*. «Atti del Congresso Internazionale dei Matematici». Bologna 1928, vol. V.

quest'ultima esprimibile anche nella forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$(VIII) \quad k_1(x_1) = 1 \pm \frac{a_1}{x_1} ; \quad k_2(x_2) = 1 + \frac{a_2}{x_2 \cos \varphi} ; \quad k_3(x_3) = 1 + \frac{a_3}{x_3 \cos \varphi}.$$

Riassumendo le nostre conclusioni, possiamo affermare che gli operatori  $\{\alpha | \bar{a}\}$  di Seitz rappresentano delle omografie vettoriali dello spazio tridimensionale euclideo, come tali applicabili ad un generico vettore  $\bar{x}$  di tale spazio. *Riferite alle terne di direzioni unite delle loro parti dilatatorie*, codeste omografie risultano dotate della proprietà di esercitare soltanto azione dilatatoria nel senso dell'asse  $\hat{x}_1^{(8)}$  ed azione assiale e dilatatoria nel piano  $x_2 x_3$ .

4. Ricordiamoci ora che i quaternioni sono identificabili compiutamente con delle omografie dello spazio euclideo quadridimensionale, e che limitandoci invece allo spazio fisico tridimensionale non è più possibile identificarli con degli operatori ma solo interpretarli come delle omografie parziali, agenti solo su vettori del piano perpendicolare al vettore del quaternione, e dotate, come parte dilatatoria, dello scalare  $l$  dei qua-

ternioni  $\left[ \text{matricialmente } \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix} \right]$  e, come parte assiale, dell'operatore

vettoriale  $\bar{v}_\wedge$  ( $\bar{v}$  = vettore del quaternione), rappresentabile matricialmente

$$\text{con } \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix};$$

Per mettere in evidenza ciò che può costituire analogia tra i quaternioni e gli operatori di simmetria macro e microscopica conviene innanzitutto riferirsi a terne cartesiane ortogonali tali che le matrici rappresentative delle corrispondenti omografie nello spazio fisico assumano forma analoga.

La matrice che rappresenta nello spazio fisico tridimensionale il quaternion di scalare  $l$  e vettore  $\bar{v}$  (limitatamente a vettori del piano euclideo perpendicolare a  $\bar{v}$ ) assume, rispetto ad una qualunque terna cartesiana ortogonale avente l'asse  $x_1$  nella direzione di  $\bar{v}$  (col che  $v_2 = v_3 = 0$  e quindi  $v = v_1$ ), la forma

$$\begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & -v_1 \\ 0 & v_1 & l \end{pmatrix}.$$

(8) Dando questo nome a quello degli assi della terna nella cui direzione la parte rotazionale dell'operatore  $\{\alpha | \bar{a}\}$  di Seitz ha il valore caratteristico  $\pm 1$ .

Tenendo presente la matrice (VI), che rappresenta la omografia vettoriale tridimensionale corrispondente al generico operatore di simmetria macroscopica rispetto ad una qualunque terna cartesiana ortogonale avente l'asse  $x_1$  nella direzione dell'asse di simmetria considerato<sup>(9)</sup>, e limitandosi a considerare l'azione dei quaternioni e degli operatori matriciali di simmetria macroscopica su vettori del piano euclideo perpendicolare all'asse  $x_1$  (dotato in ambo i casi di una direzione di particolare significato), limitatamente al quale i quaternioni sono interpretabili come entità operatoriali, appare subito che uniche differenze essenziali fra essi sono quelle che per i primi il fattore della parte dilatatoria omotetica piana,  $l$ , come quello della parte assiale,  $v_1$ , può assumere tutti i valori, mentre per i secondi il fattore della omotetia piana,  $\cos \varphi$ , come quello della parte assiale,  $\sin \varphi$ , può assumere solo valori determinati ed in ogni caso compresi tra  $-1$  e  $+1$ ; inoltre i moduli dei vettori sottoposti all'applicazione di quaternioni in generale non si conservano.

Per quanto concerne gli operatori  $\{\alpha | \bar{a}\}$  di Seitz la matrice rappresentativa, rispetto ad una qualunque terna cartesiana ortogonale avente l'asse  $x_1$  nella direzione in cui la parte rotazionale  $\alpha$  dell'operatore ha il valore caratteristico  $\pm 1$ , è

$$(VII') \quad \begin{pmatrix} \pm k_1(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(x_2) \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & k_3(x_3) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

dove le quantità  $x_1, x_2, x_3$ , non sono altro che le componenti del vettore  $\bar{x}$  cui si applica l'operatore (I) (VII').

Come appare evidente, anche prescindendo dalla non identificabilità dei quaternioni con entità operatoriali vere e proprie dello spazio ordinario, sussistono delle differenze.

Infatti, per quanto concerne la parte dilatatoria, i quaternioni costituiscono per vettori perpendicolari al loro vettore  $\bar{v}$  delle omografie di tipo più particolare che non gli operatori  $\{\alpha | \bar{a}\}$  del Seitz per i vettori del piano  $x_2 x_3$ , in quanto che per essi la dilatazione costituisce una omotetia piana mentre per gli operatori di Seitz è una dilatazione spaziale; per quanto concerne invece la parte assiale, i quaternioni sono omografie più generali, poichè nelle matrici rappresentative corrispondenti agli operatori  $\{\alpha | \bar{a}\}$  di Seitz, al posto del modulo  $v = v_1$  del vettore del quaternione, che può assumere tutti i valori positivi, figura il seno dell'angolo  $\varphi = \frac{m}{n} 2\pi$ , che può assumere solo ben determinati valori.

(9) Tutte queste terne costituiscono ovviamente terne di direzioni unite della parte dilatatoria della omografia considerata; esse coincidono altresì colle terne di direzioni unite delle parti dilatatorie delle omografie corrispondenti agli operatori  $\{\alpha | \bar{a}\}$  di Seitz, aventi l'operatore di simmetria macroscopica in esame come parte rotazionale (cfr. conclusioni dopo la (VIII)).

Non va però sottaciuto che quest'ultima differenza deve in parte la sua origine al fatto che i quaternioni sono qui considerati nella loro generalità di enti analitici, mentre agli operatori di Seitz è imposta una limitazione cristallografica.

Però anche tralasciando quest'ultima,  $\sin \varphi$  può assumere solo valori compresi tra  $-1$  e  $+1$ , mentre  $v_i$  può assumere tutti i valori positivi.

5. Prima di terminare, ritengo opportuno riassumere a parole i punti salienti della questione.

Un generico operatore di simmetria macroscopica è in fondo una omografia vettoriale nello spazio tridimensionale euclideo la quale gode della proprietà di conservare le lunghezze ed è costituita da una dilatazione sommata ad una omografia assiale di vettore operativo diretto secondo quella direzione unita della dilatazione che coincide con la direzione dell'asse di simmetria corrispondente.

Un generico operatore di simmetria microscopica è invece la combinazione addittiva di una omografia del tipo considerato con una traslazione vettoriale e viene ad equivalere ad una omografia nello spazio tridimensionale euclideo avente una parte dilatatoria non omotetica, funzione di forma particolare del posto.

Un quaternione è una omografia vettoriale tridimensionale parziale, agente solo su vettori di un certo piano dello spazio tridimensionale euclideo e avente come parte dilatatoria una omotetia costituita dal suo scalare.

Ringrazio vivamente il prof. L. Castoldi, Lib. Doc. di Fisica Matematica presso la nostra Università, per i consigli datimi nell'esecuzione di questo lavoro.

**Cristallografia fisica.** — *Giustificazione tensoriale della mancanza di piezoelettricità nella classe pentagonoicositetraedrica* (\*). Nota (\*\*) di F. FUMI, presentata dal Corrisp. C. PERRIER (\*\*\*).

1. L'utilità, se non la necessità, di studiare la cristallografia con l'ausilio del *calcolo tensoriale per gli spazi euclidei* è stata estesamente illustrata dai magnifici e ben noti lavori di Woldemar Voigt e della sua scuola, della quale è doveroso ricordare il nostro Alfonso Sella.

Molto più recentemente il fisico tedesco C. Hermann ha sviluppato un suo metodo per la trattazione tensoriale di questioni di fisica cristallografica,

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1947.

(\*\*\*) Questa Nota è tratta da una comunicazione al IV Congresso della Società Mineralogica Italiana (Genova 25-27 settembre 1947). La parte espositiva della comunicazione è stata stralciata e verrà compresa in una Nota d'insieme che conto inviare al « Periodico di Mineralogia ».

La presente Nota non è perciò direttamente collegata con le Note di Cristallografia che l'Autore conta pubblicare su questi « Rendiconti ».



il quale presenta certamente rispetto a quello seguito dal Voigt il vantaggio di una maggiore concisione e semplicità formale, unitamente ad una generalità che consente di rilevare facilmente caratteristiche finora praticamente inosservate, come conto illustrare in altre Note; in compenso esso è però ben più astratto.

Codesto metodo dell'Hermann consente in particolare di fornire una suggestiva illustrazione della necessità, più che della convenienza, di applicare il calcolo tensoriale per gli spazi euclidei nello studio della cristallografia, attraverso la giustificazione del dato di fatto sperimentale di cui vogliamo occuparci qui: *la mancanza di piezoelettricità nei cristalli, non centrosimmetrici, della classe pentagonicoitetraedrica* (gruppo cristallografico O di simmetria macroscopica).

Non è infatti possibile dare una interpretazione intuitiva di ciò, seguendo un metodo simile a quello con cui in cristallografia si giustifica correntemente la mancanza di piezoelettricità (proprietà tipicamente polare) nei cristalli delle 11 classi di simmetria dotate di centro di inversione, per i quali tutte le direzioni sono bipolari. Solo una sia pur visiva applicazione di un importante risultato tensoriale conseguito dall'Hermann con una rigorosa deduzione analitica, su cui non ci soffermeremo <sup>(1)</sup>, consente di giungere ad una spiegazione pienamente soddisfacente.

Citiamo senz'altro il risultato che ci servirà:

*una qualsiasi proprietà fisica tensoriale di ordine  $n$  non sente alcuna peculiare influenza da parte di assi di simmetria di ordine maggiore di  $n$ , ossia si comporta attorno alle loro direzioni come se queste fossero assi di simmetria infinita o cilindrica.*

2. Prima dell'applicazione preannunciata accenneremo molto in breve ad alcune definizioni, che, per quanto sostanzialmente note, sono, di regola, omesse nelle trattazioni matematiche del calcolo tensoriale, mentre ne pongono invece nel dovuto risalto la portata e l'utilità fisica.

Nelle righe immediatamente susseguenti si suppone di riferirsi ad una terna di coordinate cartesiane ortogonali, come di solito in considerazioni fisiche nello spazio ordinario; la nota <sup>(3)</sup> illustrerà più avanti il perchè di tale scelta.

Costituisce una *proprietà fisica tensoriale* ogni proprietà che collega linearmente due entità fisiche vettoriali, oppure una entità fisica scalare o vettoriale ed una tensoriale, oppure due entità fisiche tensoriali <sup>(2)</sup>.

(1) Per maggiori particolari si cfr. ad esempio la Nota di insieme che sarà pubblicata sul « Periodico di Mineralogia ».

(2) Può sembrare che in questa definizione non rientri ad esempio il *tensore doppio simmetrico di girazione*, su cui spero riferire in dettaglio in seguito, definito dalla

$$\rho = r_{ik} \alpha^i \alpha^k \quad (r_{ik} = r_{ki}; i, k = 1, 2, 3)$$

che lega il *prodotto di due componenti* controvarianti  $\alpha^i, \alpha^k$  (coincidenti con quelle covarianti  $\alpha_i, \alpha_k$  in coordinate cartesiane ortogonali cui si suppone riferirsi) di uno stesso

A queste diverse eventualità si riconnette l'ordine delle proprietà fisiche tensoriali: se il legame è tra due vettori (tensori del 1° ordine) la proprietà fisica è tensoriale del 2° ordine, se tra un vettore ed un tensore del 2° ordine la proprietà fisica è tensoriale del 3° ordine e così via.

Gli esempi sono ben numerosi. Si pensi alla relazione.

$$(I) \quad \bar{D} = \epsilon \bar{E}$$

tra il vettore intensità di campo elettrico ed il vettore induzione elettrica.

La costante dielettrica  $\epsilon$  è nei dielettrici omogenei anisotropi una proprietà fisica che collega linearmente due entità vettoriali; è una proprietà fisica tensoriale del 2° ordine<sup>(1)</sup>.

Nel caso dei dielettrici omogenei isotropi si può anche dire che la costante dielettrica  $\epsilon$  lega linearmente il modulo del vettore  $\bar{D}$  (che è uno scalare, ossia un tensore di ordine zero) al modulo del vettore  $\bar{E}$  (che è uno scalare, ossia un tensore di ordine zero); perciò nei dielettrici omogenei isotropi la costante dielettrica è spesso considerata uno scalare<sup>(1)</sup>.

Vi è però chi preferisce, e non ne mancano le ragioni, parlare di *tensore doppio isotropo*, considerando la  $\epsilon$  dei dielettrici omogenei isotropi come un legame di forma particolare tra i vettori  $\bar{D}$  ed  $\bar{E}$ <sup>(1)</sup>.

La piezoelettricità è invece una proprietà fisica che collega linearmente la deformazione elastica di un cristallo col momento elettrico dipolare che ne deriva; ma la deformazione elastica, la quale a sua volta collega linearmente lo spostamento dei punti del solido con la loro posizione<sup>(1)</sup>, ossia collega due entità vettoriali, è una proprietà fisica tensoriale del 2° ordine, mentre il momento elettrico dipolare è una entità tipicamente vettoriale. Allora il *tensore di piezoelettricità è del 3° ordine*.

Da quanto precede risalta l'importanza di considerare attentamente le condizioni sotto cui una entità fisica può considerarsi scalare o vettoriale. Non è possibile limitarsi alle consuete definizioni intuitive le quali, nascondendo l'effettiva sottigliezza e profondità della questione, possono trarre in inganno, ma occorre ricorrere a definizioni astratte, pienamente soddisfacenti e rigorose.

Costituisce una *entità fisica scalare* ogni entità fisica la quale, per natura, si trasformi *per invarianza*.

versore (che individua la direzione che si considera entro il solido cristallino) ad uno scalare  $p$  (il potere rotatorio in quella direzione). In realtà non è così, perchè l'ente  $\alpha^i \alpha^k$  appartiene alla categoria delle *diadi di Gibbs*, ossia costituisce un particolare *tensore doppio*, in quanto è, più precisamente, il prodotto diadico del versore  $\alpha^i$  per sè stesso.

Analoghe considerazioni si possono fare per tutte le proprietà fisiche tensoriali definite tramite formule di saturazione degli indici, in cui a secondo membro figurino, oltre alle componenti dell'ente fisico considerato, *più di un altro* fattore vettoriale o tensoriale, proprietà che *sembrano* non rientrare (ma in realtà rientrano) nella definizione data nel testo.

Si pensi alla temperatura; la temperatura dei punti di una regione spaziale è sempre la stessa in ognuno di essi, qualunque sia il riferimento di coordinate che si usi per individuarne la posizione.

Ma non è qui l'essenza della trasformazione per invarianza; quanto detto costituisce solo una *costanza* dei valori locali della temperatura rispetto alle trasformazioni di coordinate. La trasformazione per invarianza è caratterizzata da questo:

«detta  $f(x_1, x_2, x_3)$  la funzione che esprime l'andamento spaziale della temperatura nella regione considerata rispetto al riferimento di coordinate  $x_1, x_2, x_3$ , la funzione che esprime l'andamento spaziale dello stesso campo di temperatura in un nuovo riferimento di coordinate

$$(V) \quad x'_1 = x'_1(x_1, x_2, x_3); \quad x'_2 = x'_2(x_1, x_2, x_3); \quad x'_3 = x'_3(x_1, x_2, x_3)$$

[dove le funzioni  $x'_1(x_1, x_2, x_3); x'_2(x_1, x_2, x_3); x'_3(x_1, x_2, x_3)$  vanno considerate univalenti ed univocamente invertibili, ossia a determinante funzionale  $J \begin{pmatrix} x'_1, x'_2, x'_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} \neq 0$ ], dette

$$(VI) \quad x_1 = x_1(x'_1, x'_2, x'_3); \quad x_2 = x_2(x'_1, x'_2, x'_3); \quad x_3 = x_3(x'_1, x'_2, x'_3)$$

le equazioni di trasformazione inverse delle (V), è

$$f[x_1(x'_1, x'_2, x'_3), x_2(x'_1, x'_2, x'_3), x_3(x'_1, x'_2, x'_3)] = \text{costante}.$$

Secondo questa stessa legge si trasformano ad esempio per natura, oltre alla temperatura, la densità ed il calore specifico che costituiscono perciò altri due esempi di proprietà fisiche scalari.

Costituisce una *entità fisica vettoriale* ogni grandezza che abbia per componenti su una generica terna di riferimento tre entità fisiche le quali, per natura, si trasformano, rispetto ad un cambiamento di coordinate, tutte e tre secondo una stessa delle due leggi di trasformazione per covarianza o per controvarianza per un sistema semplice<sup>(1)</sup>.

Questa duplice possibilità non è però connessa in modo intrinseco alla natura dei vettori, ma corrisponde semplicemente a due differenti modi di espressione dei loro elementi rappresentativi<sup>(2)</sup>.

Nel caso particolare che ci si riferisca a terne cartesiane ortogonali le due leggi di trasformazione per covarianza o controvarianza delle componenti di un vettore vanno a coincidere con le ben note formule di trasformazione delle coordinate cartesiane ortogonali, ed è questa la ragione per cui nelle trattazioni elementari del calcolo vettoriale i fondamentali concetti di covarianza e controvarianza non vengono introdotti: in conseguenza di quanto esposto qui sopra si può affermare che

«le componenti di un vettore secondo una terna cartesiana ortogonale sono (o meglio devono essere) funzioni lineari omogenee delle componenti

secondo qualunque altra terna cartesiana ortogonale, essendo i coefficienti i coseni direttori degli assi della nuova terna rispetto all'antica » <sup>(3)</sup>.

Ciò che resta assodato è il fatto che tre entità che si trasformino per natura per invarianza, come la temperatura, la densità ed il calore specifico non individuano complessivamente un vettore e che mai una grandezza che si trasformi per natura per invarianza può considerarsi componente di un vettore.

Ad evitare malintesi vogliamo soffermarci ancora su di un punto.

Per quanto ciò debba già risultare implicitamente chiaro da quanto precede, vogliamo rilevare esplicitamente che possono benissimo aversi delle entità non scalari, ossia soggette alle leggi di trasformazione per covarianza e controvarianza, le cui componenti conservino lo stesso valore in riferimenti diversi; alludiamo ai cosiddetti *tensori isotropi* che possono però esistere solo per ordini pari. In ogni caso la *costanza* delle loro componenti nei vari riferimenti consegue proprio dalla applicazione delle leggi di trasformazione *per covarianza e controvarianza e non per invarianza* <sup>(1)</sup>.

Non riteniamo sia il caso di soffermarci qui sulle condizioni sotto cui, da un punto di vista matematico astratto, un ente assegnato può considerarsi un tensore <sup>(1)</sup>, dato che esse sono sempre illustrate a fondo nelle trattazioni dedicate al calcolo tensoriale.

3. Veniamo finalmente all'applicazione del risultato analitico dell'Hermann (cfr. n. 1). Per esso il tensore costante dielettrica, tensore del 2° ordine, presenterà simmetria cilindrica attorno a tutte le direzioni che costituiscono assi di simmetria di ordine 3, 4, 6 per il cristallo considerato. Ecco perchè le proprietà ottiche, che dipendono grazie alla teoria elettromagnetica della luce proprio da  $\epsilon$ , hanno simmetria cilindrica attorno alla trigira, alla tetragira ed alla esagira nei sistemi trigonale, tetragonale ed esagonale rispettivamente, come mostrano sia le superfici d'onda, come pure le superfici ausiliarie che si usano in fisica ed in cristallografia (ellissoidi di Fresnele di Fletcher).

Parimenti dal risultato dell'Hermann segue subito necessariamente l'isotropia ottica dei cristalli cubici.

Infatti in tutte le classi del sistema cubico, e solo in esse, si hanno quattro trigire, che sono in particolare equiinclinate sui tre assi di simmetria binaria (o quaternaria) tra di loro ortogonali.

Per il nostro scopo basta considerare due delle quattro trigire. Ciascuna di queste costituisce asse di simmetria cilindrica per la costante dielettrica e quindi le due trigire complessivamente determinano l'equivalenza di tutte le direzioni interne al cristallo rispetto alla  $\epsilon$  stessa, vale a dire l'isotropia del comportamento ottico.

(3) È stata proprio l'ipotesi di riferirsi a coordinate cartesiane ortogonali, esplicitamente espressa all'inizio del n. 2, che ci ha consentito di definire allora le proprietà fisiche tensoriali ed il loro ordine, senza parlare di covarianza e controvarianza.



Consideriamo ora il tensore piezoelettrico nella classe pentagonoicositetraedrica:

Tre tetragire ortogonali e quattro trigire equinclinate su di esse, oltre a sei digire, ne sono gli elementi di simmetria. Ma a noi bastano le tetragire ortogonali (la classe O è l'unica classe non centrosimmetrica che abbia più di una tetragira e precisamente due – e quindi di conseguenza tre – tetragire ortogonali).

Infatti la piezoelettricità, proprietà tensoriale del 3° ordine, presenterà simmetria cilindrica attorno a ciascuna delle tetragire; allora il complesso delle tre tetragire (ne bastano anzi due) comporta automaticamente l'equivalenza di tutte le direzioni dei cristalli pentagonoicositetraedrici rispetto alla piezoelettricità (4).

Perciò, siccome le tetragire nella classe O sono bipolari, perchè perpendicolari ad un altro (anzi a due altri) assi di simmetria di ordine pari (le altre due tetragire), *tutte le direzioni dei cristalli della classe pentagonoicositetraedrica devono essere bipolari rispetto alla piezoelettricità.*

• Ciò significa che *i cristalli della classe pentagonoicositetraedrica non possono presentare piezoelettricità.*

4. – Si vede così che, mantenendosi ancora molto aderenti alla intuizione fisica, ma accettando di ricorrere ai risultati analitici del *calcolo tensoriale per gli spazi euclidei*, si può giustificare il fatto, elementarmente inspiegabile, che la classe pentagonoicositetraedrica, unica tra le 21 classi senza centro di simmetria, non presenti piezoelettricità.

Invero non è questa l'unica apparente anomalia che si incontra nello studio del comportamento piezoelettrico dei cristalli delle varie classi di simmetria; le altre sono però inspiegabili anche dal punto di vista tensoriale teorico, a meno di non ricollegarle a quella *piezoelettricità tensoriale* (Voigt 1905) (5) che costituisce tutt'ora una proprietà assai poco studiata, ma sulla quale spero di poter riferire in seguito.

(4) Questo stesso fatto comporta la mancanza di piezoelettricità, dato il suo carattere di proprietà polare; la dimostrazione riesce però più evidente continuando come nel testo:

A scanso di equivoci osserviamo che già il Voigt fornì una giustificazione tensoriale della mancanza di piezoelettricità nella classe O utilizzando però un metodo puramente analitico, totalmente diverso da quello applicato qui.

(5) A differenza della piezoelettricità normale (o *vettoriale*), la piezoelettricità tensoriale è *proprietà tensoriale del 4° ordine*, poichè collega linearmente il tensore doppio deformazione elastica col tensore doppio *momento elettrico quadripolare*; la piezoelettricità tensoriale può manifestarsi anche in cristalli centrosimmetrici.

**Elettrochimica.** — *Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline* (\*). Nota V di G. BIANCHI, presentata (\*\*) dal Socio L. LOMBARDI.

I. Nella terza Nota <sup>(1)</sup> della presente serie ho dato notizia dell'azione che l'aggiunta di varie sostanze ha sul valore della prima densità di corrente critica alla quale un anodo di stagno immerso in una soluzione di soda caustica normale a 40°C diventa passivo: altri risultati di esperienze riferentesi alle aggiunte di gelatina e di silicato potassico ho pure comunicato nella precedente Nota <sup>(2)</sup>. Ho ripreso le ricerche sull'azione della aggiunta di cloruro sodico per spiegare lo strano fenomeno che quando la concentrazione di NaCl nella soluzione di soda caustica normale a 40°C raggiunge un certo valore l'anodo di stagno diventa passivo anche a densità di corrente piccolissime ricoprendosi di una pellicola lucida trasparente. Dopo molti tentativi nelle varie direzioni ho potuto stabilire che il fenomeno è dovuto alla formazione nell'elettrolita di sostanze ossidanti (ipocloriti, clorati, ecc.) in seguito alla scarica sull'anodo di ioni cloro che reagiscono con la soluzione di soda caustica. Così in qualche caso ho potuto riprodurre il fenomeno aggiungendo semplicemente alla soluzione di soda caustica normale a 40°C del clorato sodico in ragione di 20 gr/litro. Senza azione in questo senso sono state invece le aggiunte di acido perclorico ( $d = 1,54$ ) fino ad una concentrazione di 45 c.c./litro alla quale sull'anodo sono comparse delle macchie bianche di cloruro dovute alla scarica di ioni cloro. Le ricerche precedenti effettuate aggiungendo alla soluzione di soda caustica dei sali degli acidi ossigenati del cloro hanno dato dei risultati difficilmente riproducibili per le alterazioni che i sali stessi subiscono quando vengono disciolti nella soluzione di soda caustica e per la scarica sull'anodo di ioni cloro. Con maggior successo ho potuto indagare la passivazione dello stagno, a piccole densità di corrente con formazione della pellicola lucida trasparente, aggiungendo alla soluzione di soda caustica normale a 40°C del cromato potassico. Fino a che la concentrazione del cromato potassico è minore di 10 gr/litro, le aggiunte di questa sostanza fanno semplicemente diminuire la densità di corrente critica alla quale l'anodo di stagno diventa passivo: quando la concentrazione è uguale a 10 gr/litro, l'anodo di stagno può diventare passivo a densità di corrente molto piccole. I fenomeni che si osservano sono diversi a seconda che si adoperi un anodo di stagno che è già stato precedentemente passivato e poi pulito con la lima per asportare la pellicola formatasi nella passivazione, oppure un anodo di stagno che non è ancora servito per prove di passivazione. In quest'ultimo caso immergendo l'anodo nella soluzione

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. III, fasc. 1-2, p. 94, 1947.

(2) « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. III, fasc. 1-2, p. 97, 1947.

sopra specificata, si verifica che il voltmetro inserito sulla cella (il cui catodo è costituito da una bacchetta di ferro circondata da una candela porosa) indica in assenza di corrente esterna una tensione di  $-0,6$  V: mandando nella cella una corrente e aumentandola gradualmente, la tensione della cella gradualmente aumenta fino a che con una densità di corrente di  $4,5$  A/dm<sup>2</sup> l'anodo di stagno diventa passivo ricoprendosi di una pellicola iridescente di piccolo spessore, che col procedere dell'elettrolisi diventa quasi nera lucida. Immergendo invece nella soluzione un anodo di stagno che è già stato precedentemente passivato e poi pulito con la lima, il voltmetro indica una tensione di  $+0,6$  V che lentamente decresce fino ad annullarsi. Se si fa passare corrente nella cella prima che la tensione si annulli, l'anodo di stagno diventa passivo con qualsiasi densità di corrente, anche piccolissima. Se si fa passare la corrente dopo che la tensione si è annullata, si verifica che adoperando una densità di corrente iniziale minore di  $0,75$  A/dm<sup>2</sup> l'anodo di stagno diventa passivo solo quando la densità di corrente raggiunge i  $4,5$  A/dm<sup>2</sup> ricoprendosi di una pellicola iridescente; e che con una densità di corrente iniziale uguale o maggiore di  $0,75$  A/dm<sup>2</sup> l'anodo di stagno diventa subito passivo ricoprendosi di una pellicola lucida trasparente. Aumentando la densità di corrente o lasciando procedere l'elettrolisi per un tempo sufficientemente lungo, quest'ultima pellicola diventa color caffè lucido di aspetto molto simile a quella descritta nella quarta Nota ed ottenibile aumentando la densità di corrente quando l'anodo di stagno è rivestito della pellicola lattiginosa.

2. Lo studio delle pellicole precedentemente conosciute che si formano nella passivazione anodica dello stagno in soluzione alcalina è stato effettuato da Kerr <sup>(3)</sup> che ne ha determinato sia la composizione chimica (che è risultata corrispondere ad una miscela di ossido stannoso e stannico idratati in varia proporzione) sia lo spessore in funzione del tempo, della temperatura, della densità di corrente e della composizione della soluzione. Non si ha invece notizia nella letteratura della determinazione del potenziale elettrochimico che lo stagno assume quando è rivestito di una delle pellicole che si formano nella passivazione. Per effettuare questa ricerca mi sono servito di un cilindretto di stagno purissimo Kalhbaum del diametro di mm. 6 e lungo mm. 20 che facevo funzionare da anodo per 15 minuti con varie condizioni di concentrazione, densità di corrente e temperatura in modo da far formare su di esso la pellicola che desideravo: allo scadere dei 15 minuti interrompevo la corrente, toglievo il cilindretto dalla soluzione, lo lavavo abbondantemente e poi lo immergevo in una soluzione di Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub> 0,2 m entro la quale pescava pure il sifone di collegamento con una cella a calomelano satura. Per mezzo di un potenziometro misuravo la forza elettromotrice della pila così costituita dalla quale risalivo al potenziale elettrochimico che lo stagno rivestito della pellicola di passivazione assumeva rispetto

(3) « Journal Soc. Chem. Ind. », 57, 405 (1938).

alla soluzione indicata. Il potenziale elettrochimico così misurato era in generale variabile col tempo e le misure venivano continuate fino a che si otteneva un valore costante. La temperatura era quella ambiente, circa uguale a  $15^{\circ}\text{C}$ .

Il potenziale elettrochimico dello stagno non passivo (pulito prima della prova con una lima) rispetto alla soluzione  $0,2\text{ m}$  di  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  è di  $-0,60\text{ V}$ , stabile; se lo stagno è stato precedentemente passivato e poi pulito con una lima per asportare lo stato passivo, il suo potenziale elettrochimico è inizialmente uguale a  $-0,55\text{ V}$ , variabile, raggiungendo dopo circa 8 minuti il valore di  $-0,60\text{ V}$ . Il potenziale elettrochimico dello stagno rivestito della pellicola bruna è positivo, variabile nel tempo e dipendente dalla densità di corrente usata per la sua formazione come mostra la figura 1 che si riferisce a pellicole formate alla densità di corrente indicata in una soluzione normale di soda

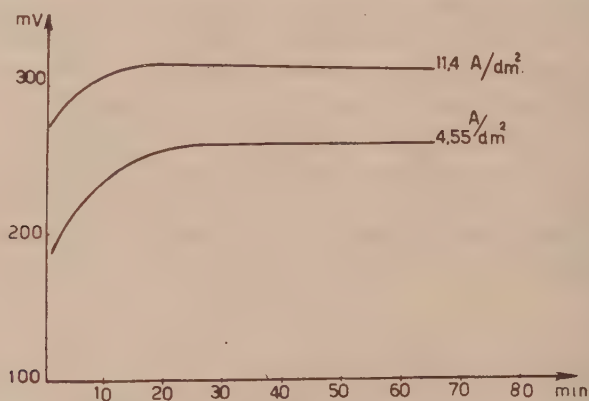


Fig. 1.

caustica a  $40^{\circ}\text{C}$ . Le stesse condizioni corrispondono anche alla formazione sullo stagno della pellicola di aspetto lattiginosa di cui la fig. 2 dà la variazione del potenziale elettrochimico in funzione del tempo, e alla formazione della pellicola caffè lucida ottenuta con la densità di corrente indicata nella fig. 3, figura che dà la variazione del potenziale elettrochimico dello stagno rivestito da questa pellicola con il tempo. Per lo studio relativo alle pellicole che si formano in presenza di cromato potassico, mi sono servito di una soluzione di soda caustica normale con aggiunti  $25\text{ gr/litro}$  di cromato di potassio alla temperatura di  $50^{\circ}\text{C}$ : operando con la densità di corrente di  $1,23\text{ A/dm}^2$  il potenziale elettrochimico diminuisce leggermente nelle prime due ore e poi si stabilizza sul valore di circa  $+100\text{ mV}$ , mentre che con la densità di corrente di  $4,94\text{ A/dm}^2$  il potenziale elettrochimico è inizialmente uguale a  $+450\text{ mV}$  e in 4 h scende regolarmente stabilizzandosi su  $+125\text{ mV}$ . Il potenziale elettrochimico dello stagno rivestito della pellicola che si può ottenere alla densità di corrente di  $3,75\text{ A/dm}^2$  operando con una soluzione di soda caustica normale a  $40^{\circ}\text{C}$  con aggiunti  $150\text{ c.c./litro}$  di silicato potassico ( $d = 1,35$ ) è inizialmente uguale a  $+650\text{ mV}$ , dopo 5 h si riduce a



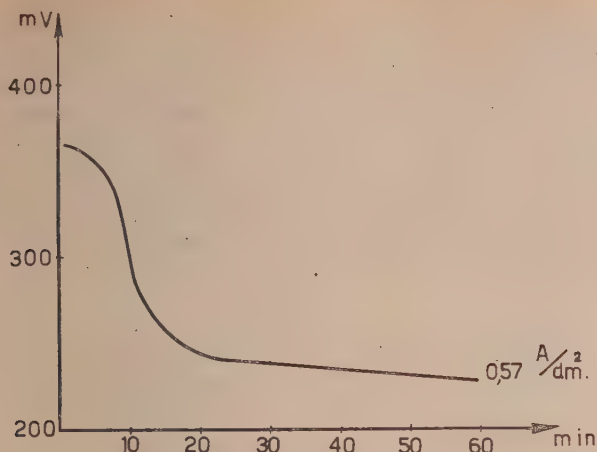


Fig. 2.

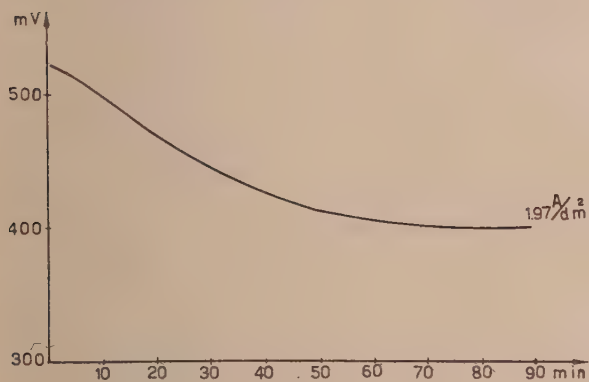


Fig. 3.

+ 300 mV e continua a diminuire (+ 250 mV dopo 18 h) senza tendenza a stabilizzarsi.

3. La prima densità di corrente critica, in corrispondenza della quale lo stagno diventa passivo quando funziona da anodo in una soluzione di soda caustica, dipende, altro che dai fattori già studiati nelle precedenti Note, anche dagli elementi che possono essere contenuti in lega nell'anodo di stagno. Ho rivolto la mia attenzione al caso delle leghe stagno-piombo e stagno-rame preparando dei campioni di varia composizione e colandoli in un tubicino di vetro (come già ho descritto nella prima Nota) in modo da ottenere un anodo con una superficie ben definita. Operando nel solito modo con una soluzione normale di soda caustica a 50°C, ho potuto stabilire che sia il rame che il piombo influenzano il valore della prima densità di corrente critica facendola gradualmente diminuire man mano che aumenta la loro percentuale nello stagno, come mostra la Tabella I che riassume i risultati ottenuti. Oltre i fenomeni periodici, ho osservato che al manifestarsi della

passività la tensione della cella sale più lentamente e ad un valore inferiore di quando si sperimenta con lo stagno puro: questo valore è di circa 2,3 V per le leghe stagno-piombo e di circa 3,0 V per le leghe stagno-rame contro un valore di circa 4,0 V per lo stagno puro in uguali condizioni sperimentali.

Inoltre ho osservato che per la lega col 50 % Pb la passività non è accompagnata da sviluppo anodico di ossigeno, che per le leghe stagno-piombo l'anodo passivato è rivestito di una pellicola nera, che per le leghe stagno-rame l'anodo passivato è rivestito di una pellicola di color verde tanto più intenso quanto maggiore è la percentuale di rame.

TABELLA I.

Elemento di lega	Densità di corrente critica	
	A/dm <sup>2</sup>	
Pb    0	10,5	
2 %	8,4	
5 %	6,9	
10 %	8,7	
15 %	7,8	
20 % *	7,2	
50 %	6,3	
Cu    0	10,5	
0,85 %	9,9	
4,27 %	9,3	
8,55 %	9,0	

Dalla presente ricerca si possono trarre le conclusioni che seguono:

Lo stagno che funge da anodo nell'elettrolisi di una soluzione di soda caustica può comportarsi diversamente a seconda delle condizioni di temperatura, concentrazione della soluzione, densità di corrente in dipendenza del manifestarsi di fenomeni di passività. Con piccole densità di corrente lo stagno si discioglie anodicamente come ione bivalente per dare stannito sodico con elevato rendimento in corrente: aumentando la densità di corrente si manifestano delle variazioni periodiche della tensione della cella di ampiezza e periodo variabile con le condizioni sperimentali e quando la densità di corrente supera un primo valore critico (dipendente dalla temperatura e dalla concentrazione della soluzione) lo stagno diventa passivo ricoprendosi di una pellicola bruna formata da una miscela di idrato stannoso e stannico: in queste condizioni la tensione della cella aumenta a parecchi volt e la dissoluzione dello stagno avviene come ione tetravalente con un piccolissimo

rendimento in corrente. Se quando lo stagno è passivato nella forma precedente si riduce la densità di corrente ad un valore uguale od inferiore ad un secondo valore critico (pure dipendente dalla temperatura e dalla concentrazione della soluzione) la pellicola di passivazione di cui è ricoperto l'anodo di stagno cambia aspetto diventando lattiginosa e di spessore molto più piccolo: lo stagno continua a disciogliersi come ione tetravalente con un rendimento che si avvicina al 100 % col diminuire della densità di corrente. Quando l'anodo di stagno è ricoperto della pellicola lattiginosa, un aumento della densità di corrente ad un valore superiore al secondo valore critico fa di nuovo mutare l'aspetto dell'anodo di stagno provocando la formazione di una pellicola lucida color caffè: la dissoluzione dello stagno avviene come ione tetravalente con un piccolissimo rendimento in corrente. La pellicola bruna è insolubile nella soluzione di soda caustica e lo stagno ricoperto da questa pellicola rimane passivo anche quando si interrompe la corrente: la pellicola lattiginosa e quella lucida color caffè sono solubili e lo stagno ricoperto da queste pellicole perde la passività quando si interrompe la corrente. L'aggiunta alla soluzione di soda caustica di sostanze come carbonato sodico, cloruro sodico, acetato di sodio, gelatina fa diminuire il valore della prima densità di corrente critica: uguale effetto hanno anche le aggiunte di silicato di potassio che provocano inoltre la formazione sull'anodo di stagno di una spessa crosta nera e un aumento della tensione della cella ad un valore di anche 100 V. L'aggiunta alla soluzione di soda caustica di sostanze ossidanti provoca la passivazione dell'anodo di stagno anche a densità di corrente piccolissime con formazione di una pellicola lucida color caffè molto simile a quella precedente. Il rame e il piombo presenti nell'anodo di stagno come elementi di lega influenzano il valore della prima densità di corrente critica abbassandolo sensibilmente quando sono presenti in percentuale elevata.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha guidato durante lo svolgimento del presente lavoro.

**Geologia.** — *Condizioni di giacitura diapirica dei calcari liasici dei Monti Cornicolani (Lazio)* <sup>(\*)</sup>. Nota di C. MAXIA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. CHÉCCHIA-RISPOLI.

Nel 1943 ebbi occasione di illustrare un gruppo di molluschi liasici dei Monti Cornicolani e Lucretili <sup>(1)</sup>. La prima di queste regioni mi aveva attratto, non solo per la successione stratigrafica, che pare ininterrotta dal Lias inferiore al Neocomiano, quanto per la singolare tettonica, la quale presenta stretti rapporti con quella riconosciuta, in alcuni settori dell'Appennino

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Geo-paleontologico dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) C. MAXIA, *La serie liasica nei M. Cornicolani e Lucretili*. « Boll. Soc. Geol. It. », LXII, Roma, 1943.

centrale e della Sicilia, da Bonarelli, Fossa-Mancini, Rovereto, Principi, Fabiani, Scarsella, Trevisan, e altri ancora <sup>(2)</sup>.

Nei M. Cornicolani, fin da molti decenni or sono, erano stati raccolti fossili giurassici, ma soltanto per il Lias medio e superiore si può parlare di vere e proprie faune. Io però non ho avuto la fortuna di trovarne molti, e, quasi sempre, purtroppo, in cattivo stato di conservazione. D'altra parte, le località fossilifere indicate dal Ponzi, dall'Abate Rusconi e dal Mantovani <sup>(3)</sup>, talora vaghe, oltre a non trovar sempre corrispondenza sulle tavolette al 25.000 dell'I.G.M., sono anche, nella maggior parte dei casi, poco familiari agli stessi abitanti della regione.

Comunque, basandosi sui caratteri stratigrafici e litologici, essendo insufficienti quelli paleontologici, gli operatori dell'Ufficio Geologico distinguevano, nei M. Cornicolani, rientranti nel Foglio geologico di Palombara Sabina (n. 144 della Carta d'Italia al 100.000), tutte le formazioni giurassiche, fatta eccezione per il Dogger, e quella neocomiana.

È da ritenere però che al Giurassico medio possa essere attribuita una formazione costituita di selci e calcari verdicci, compresa tra il Lias superiore e i calcari titonico-neocomiani.

Sebbene non contraddetta esplicitamente da nessun autore è indubbiamente discutibile la interpretazione strutturale data, subito dopo il rilevamento geologico dei Cornicolani, da Zezi, Baldacci e Cortese <sup>(4)</sup>; ma ciò non può destare meraviglia, e non soltanto per le scarse vedute che si avevano, sopra questa importante branca della Geologia, in quel tempo ormai lontano.

Può essere invece importante il fatto che, quantunque nelle linee generali la struttura dei Cornicolani si inquadri - come è ovvio - nel motivo, dominante dell'orogenesi appenninica (assi tettonici orientati NO-SE), la disposizione dei calcari del Lias inferiore (e, qualche volta, del Lias medio) nei confronti delle rocce, assai più plastiche, dei successivi termini stratigrafici mesozoici, faccia pensare a quella particolare struttura che è nota generalmente col nome di diapirismo.

Mia principale preoccupazione è, per ora - in attesa del completo rilevamento geologico dei Cornicolani - di mettere in evidenza le caratteristiche strutturali di questa regione.

Limitati a nord e ad est dal Canale marino pliocenico di Palombara-Marcellina, che immette nelle valli del Tevere e dell'Aniene, i M. Cornicolani restano chiaramente individuati nella Campagna Romana, costituendo una

(2) Cfr. R. FABIANI, *Risultati delle mie ricerche geologiche in Sicilia nel periodo 1925-1932*. « Boll. Ass. Min. Sicil. », VIII, nn. 9-12, Palermo, 1932 e F. SCARSELLA, *Sulla geologia della Valle d'Ussita*. « Boll. Soc. Geol. It. », L, Roma, 1931.

(3) Cfr. C. MAXIA, *Bibliografia geologica del Lazio*. « Boll. R. Uff. Geol. d'It. »; appendice al vol. LXVII, Roma, 1934.

(4) *Tavola I delle sezioni geologiche relative ai Fogli nn. 142-143-144 e 150 della Carta Geologica al 100.000. Sezione M. N.* Pubblicato a cura del R. Ufficio Geologico nel 1888.



serie di colline isolate, che emergono, per poco più di 200 metri, dalla circostante zona ondulata plio-pleistocenica.

La caratteristica morfologica più saliente della regione in esame è offerta da due rilievi più elevati: quello di S. Angelo Romano, cupoliforme, e l'altro, di Poggio Cesi-Montecelio-S. Michele, in forma di grossa lama, terminata in una cresta tripuntuta, allungata da nord a sud. Verso queste due direzioni, essi, si protendono in una serie di colline basse, appiattite, a guisa di piccoli altipiani, intorno ai 200-300 m., facilmente interpretabili come avanzi di superfici di abrasione del mare pliocenico<sup>(5)</sup>.

Ciò che però mi ha veramente colpito, oltre l'aspetto morfologico, è il fatto che, nei Cornicolani, a partire dalle loro cime o creste aguzze, dove emergono i calcari rigidi del Lias inferiore (oppure del Lias medio), si abbia una sovrapposizione a mantello dei successivi termini stratigrafici giurassico-cretacici, costituiti di materiali più plastici.

Non bisogna però immaginare che tali avvolgimenti siano continui secondo le generatrici di un cono, essendo prevalente un orientamento degli assi tettonici nella direzione appenninica. È inoltre molto interessante il fatto che tale motivo stratigrafico-tettonico si ripeta, per tutta la regione cornicolana, considerata nel suo insieme; escluso lo spuntone isolato di Grotta Marozza, che cade fuori di quest'area.

Tale cintura esterna, a pianta ellittica, con l'asse maggiore diretto da NO a SE, può essere seguita, saltuariamente, per lunghi tratti, specialmente sui lati nord e meridionale; ed è da immaginare che le interruzioni siano in relazione con faglie preplioceniche.

Esaminiamo intanto più da vicino i caratteri stratigrafici, tettonici e morfologici delle rocce che entrano a far parte dei M. Cornicolani.

In questa regione possiamo considerare i seguenti elementi stratigrafico-strutturali:

1° una serie di noccioli rigidi di calcari del Lias inferiore, e, talora, del Lias medio, dei quali, i primi, non piegati; gli uni e gli altri divisi in netti piani di fratturazione, prevalentemente orientati NO o NE, a fortissime pendenze;

2° un involucro di calcari più o meno marnosi e selciferi e di marne, rappresentanti il Lias superiore e il Dogger, ora straterellati, ora scistosi, intensamente e minutamente fratturati, fino alla loro totale scomparsa, in molti punti, per laminazione;

3° un successivo mantello, costituito di calcari bianchicci o giallastri, a tessitura compatta, a pasta finissima, di età titonico-neocomiana, in strati sottili, con noduli o straterelli di selce varicolore intercalati, fortemente contorti, a ondulazioni bene pronunziate, talora fagliati;

4° una copertura, risultante: in parte, di sedimenti clastici pliocenici, a base conglomeratica trasgressiva sui terreni più antichi, e il resto, da mate-

(5) C. MAXIA, *La trasgressione pliocenica presso Rignano Flaminio*. « Boll. Uff. Geol. d'It. », LXX, Roma, 1947.

riali clastici, piroclastici e travertinosi, del Neozoico; tutti in giacitura praticamente orizzontale, fortemente incisi.

Morfologicamente, al primo elemento corrispondono due tipi ben distinti: cupole e creste aguzze, da una parte e piccoli altipiani, dall'altra; mentre a quello indicato col n. 2 si accompagnano depressioni od incavature, poste sui versanti collinosi (passi; parti superiori di valli; versanti bassi), con terreni fortemente disfatti dall'erosione, i quali sfuggono facilmente al rilevatore, data anche l'esigua potenza del complesso litologico Lias superiore-Dogger.

I sottili strati calcareo-selciferi, titonico-neocomiani (elemento n. 3) formano colline basse, appiattite, brulle, biancheggianti, separate da valli ampie e poco profonde, talora doliniformi, con coperture di « terra rossa ». Nell'insieme si ha un anello ellittico, interrotto negli archi di maggiore lunghezza, cioè ad ovest e ad est, più pronunciato nel settore meridionale (Colle Monsignore; da Colle Grosso a Montecelio; versante orientale di S. Angelo Romano; versante nord ed orientale di R.ne Ciminello-Macchia di S. Francesco).

Finalmente la copertura plio-pleistocenica (n. 4) si trova, o in residue placche di trasgressione sugli appiattiti dossi mesozoici intorno ai 180-300 metri (gruppi collinosi di M. Oliveto-Ciminello-Macchia di S. Francesco e di Colle Grosso-Carcibove) o in costoni detritici più o meno cementati, sugli erti fianchi degli spuntoni di calcari liasici (come avviene lungo la carrozzabile, sotto, ad ovest di S. Angelo Romano), o come riempimento di fondovalli e di conche ampie, poco profonde e di scarsa altitudine, insinuate o svolgentesi tutto attorno ai Cornicolani (Valle Concia; Valle Pacinotto; Valle di Palombara-Marcellina, ecc.).

Al primo di questi elementi morfo-tettonici partecipano, come è stato detto, specialmente i calcari del Lias inferiore, che costituiscono lo spuntone isolato di Grotta Marozza, la caratteristica cupola di S. Angelo Romano, l'acuta cresta di Poggio Cési; mentre la piramide terminale di Montecelio culmina coi calcari del Lias medio, i quali, hanno, in questo punto, un comportamento tettonico analogo a quello offerto dal Lias inferiore nelle località ora ricordate.

I calcari del Lias medio però, di preferenza, si estendono a formare piccoli altipiani, che circondano i cunei di S. Angelo Romano e di Montecelio (Macchia di S. Angelo, ecc.) e, più estesamente, il sistema collinoso M. Oliveto-R.ne Ciminello-Macchia di S. Francesco. Del resto, non è del tutto assente il Lias inferiore, il quale però non ne è sempre separabile, nè la morfologia è sempre bene evidente, per la intensa copertura boschiva e per le placche di « terra rossa », forse mista a tufi vulcanici terrosi dello stesso colore, che diffusamente coprono questa regione.

Sul versante orientale di S. Angelo Romano i calcari del Lias medio partecipano invece dei caratteri strutturali degli elementi n. 2 e n. 3; cioè sono stati anch'essi sollevati a mantello dai calcari del Lias inferiore.

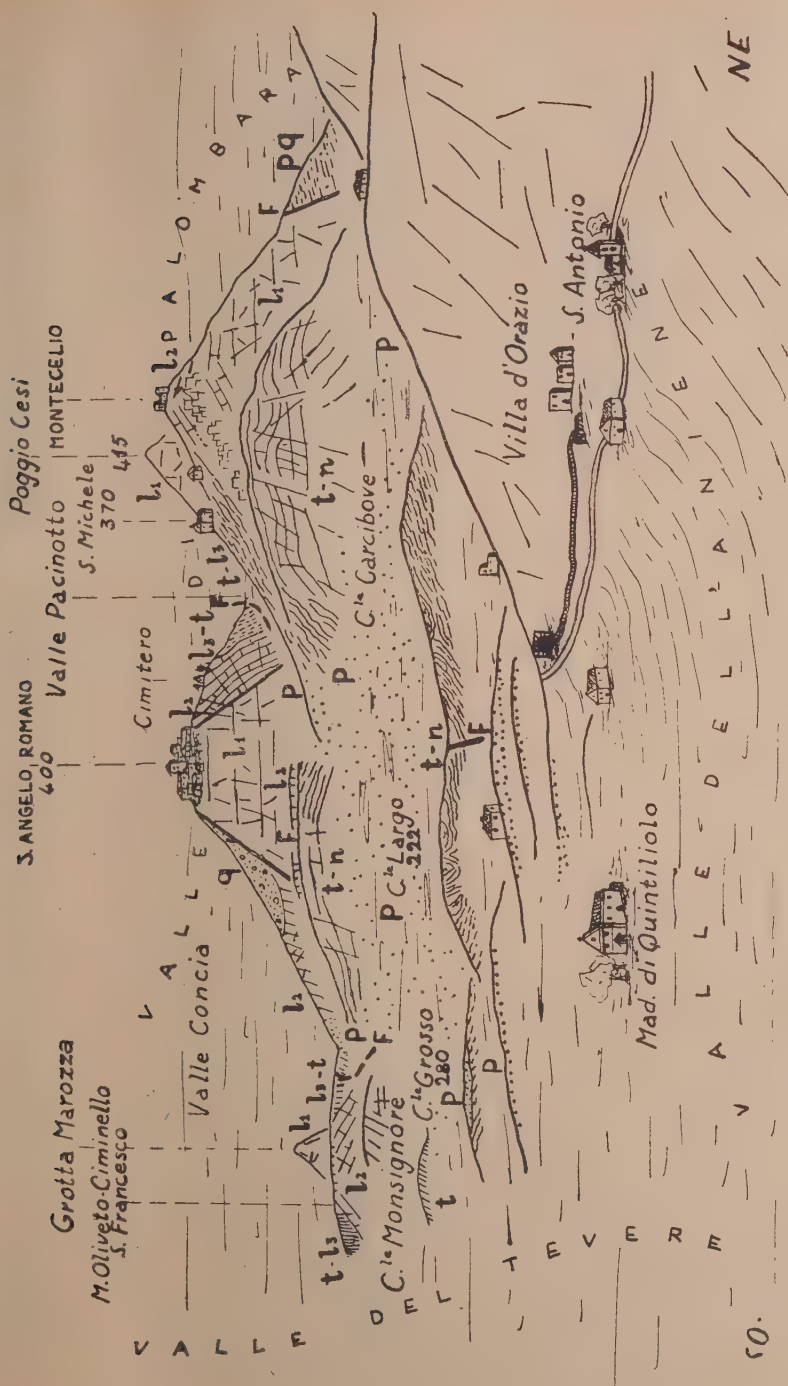


Fig. 1. - Impressione morfo-tettonica dei M. Cornicolani. Da un disegno eseguito sul Colle Catillo (Tivoli). Distanze: a S. Angelo Romano, 12 Km.; a Montecelio, 9 Km.; a S. Antonio, 2 Km. Visuale 22°.

Spiegazione dei segni:  $l_1$ , Lias inferiore;  $l_2$ , Lias medio;  $l_3$ , Lias superiore;  $d$ , Dogger;  $n$ , Neocomiano;  $p$ , Pliocene;  $q$ , Quaternario; F, Faglia

Il 2° tipo stratigrafico-strutturale è bene individuabile alla periferia degli affioramenti di Lias inferiore e medio (versante orientale di S. Angelo Romano), talora in strati che girano dalla direzione di NO a quella E-O, sul versante settentrionale di R.ne Ciminello.

Si tratta, come si è detto, di terreni a comportamento plastico, costituiti da strati, per lo più sottili, di calcari marnosi rossi, di calcari verdicci e di selce verdastra del Lias superiore-Dogger.

Per il comportamento meccanico, questa serie, si avvicina al tipo n. 3. Ma gli strati calcareo-marnosi sono più laminati, perchè più teneri, e più fratturati, per l'estrema ricchezza in selce, specialmente quelli del Dogger; talora foggianti a pieghe secondarie sinclinaliche, tra S. Michele e Montecelio, a nord di Montecelio, e in altri punti.

Il 3° elemento stratigrafico-strutturale, quello titonico-neocomiano, è molto esteso sul lato meridionale dei M. Cornicolani. In questi calcari prevalgono contorsioni e ondulazioni secondarie fittissime, con assi che variano frequentemente di direzione; con fratture radiali, rispetto al nucleo rigido di Montecelio.

Nel settore settentrionale questi terreni ripetono il motivo tettonico di quelli precedenti: danno strati fortemente rialzati intorno ai calcari del Lias superiore-Dogger del versante settentrionale di R.ne Ciminello.

A sud invece, nell'insieme, si nota una blanda sinclinale tra Colle Largo C.le Carcibove, Montecelio e S. Angelo Romano, definita da una moderata depressione, colmata da sedimenti pliocenici.

Per spiegare la particolare struttura tettonica dei Cornicolani sono necessarie però altre considerazioni. Di esse la più istruttiva risulta dallo studio della serie completa liasico-titonica che si osserva sul versante orientale della collina di S. Angelo Romano, il cui nucleo è costituito da calcari massicci del Lias inferiore.

Questi, non piegati, ma fratturati secondo piani diretti a N, NO e NE, con forti pendenze, fino quasi alla verticalità, sono ricoperti in discordanza per testata, dai calcari in strati a grandi falde del Lias medio, che scendono sotto il Cimitero di S. Angelo Romano; i quali passano, concordantemente, presso il Tabernacolo che sorge sulla mulattiera (« R.ne Il Notaro », di Rusconi e di Ponzi), ai calcari marnosi, nodulosi, rossi ad ammoniti toarciane <sup>(6)</sup>, ai quali succede una esigua formazione calcareo diasprigna, in strati sottili, verdastri, attribuibili al Dogger, per essere ricoperti dai tipici calcari del Titonico, i quali, poco sopra il fondovalle, invertono bruscamente l'immersione verso O.SO, venendo in contatto anormale con grosse bancate di calcari, probabilmente del Lias inferiore, dai quali sono separati da una intensa breccia di frizione.

Questo notevole disturbo tettonico, interpretabile come una piega-faglia, si può seguire per alcuni tratti verso sud, a traccia curvilinea, per riapparire, sotto il Colle Largo, rivelata da una intensa brecciazione tettonica.

(6) C. MAXIA, vedi nota (1), a p. 591.



Analogo contatto per testata si ha sul versante sud-occidentale di S. Angelo Romano, tra i calcari del Lias inferiore e medio, mentre, a nord e a nord-est, appaiono gli strati contorti del Titonico-neocomiano, i quali, spostando la loro direzione fino a raggiungere quasi quella E-O, sembra ne avvolgono la base.

Che i calcari del Lias inferiore non siano piegati, ma conservati pressochè nella loro giacitura originaria, è dimostrato anche da un altro fatto, che si osserva, molto bene, sullo spuntone di Grotta Marozza.

Qui, infatti, il calcare cristallino, biancastro, del Lias inferiore, contiene alcune fasce di calcari pisolitici, in posizione quasi perfettamente orizzontale. Da qui, la supposizione, che anche l'isolato affioramento di Grotta Marozza, possa essere riguardato un frammento diapirico.

L'esame particolareggiato della collina Poggio Cesi-Montecelio-S. Michele è pure molto interessante agli effetti della tettonica.

Sulla sommità di Poggio Cesi i calcari del Lias inferiore mostrano una fratturazione verticale molto accentuata, alla quale si aggiunge una pseudo-stratificazione orizzontale, determinata pure da diacasi. In qualche punto i soprastanti calcari del Lias medio sono poco piegati dando l'idea che siano stati portati in alto, a guisa di cappello, dal sollevamento del nucleo di Lias inferiore.

Questi appaiono, notevolmente sviluppati, ad est di tutta la collina, presentando imponenti fratturazioni che ne determinano la suddivisione in banchi enormi. Essi terminano, probabilmente, con una grande faglia, diretta da NO a SE, e della quale non è facile determinarne la natura, mascherata dalla copertura pliocenica, particolarmente spessa, nella Valle di Palombara-Marcellina.

Più a sud, però, tra le cimette di Montecelio e di S. Michele, come anche circa 700 m. a NE di Montecelio, i calcari marnosi e selciferi del Lias superiore-Dogger sono enormemente fratturati e schiacciati e capricciosamente ripiegati in varie direzioni con motivi che, in piccolo, riproducono, addirittura, fenomeni di ricoprimenti tettonici.

Anche qui si ha la stessa successione del versante orientale di S. Angelo Romano, con enorme diffusione dei calcari titonico-neocomiani, che avvolgono tutto il versante meridionale di Montecelio, per scendere, quindi, a costituire la ricordata ampia sinclinale, a nucleo neocomiano, sviluppata lungo la strada di Montecelio, sotto il Cimitero di quest'abitato.

Pertanto, riassumendo, nei M. Cornicolani:

1° esiste una serie stratigrafica completa dei termini principali, dal Lias inferiore al Titonico-Neocomiano, osservabile specialmente sul versante orientale di S. Angelo Romano; tra S. Michele e Montecelio; a nord di R.ne Ciminello;

2° si possono considerare almeno tre nuclei di calcari rigidi (M. Oliveto-R.ne Ciminello-Macchia di S. Francesco; S. Angelo Romano; Poggio Cesi-Montecelio), oltre allo spuntone isolato di Grotta Marozza, orientati

nelle direzioni di NO e di N.NÖ; il secondo di essi, separato dagli altri due dalla piega-faglia di Valle Pacinotto-Colle Largo, la quale trova l'equivalente strutturale in una cava recentemente aperta in area titonico-neocomiana presso la Via Palombarese, nella Valle Concia;

3° dal punto di vista del comportamento meccanico si possono principalmente distinguere due grandi complessi: *a*), di calcari rigidi, in giacitura orizzontale o poco inclinata, nei quali le fratture prevalgono sulle pieghe; specialmente rappresentati dal Lias inferiore, e, in parte, dal Lias medio; *b*), di una serie calcareo-marnoso-selcifero, a comportamento plastico, molto piegata, con faglie e pieghe-faglie, anzichè fratture semplici;

4° la morfologia segue assai bene la struttura tettonica, corrispondendo: al complesso *a*, cocuzzoli prominenti o altipiani; a quello *b*) versanti dolci o colline appiattite, separate da valli ampie;

5° gli spuntoni e le cupole di Lias inferiore e medio sono frantumate (Grotta Marozza; S. Angelo Romano; Montecelio; Poggio Cesi) e sopraelevate sui terreni più recenti, i quali, talvolta, sono portati al cappello;

6° è caratteristica intorno ai calcari rigidi, la disposizione a squame degli strati plastici toarciano-neocomiani (R. ne Ciminello), oppure un loro rialzamento a cupola (Montecelio), o la loro giacitura monoclinale (versante orientale di S. Angelo Romano; versante meridionale e sud-occidentale di Montecelio);

7° è tipica una discordanza tettonica fra i calcari del Lias inferiore o medio e quelli titonico-neocomiani, per l'assenza, in molti punti, in seguito a laminazione, del Lias superiore-Dogger.

**CONCLUSIONE.** - Concludendo si potrebbe dunque affermare che, per il loro carattere di giacitura, gli isolotti liasici di Grotta Marozza, S. Angelo Romano e Poggio Cesi-Montecelio, possono essere considerati, senza difficoltà, masse rigide di tipo diapirico; mentre il complesso calcareo-marnoso-selcifero, toarciano-neocomiano, ha comportamento di massa plastica, che venne sollevata a cupola, e quindi attraversata dal calcare massiccio.

**Paleontologia.** — *Su di una faunetta cassiana della Valle di Zoldo (Belluno)* (\*). Nota (\*\*) di A. RIEDEL, presentata dal Socio G. DAL PIAZ.

Gli strati attribuibili al livello di San Cassiano possiedono un notevole sviluppo nel territorio della Valle Zoldana.

Essi presentano alla loro base un complesso tufaceo-marnoso con intercalazioni di marne giallo-brune e di calcari grigiocuri o biancastri contenenti dei fossili. La parte superiore è costituita da rocce di origine corallina a forma di lenti e scogliere isolate che non possiedono uno sviluppo continuo.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico dell'Università degli Studi di Padova diretto dal prof. Gb. Dal Piaz.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1947.

Gli strati superiori del Raibliano constano specialmente di marne e di calcari marnosi sui quali si sono formati i prati che si trovano alla base dei monti dolomitici (bibl. I).

In un masso erratico appartenente probabilmente alle intercalazioni calcaree della formazione di San Cassiano fu trovata dal prof. P. Leonardi la piccola fauna che egli ha voluto affidare al mio studio. Mi è grato dovere esprimergli i miei ringraziamenti anche per l'aiuto fornitomi durante il lavoro. Desidero ringraziare pure il signor Cherubini e l'amico dott. G. Ogniben che hanno eseguito i disegni dei fossili. Un primo sguardo alla faunetta è stato dato dalla dott.ssa Ester Vian che se ne occupò per una tesina di laurea.

La fauna, che è la prima di questo livello descritta nella Valle Zoldana, ha la caratteristica di essere composta da individui di piccole dimensioni, specialmente i brachiopodi (vedere le figure).

#### ELENCO DELLE SPECIE.

##### *Brachiopodi.*

- Thecidium cfr. cymbula Bittn.
- cfr. Rhynchonella dilatata Suess.
- cfr. Rhynchonella pichleri Bittn.
- Spirigera indistincta Bey.
- cfr. Spirigera marmorea Bittn.
- cfr. Spirigera multicostata Klipst.
- Spirigera cfr. trigonella Schloth.
- Spirigera wissmanni Muenst.
- cfr. Koninckina sp.
- Terebratula cassiana Bittn.
- Terebratula sturi Laube.

##### *Lamellibranchi.*

- cfr. Heminayas woehrmanni Waagen.
- cfr. Cypricardia beyrichi Tornq.
- Avicula sp.
- Avicula cassiana Bittn.
- Avicula cfr. sturi Bittn.
- cfr. Cassianella angusta Bittn.
- Cassianella sp.
- cfr. Posidonomya wengensis Wissm. var. alta Frech.
- cfr. Pinna raibliana Par.
- Lima telleri Bittn.
- Pecten sp.
- Amussium cfr. subdemissum Muenst.
- Chlamys desiderii Bittn.
- Chlamys landrana Bittn.
- cfr. Terquemina obliqua Muenst.
- Plicatula imago Bittn.

*Cefalopodi.*

Arcestes cfr. bicarinatus Muenst.

## DESCRIZIONE DELLE FORME.

*Spirigera indistincta* Bey.

La *Spirigera indistincta* è la forma presente col maggior numero di individui. Essa consta principalmente di esemplari dalla forma avvicinantasi alla triangolare e da altri nettamente pentagonali (fig. 2). Vi si notano però tutti gli stadi di passaggio. Gli esemplari, sempre abbastanza rigonfi, lo sono specialmente in alcuni pezzi triangolari (fig. 1).

Secondo il Laube (bibl. 2; tav. XI, fig. 5) e lo Scalia (bibl. 3, tav. II, figg. 2-7) esiste una terza varietà dalla forma ellissoidale (semicircolare alla commessura frontale dove presenta una notevole ondulazione, e triangolare a quella cardinale). Questa varietà non è rappresentata nella nostra fauna che da pochi esemplari e non molto significativi, specialmente per quanto riguarda l'ondulazione della commessura cardinale. Anche tutte le altre forme presentano quest'ondulazione appena accennata, e meno spiccata di quello che si dovrebbe avere in queste *spirigere*.

La specie di cui abbiamo discorso presenta una grande variabilità di forme e di tipi di transizione e si deve considerare una specie polimorfa.

*Spirigera* cfr. *trigonella* Schloth.

Esemplari incompleti mancanti della commessura frontale e perciò non distinguibili da *Spirigera tetractis* Loretz.

*Terebratula cassiana* Bittn.

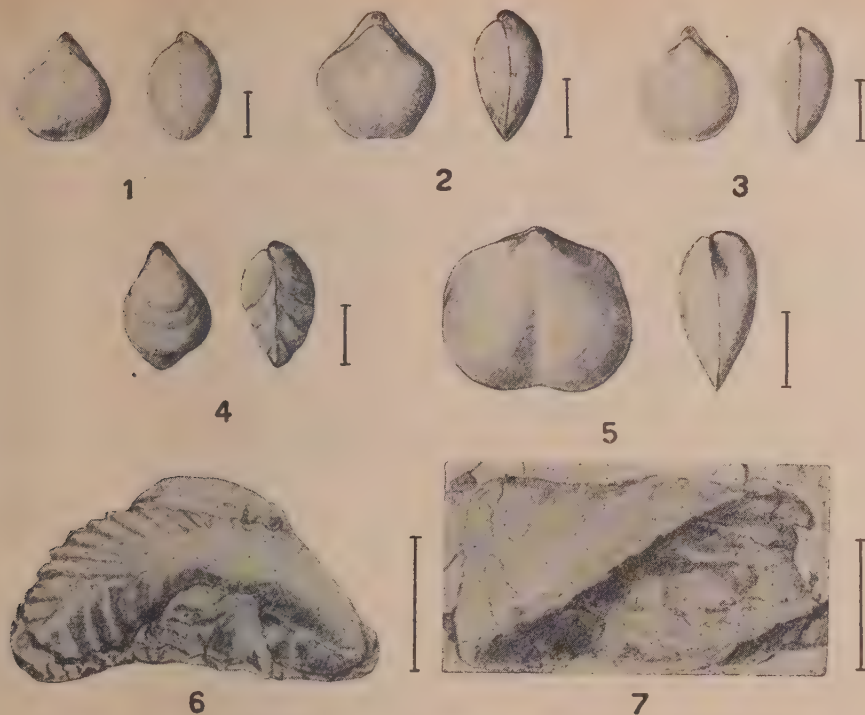
La *Terebratula cassiana* Bittn. è presente con un discreto numero di esemplari. La varietà ellissoidale oltre a pezzi lisci (bibl. 2, tav. XI, fig. 7) ne presenta di quelli con coste rilevate sia allungati (fig. 4) sia meno alti. Un esemplare probabilmente anormale di quest'ultimo tipo presenta delle ondulazioni del guscio assai prominenti.

Il tipo rotondo (fig. 3), prevalentemente liscio (bibl. 2, tav. XI, fig. 8), l'ho riscontrato in alcuni esemplari più piccoli ed in uno più grande. Si deve poi notare che secondo il Bittner, che istituì la specie *Terebratula cassiana* separandola dalla *Spirigera indistincta* Bey, uno dei caratteri diagnostici differenziali fra le due specie sarebbe stata la piccolezza della prima rispetto la seconda. Invece dagli esemplari qui riprodotti si può vedere chiaramente che questo carattere diagnostico non ha un valore assoluto.

cfr. *Cypricardia beyrichi* Tornq.

Il nostro esemplare (fig. 7) s'avvicina come forma alla *Cypricardia beyrichi* Tornq. (bibl. 4) ma se ne stacca notevolmente per l'andamento molto sinuoso, invece di rettilineo, della costa che attraversa tutta la valva.





1. *Spirigera indistincta* Bey.
2. *Spirigera indistincta* Bey.
3. *Terebratula cassiana* Bittn.
4. *Terebratula cassiana* Bittn.
5. *Spirigera wissmanni* Muenst.
6. *Plicatula imago* Bittn.
7. Cfr. *Cypricardia beyrichi* Tornq.

varietà subtriangolare rigonfia  
 varietà pentagonale  
 varietà rotonda  
 varietà ellissoidale con strie di accrescimento

*N. B.* — Il segmento verticale posto accanto alle figure indica la grandezza reale del fossile.

### *Avicula* sp.

Un esemplare assomiglia ad *Avicula hallensis* Woehrm. ed un altro ad *Avicula caudata* Stopp.

### *Avicula* cfr. *sturi* Bittn.

Modello interno senza ornamentazioni.

cfr. *Posidonomya wengensis* Wissm. var. *alta* Frech.

La nostra forma assomiglia abbastanza bene a quella descritta dal Frech nel Muschelkalk del Bakony (bibl. 5, p. 16) pur essendo più alta ed a strie concentriche più rade.

Una forma cassiana analoga con strie concentriche più rade della *Posidonomya wengensis* è la *Posidonia abbatensis* Koken (bibl. 6, tav. VI, fig. 13), che però non possiede coste radiali.

Anche il Parona (bibl. 7, tav. VIII, fig. 9) descrisse una *Posidonomya* n. sp. parecchio alta, a guscio sottile ed ornato da pieghe concentriche subeguali alquanto irregolarmente spaziate.

Dato però che sia la parte posteriore che l'anteriore sono danneggiate, non è possibile stabilire sicuramente che non si tratti di una Lima.

*Pinna raibliana* Par.

Esemplare attribuibile alla *Pinna raibliana* Par. (bibl. 7). Secondo il v. Woehrmann (bibl. 8, p. 661) questa specie si identificherebbe con la *Pinna paronai* Tomm.

*Chlamys landrana* Bittn.

Vi si possono distinguere quattro ordini di coste radiali. Le coste sembrano in genere più sottili di quelle degli esemplari riprodotti dal Leonardi (bibl. 9, tav. IV, e p. 27).

CONCLUSIONE.

Eseguendo un raffronto fra la fauna cassiana elencata dal Bittner (bibl. 10) e la nostra osserviamo quanto segue. Delle specie più comuni noi possediamo la *Spirigera indistincta* Bey e la *Terebratula cassiana* Bittn. Non è presente la *Koninckina leonhardi* Wissm. Di quelle abbastanza frequenti abbiamo riscontrato la *Spirigera wissmanni* Muenst. Forme cassiane sono pure la *Terebratula sturi* Laube, la *Spirigera multicostata* Bittn., la *Rhynchonella pichleri* Bittn. ed il *Thecidium cymbula* Bittn. La *Rhynchonella dilatata* Suess è del Trias superiore, mentre la *Spirigera marmorea* Bittn. e la *Spirigera trigonella* Schloth. appartengono al Muschelkalk.

Colla fauna raibliana elencata dal v. Woehrmann (bibl. 8) le analogie sono molto minori; infatti solo la *Spirigera indistincta* Bey e la *Spirigera wissmanni* Muenst. sono presenti fra i nostri esemplari.

Come risulta dal confronto con le faune cassiane e raibliane elencate dal Leonardi (bibl. 9), dal Bittner (bibl. 11) e dal v. Woehrmann (bibl. 8), le nostre specie di lamellibranchi appartengono quasi tutte agli strati di San Cassiano, tranne poche eccezioni. La *Heminayas woehrmanni* Waagen appartiene alla fauna a *Pachycardia* di Siusi. (bibl. 12) e la *Cypriocardia beyrichi* Tornq., di cui però non possediamo che una forma affine, agli strati a *subnodosus* del vicentino (bibl. 4). La *Pinna raibliana* Par. appartiene al raibliano (bibl. 7).

L'*Arcestes bicarinatus* Muenst. appartiene alla fauna cassiana studiata dal Laube e non è compreso nell'elenco delle forme raibliane del v. Woehrmann.

Come risulta da quanto si è detto questa fauna appartiene quindi sicuramente agli strati di San Cassiano.

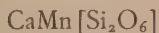
## BIBLIOGRAFIA.

1. P. LEONARDI, *Geologia dei monti di Zoldo e territori circostanti*. «Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova», vol. XIV, 1938.
2. G. LAUBE, *Die fauna der Schichten von St. Cassian*. «Denkschr. Akad. d. Wiss.», Wien, XXV, 1865.
3. S. SCALIA, *La fauna del Trias superiore del gruppo del Monte Judica*. Parte I. «Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania», serie V, vol. III, 1910.
4. A. TORNQUIST, *Die Subnodosus-Schichten*. «Zeitschr. d. D. Geol. Ges.», vol. L, Quad. 4, 1898.
5. F. FRECH, *Neue Zweischaler und Brachiopoden aus der Bakonyer Trias*. «Res. d. Wiss. Erf. d. Balatonsees», Pal. Anh. II, 2, 1905.
6. E. KOKEN, *Beiträge zur Kenntniss der Schichten von Heiligenkreuz*. «Abhandl. Geol. R. A.», vol. XVI, 4, 1913.
7. C. F. PARONA, *Studio monografico della fauna raibliana della Lombardia*. Pavia, 1889.
8. S. v. WOHRMANN, *Die Raibler Schichten nebst kritischer Zusammenstellung ihrer Fauna*. «Jahrb. d. KK. Geol. R. A.», vol. XLVIII, 1893.
9. P. LEONARDI, *La fauna cassiana di Cortina d'Ampezzo*. Parte I. *Introduzione geologica e lamellibranchi*. «Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova», vol. XV, 1943.
10. A. BITTNER, *Brachiopoden der alpinen Trias*. «Abhandl. d. KK. Geol. R. A.», Bd. XIV, 1890.
11. A. BITTNER, *Lamellibranchiaten der alpinen Trias*. «Abhandl. d. KK. R. A.», vol. XVIII, Quad. 1, Wien 1895.
12. L. WAAGEN, *Die Lamellibranchiaten der Pachycardientuffe der Seiser Alm*. «Abhandl. d. KK. Geol. R. A.», vol. XVIII, 1907.

**Mineralogia.** — *Chiarimenti sulla johannsenite del Campigliese.*

Nota di F. RODOLICO, presentata (\*) dal Corrisp. G. CAROBBÌ.

Nelle Memorie di questa Accademia il mio compianto maestro, prof. Piero Aloisi, pubblicava nel 1926 uno studio di notevole interesse sui pirosseni del Campigliese <sup>(1)</sup>. Questo lavoro è sfuggito allo Schaller, che nel 1938 individuava nell'ampia famiglia dei pirosseni (come tuttavia la si considerava in quel momento, comprendente cioè anche la bustamite e la rodonite) il termine manganesifero monoclino corrispondente al diopside ed alla hedembergite: la johannsenite, dalla composizione chimica corrispondente alla formula



e dalle seguenti proprietà ottiche: piano degli assi parallelo a  $b\{010\}$ ;  $2V \sim 70^\circ$ ;  $c:\gamma \sim 48^\circ$ ; segno della birifrazione positivo <sup>(2)</sup>. La nuova specie è stata quindi pienamente accolta nei trattati.

(\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) P. ALOISI, *Osservazioni sui pirosseni di Campiglia Marittima*. «Mem. Accad. Lincei», [6] 11, 1926. Tutti i passi riportati tra virgolette sono tratti da questo lavoro.

(2) W. T. SCHALLER, *Johannsenite, a new manganese pyroxene*. «Am. Mineral.», XXIII, 1938.

Lo Schaller attribuisce alla johannsenite anche un pirosseno del Campigliese, ma si vede costretto a indagarne in modo approssimativo la composizione chimica, disponendo solo di una vecchia analisi, eseguita nel 1868 dal von Rath. Effettivamente l'Aloisi aveva già distinto nelle masse pirossenico-ilvaistiche del Campigliese una hedembergite manganesifera verde scura passante a schefferite, una bustamite verdolino chiara ed una rodonite calcifera rosea; la ricchezza in manganese essendo una caratteristica di questo *skarn*, dove anche l'ilvaite contiene una eccezionale quantità dello stesso metallo<sup>(3)</sup>. Accostando le due ricerche, mi sono reso conto che la bustamite dell'Aloisi corrisponde alla johannsenite dello Schaller, la qual cosa toglie ogni possibile dubbio circa la presenza di questo pirosseno manganesifero nel Campigliese, e contribuisce nello stesso tempo alla migliore conoscenza della nuova specie.

Dopo avere discusso i dati ottici sulle bustamiti, « assai discordanti fra loro ed in parte anche mal confrontabili », l'Aloisi distingueva nettamente per il carattere positivo della birifrazione le bustamiti del Campigliese e del Vicentino - entrambe considerate poi johannseniti dallo Schaller - da quelle di Långban e di Franklin Furnace, otticamente negative. Oltre il segno positivo della birifrazione, pure l'angolo d'estinzione  $\epsilon: \gamma \sim 50^\circ$  si accorda con quello determinato dallo Schaller, anche se alquanto superiore.

Passando alle proprietà chimiche, riporto l'analisi dell'Aloisi (I) ed i valori ottenuti ricalcolando l'analisi stessa, fatta astrazione dell'acqua e dei sesquiossidi di ferro e di alluminio (II), analogamente a quanto giudica opportuno lo Schaller<sup>(4)</sup>:

	I	II
SiO <sub>2</sub>	49,28	49,69
MnO	27,60	27,83
MgO	0,72	0,73
FeO	1,25	1,26
CaO	20,32	20,49
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,82	—
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,19	—
H <sub>2</sub> O —	0,24	—
H <sub>2</sub> O +	0,28	—
	100,70	100,00

(3) Cfr. F. RODOLICO, *Ricerche sulle rocce eruttive recenti della Toscana*, Pisa-Firenze, 1931-1938, p. 39.

(4) Togliere nei calcoli questi costituenti mi sembra del tutto giustificato, almeno in prima approssimazione. Ho preferito invece tralasciare nella tabella comparativa una delle due analisi eseguite dallo stesso autore sulla johannsenite di Puebla nel Messico, avendo egli dedotto addirittura quanto compete al 18 % di rodonite.



Aggiungo una tabella corrispondente a quella che reca il numero 4 nella Memoria dello Schaller; essa permette di esaminare i rapporti molecolari di questa johannsenite del Campigliese (1), e di confrontare i risultati con quelli ottenuti dalle analisi dello stesso pirosseno di Schio nel Vicentino (2 e 3), di Puebla nel Messico (4), dell'Oregon nel New Mexico (5) e del New Jersey (6).

	1	2	3	4	5	6
SiO <sub>2</sub> . . . . .	2,04	2,07	2,07	1,98	2,11	2,00
(Mn, Mg, Fe, Zn)O . . . . .	1,06	1,04	1,11	1,03	0,99	1,05
CaO . . . . .	0,90	0,89	0,82	0,98	0,90	0,95

Dalla tabella si rileva una sensibile generale deficienza di calce rispetto alla formula, e perciò lo Schaller ritiene che gli esemplari analizzati contengano un po' di rodonite; verrebbe così abbassata la quantità di calce, che nella johannsenite pura è del 22,69 %. È verosimile che ciò possa essere avvenuto in qualche misura anche nel minerale toscano; difatti proprio nelle masse campigliesi i due pirosseni johannsenite e rodonite risultano « quasi sempre associati e non può escludersi un passaggio graduale tra di essi ». Inoltre riguardo alla johannsenite (la sua bustamite), l'Aloisi aveva notato che il minerale « cambia spesso di colore, e ciò avviene non solo da esemplare a esemplare, ma anche da punto a punto di uno stesso campione », asserendo altresì che « non è agevole stabilire se queste variazioni di colore dipendano da diversità originarie di composizione chimica o non piuttosto da veri stati d'alterazione ».

E siccome lo Schaller ha descritta una frequente alterazione di johannsenite in rodonite, sarebbe indubbiamente interessante esaminare sotto questo aspetto i campioni del Campigliese, tanto più che la rodonite di Campiglia mostra taluni peculiari caratteri ottici <sup>(5)</sup>. Mi propongo di eseguire io stesso questa ricerca, qualora mi sia possibile rintracciare il materiale necessario.

(5) P. ALOISI, op. cit.; ID., *Contributo allo studio dei pirosseni manganesiferi*. « Rend. Accad. Lincei » [6] V, 1927.

**Fisiologia vegetale.** — *Veleni antimitotici e potere di difesa dei tessuti*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di F. M. GEROLA, presentata dal Socio G. GOLÀ.

Da vari autori<sup>(1)</sup> è stata affermata la presenza nelle piante (sia da osservazioni in natura, sia da esperienze di laboratorio) di una immunità fisiologica acquisita. Sull'argomento tuttavia esistono tutt'ora ipotesi molto discordi.

In una Nota<sup>(2)</sup> precedente ho riferito su particolari casi di assuefazione verificatisi in piantine di frumento immerse in filtrati tossici di cultura di vari funghi, ove le radici dapprima bloccate nel loro allungamento e nelle mitosi, riprendevano in seguito a crescere in maniera normale. Di un altro caso di assuefazione ho fatto cenno in altra Nota<sup>(2)</sup>, in riguardo a piantine di frumento immerse nei pressati di talli di *Usnea* sp. e di *Evernia prunastri*.

Talli delle specie licheniche sopra menzionate venivano ripetutamente inumiditi per 24 ore, e quindi erano sottoposti a notevole pressione al torchio per ricavarne il succo cellulare. Nei liquidi così ottenuti o nelle loro diluizioni erano poste quindi delle piantine di frumento.

Non appena le radici siano poste in tali pressati, esse vengono bloccate nella loro crescita; dopo circa 48 ore di immersione però, alla base del coleoptile si formano delle nuove bozze radicali (da una a tre), dalle quali in seguito originano nuove radici, di spessore leggermente maggiore di quelle normali e crescenti regolarmente nel pressato stesso, mentre le radici originarie non manifestano più alcuna crescita (al microscopio i nuclei dell'apice sono in degenerazione più o meno avanzata).

Tale fatto è dovuto ad una scomparsa col tempo della tossicità dei pressati o ad una azione diretta degli individui intossicati capaci di neutralizzare l'azione tossica dei liquidi in cui sono immersi?

Allestii pertanto due lotti di esperienze: 1) con pressati di *Usnea* in cui erano subito poste, come di norma, delle piantine di frumento, 2) pressati uguali ma lasciati tal quali senza immergervi i frumenti. Dopo circa 72 ore, quando nel lotto 1) si svilupparono nuove radici dai frumenti, vennero poste nuove piantine sia in 1) che in 2). Queste crebbero regolarmente in 1), mentre quelle in 2) furono bloccate nella crescita radicale. Si può pertanto ritenere che la scomparsa dell'azione tossica dei filtrati sopranotata, sia dovuta ad una azione delle piantine e non a processi di ossidazione all'aria.

In altre esperienze:

a) furono poste in ugual numero piantine di frumento nei pressati tal quali, oppure nelle loro diluizioni da 1/2 ad 1/25;

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1947.

(1) K. S. CHESTER, « Boll. Sierot. Milanese », 1934.

(2) F. M. GEROLA, « Rendic. Acc. Naz. Lincei », 1947 (varie Note).

b) in recipienti contenenti uguale quantità di pressato furono poste piantine di frumento in numero variabile;

c) numero uguale di piantine di frumento furono immerse in quantità variabili di pressato.

Queste tre serie di esperienze diedero risultati perfettamente concordanti: l'emissione di nuove radici (indice della scomparsa della tossicità dei pressati) si verifica prima nel caso a) nei frumenti immersi nei pressati diluiti, nel caso b) in quelli in maggior numero nel medesimo recipiente e nel caso c) in quelli posti nei recipienti contenenti minor quantità di pressato. Si può pertanto ritenere, anche da queste esperienze, che per una azione diretta dei frumenti si verifichi la neutralizzazione delle sostanze tossiche dei pressati lichenici.

Allestii in seguito altre due serie di esperienze:

1° posi delle piantine di frumento che avevano neutralizzato il pressato tossico, in nuovo liquido fresco, per vedere se esse fossero immunizzate contro le sostanze tossiche dei liquidi;

2° allo stesso scopo posi nei liquidi stati «neutralizzati» delle piantine di frumento per 24 e 48 ore e le trasportai in seguito in pressati tossici.

Sia in un caso che nell'altro si verificò l'immediato arresto della crescita in lunghezza delle radici, in maniera perfettamente concordante ai controlli posti dall'acqua nei liquidi tossici.

Esaminaii infine se si avessero i medesimi risultati ponendo le piantine di frumento (nelle medesime condizioni di pretrattamento sopra descritte) nei pressati tossici diluiti. Posi pertanto nel medesimo pressato tossico di *Usnea* diluito: a) controlli cresciuti in acqua, b) piantine rimaste in liquido tossico, che era stato in precedenza «neutralizzato» da altri frumenti, c) piantine che avevano neutralizzato il pressato tossico.

In tutte tre le esperienze le radici dei frumenti furono immediatamente arrestate nella loro crescita in lunghezza (come si era verificato per i pressati non diluiti); in un lotto di esperienze c) ciò non si verificò affatto. Per questi frumenti, le radici che erano state emesse dopo 48 ore di permanenza nel primitivo pressato tossico, crebbero in lunghezza anche se poste nel nuovo pressato, tossico per i controlli; le radici primitive invece non si allungarono più, ma da esse spuntarono, fino in tutta prossimità dell'apice, numerosissime radici laterali, a rapido allungamento e a loro volta ramificanti ripetutamente. Tali radici si formarono numerose fino a circa 2 mm. dall'apice, esse si originarono cioè fino alla zona ove all'atto dell'immersione delle radici nei pressati tossici, non vi erano più nuclei in mitosi.

Questo caso particolare, che mi sembra meriti una particolare considerazione, si è verificato con pressati di *Usnea* aventi di per sé limitata tossicità, tale da esercitare, fin da principio, una scarsa azione sugli apici radicali.

La neutralizzazione attiva del pressato tossico da parte delle piantine immerse in esso, trova in parte riscontro con quanto ho messo in evidenza in altra Nota, sulla ripresa della crescita (dopo un primitivo arresto) delle radici di piantine di frumento poste in filtrati tossici di *Penicillium*. Ciò, mi

sembra venga a recare un maggior appoggio all'ipotesi che anche nei vegetali si abbiano processi immunitari attivi, portanti ad una vera assuefazione delle piantine a liquidi tossici.

L'azione tossica dei pressati lichenici (determinante, oltre all'arresto della crescita in lunghezza delle radici, anche l'inibizione del processo mitotico, ed, in seguito, la degenerazione dei nuclei apicali) è riferibile come già dissi agli acidi lichenici in essi contenuti (la reazione del mezzo infatti da acida - pH circa 5 - passava, in dipendenza della neutralizzazione operata dalle piantine, ad una lieve basicità - pH 7,5).

Recentemente Quispel<sup>(3)</sup> per vari licheni ha ritrovato acidi lichenici nel filtrato di culture pure dei due costituenti (alga e fungo) la simbiosi lichenica. Si può così ritenere che questi acidi lichenici abbiano una notevolissima importanza nei rapporti tra i due simbionti.

Ho ragione di ritenere che i fatti di assuefazione sopra riferiti, abbiano una parte non piccola nei rapporti di molte simbiosi così dette mutualistiche, nelle quali le alternative di prevalenza dell'uno o dell'altro simbiote possono essere legate non solo a fattori ecologici, ma anche a variazione dei rapporti di tossicità tra l'uno e l'altro simbiote.

**Patologia vegetale.** — *Una nuova specie di carbone del grano in simbiosi con le carie «Tilletia sp.» sul frumento<sup>(\*)</sup>.* Nota di V. GRASSO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. NEGRI.

Durante le osservazioni dei numerosi campioni di carie del frumento esaminati allo scopo di vedere quale fosse la distribuzione geografica delle *Tilletia* in Italia<sup>(1)</sup>, ho avuto occasione di notare, per la prima volta in alcune cariossidi di spighe della varietà Roma, provenienti dalla Rufina (Firenze), la presenza tra i clamidoconidi di *Tilletia sp.*, di alcuni corpiccioli più piccoli, sferici a parete finemente echinulata, che avevano tutto l'aspetto di altri clamidoconidi (Fig. A). Benchè non fossero molti, in qualche campione, rispetto a quelli della *Tilletia sp.*, avevano una proporzione 1:1000.

Il primo dubbio che ho avuto è stato che si trattasse di una impurità esterna alle cariossidi, poichè è frequente trovare sulla loro superficie germi di altri funghi trasportati dal vento. Per usare tutte le precauzioni, nell'esame di altre cariossidi, ho scelto quelle che erano completamente racchiuse dalle glumette, e dopo averle prelevate, e accertato che il tegumento fosse integro,

(3) A. QUISPÉL « Rec. trav. bot. néerl », XL, 1943-1945.

(\*) Lavoro eseguito nell'Osservatorio per le malattie delle piante (Sez. patologia vegetale) presso l'Istituto di Patologia vegetale dell'Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) V. GRASSO, *La distribuzione geografica delle specie di «Tilletia» del frumento esistenti in Italia* (in corso di stampa).



le ho pulite con ovatta e acqua sterile; e poichè nell'esame microscopico di molti campioni di carie e di carboni, non è infrequente che, anche con la più accurata pulizia, qualche clamidoconidio rimanga sui vetrini portacopri-oggetto o sui ferri usati per le manipolazioni, per queste osservazioni, ho usato vetrini e ferri completamente nuovi. Ciò nonostante, esaminando altre cariossidi del medesimo campione, ho continuato a notare la presenza dei suddetti clamidoconidi, il che mi convinceva che essi non fossero esterni al tegumento della cariosside, ma si trovassero nel suo interno, misti a quelli delle *Tilletia* sp. Da un esame più accurato, risultava che questi clamidiconidi erano di un colore bruno, spesso rossiccio, finemente echinulati, con un diametro di  $\mu$ . 6 o 7 e rassomigliavano in complesso a quelli echinulati dell'*Ustilago tritici*, agente patogeno del noto carbone del grano.

Per assicurarmi che la presenza di questi clamidoconidi non fosse casuale, ma costante, ho voluto tentare di riprodurre il fenomeno. Infatti nell'autunno scorso ho infettato con polvere di *Tilletia* sp. dello stesso campione della Rufina, e quindi contenente questi clamidoconidi, grano di varietà Roma che ho seminato in una parcella dell'Istituto Tecnico Agrario alle Cascine.

Durante lo sviluppo delle piantine, non ho notato nessun fatto importante; solo verso la maturazione del grano, ho constatato come una buona percentuale delle spighe fosse cariate e nessuna carbonata. In seguito, facendo con tutte le precauzioni anzidette, un'esame microscopico della polvere di alcune cariossidi di spighe cariate, ho riscontrato come tra i clamidoconidi delle *Tilletia* sp. fossero ricomparsi quelli più piccoli echinulati, notati nel campione della Rufina, e con una percentuale uguale o anche superiore alla precedente: 2-3 : 1000. Ciò dimostrava che tali clamidoconidi non erano casuali ma costanti.

Inoltre, per vedere se si trattasse di una *Tilletia* o di un'*Ustilago*, ho fatto germinare la polvere di alcune cariossidi di queste spighe in capsule Petri su agar-patate-destrosio. Dopo 14-18 ore, mentre nessun clamidocnidio di *Tilletia* era germinato, molti del supposto carbone avevano emesso un basidio bisettato portante 4-6 basidiospore laterali e una epicale in seguito gemmanti (Fig. C-B-E).

Il tipo di germinazione indicava che si trattava evidentemente di un'*Ustilago*. Tuttavia poichè contemporaneamente, come paragone, ho fatto sul medesimo substrato delle germinazioni di *U. tritici* di diverse provenienze, e ho osservato che queste germinano, come del resto è noto, sempre solo per micelio abbondantemente ramificato (Fig. B), devo concludere che il carbone in esame è differente dall'*U. tritici*.

Questa differenza era messa ancor più in rilievo dalle seguenti considerazioni.

Dall'esposizione fatta, avendo trovato sulla medesima pianta di grano, la contemporanea presenza di *Tilletia* sp. e di *Ustilago*, risultava trattarsi di una coesistenza dei due parassiti.

Una simbiosi di questo tipo non è nuova nel campo fitopatologico, perchè sono ben noti i classici esempi illustrati da Munerati <sup>(2-3)</sup>, da Hanna <sup>(4-5)</sup>, da Milan <sup>(6)</sup>.

Però questo caso differisce da quello descritto dai detti Autori per alcune caratteristiche, che d'altra parte mettono anche in evidenza che l'*Ustilago* da me osservata, è diversa da *U. tritici*. Le differenze più salienti tra questi due casi sono:

1° I campioni da me osservati presentano macroscopicamente solo la manifestazione delle carie (Fig. F) mentre quelli studiati da Munerati ecc., presentano la spiga in parte carbonata e in parte cariata, con netta prevalenza delle manifestazioni dell'*Ustilago* su quelle delle *Tilletia* (Fig. G).

2° Nei campioni da me esaminati questa coesistenza si osserva nella medesima cariosside, e nelle cariossidi di qualunque spighetta; in quelli di Munerati i due simbionti occupano una parte distinta della spiga; l'*Ustilago* quella più bassa e maggiore; le *Tilletia* quella più alta e minore.

3° La coesistenza di Munerati è stata osservata solo una volta in natura come fatto spontaneo negli S.U.A., mentre la maggior parte dei casi sono stati ottenuti artificialmente; la simbiosi da me descritta è stata osservata con molta frequenza in natura ed è stata anche una volta riprodotta.

4° Nella riproduzione artificiale della coesistenza studiata da Munerati ed altri, solo il 4-5-10 % delle spighe sono risultate infette nel modo su descritto; nella riproduzione da me effettuata nell'autunno scorso della simbiosi osservata ho avuto i seguenti risultati:

Spighe solamente carboniose. . . . .	—
Spighe solamente cariate . . . . .	—
Spighe cariate-carbonate come descritto da Munerati . . . . .	—
Spighe cariate carbonate come descritto da me . . . . .	260 = 48 %
Spighe sane . . . . .	280 = 52 %
<hr/>	
Totale spighe . . . . .	540

(2) O. MUNERATI, *Compétition entre « Ustilago tritici » et « Tilletia tritici » chez même plante de blé.* « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences », t. 192, p. 296, séance du 2 février 1931.

(3) O. MUNERATI, *Sulla possibilità di una coesistenza di funghi del carbone e della carie su una medesima pianta di grano.* « Italia Agricola », 70, pp. 631-635, 1933.

(4) W. F. HANNA, *Association of bunt of Wheat with loose smut and ergot.* « Phytopathology », 22, pp. 10-11, 1932.

(5) W. F. HANNA, *The Association of bunt of Wheat with loose smut and ergot.* « Phytopathology », 28, pp. 142-146, 1938.

(6) A. MILAN, *Intorno alla simultanea presenza dei parassiti « Tilletia tritici » (Bjerkh) Winter e « Ustilago tritici » (Pers.) Jens. su piante di frumento.* « Nuovo Giornale Botanico Italiano N. S. », vol. 43, N. 3, pp. 586-595, 1936.

5° Nei lavori di Munerati e degli altri Autori non è fatto cenno ad un modo di germinazione dell'*Ustilago tritici* simbionte, diverso da quello noto e quindi si deve ammettere che la germinazione sia per micelio; l'*Ustilago* da me studiata germina invece, come ho detto, sempre per basidi.

La simbiosi qui descritta è stata notata su almeno 9 razze di grani provenienti da molte località specialmente dell'Italia continentale.

Interessante è accennare alle specie di *Tilletia* con le quali l'*Ustilago* si trova in simbiosi. Indubbiamente la simbiosi più frequente è con *T. levis*; ma sicuramente accertata, seppure assai più rara, è quella con *T. triticoides*. È poi molto probabile che la simbiosi si realizzi anche con *T. tritici*, sebbene su questo punto non possa pronunciarmi in modo assoluto; non ho mai invece osservato coesistenza di *T. intermedia* con l'*Ustilago*.

Lo specchio che segue riassume le provenienze, la razza del grano e la specie di *Tilletia* simbionte di tutti quei casi nei quali ho potuto avere l'assoluta certezza del fenomeno in quanto fu osservato in cariossidi che mi giunsero ancora nelle spighe:

Alessandria	Razza Rieti fam. II	<i>T. levis</i>
Alessandria	» Roma	<i>T. levis</i>
Alessandria	» Libero	<i>T. levis</i>
Alessandria	» Mentana	<i>T. levis</i>
Parma	» Mentana	<i>T. levis</i>
Parma	» Mentana	<i>T. levis</i>
Parma	» Roma	<i>T. levis</i>
Ancona	» Mentana	<i>T. levis</i>
Macerata	» Autonòmo	<i>T. levis</i>
Lucca	» Virgilio	<i>T. levis</i>
Firenze	» Est	<i>T. triticoides e T. levis</i>
Firenze	» Roma	<i>T. levis</i>
Arezzo	» Roma	<i>T. levis</i>
Rieti	» Frassineto 405	<i>T. triticoides</i>
Rieti	» Virgilio	<i>T. levis</i>
Teramo	? Guazzone	<i>T. levis</i>
Salerno	Razza Roma	<i>T. levis</i>
Salerno	» Mentana	<i>T. levis</i>
Salerno	» Mentana	<i>T. levis</i>

Tuttavia la simbiosi fu osservata in molti altri casi di cariossidi ricevute già sgranate. Questa condizione, come ho detto, lascia qualche lieve dubbio sulla possibilità di inquinamento esterno; è per questo che questi reperti non sono stati inseriti nello specchio precedente. Poichè però il numero di queste osservazioni non è trascurabile nei riguardi della frequenza del fenomeno, ritengo utile riassumerle nella seguente tabella la quale poi acquista una particolare importanza pel fatto che comprende non pochi casi di simbiosi di *T. tritici* con l'*Ustilago*:

Sassari	Razza Cappelli	con <i>T. levis</i>
	» Cappelli	» <i>T. tritici</i>
Trapani	G. misti	» <i>T. tritici</i>
Enna	G. misti	» <i>T. tritici</i>
Brindisi	Razza Maiorca	» <i>T. tritici</i>
Foggia	» Cappelli	» <i>T. levis</i>
Foggia	» Conti 83	» <i>T. tritici</i> e <i>T. triticoides</i>
Salerno	» Roma	» <i>T. levis</i>
Salerno	» Mentana	» <i>T. levis</i>
Benevento	» Quaderna	» <i>T. levis</i>
Aquila	G. misti	» <i>T. levis</i>
Rieti	G. misti	» <i>T. levis</i>
Firenze	G. misti	» <i>T. levis</i>
Firenze	G. misti	» <i>T. levis</i>
Firenze	G. misti	» <i>T. levis</i>
Arezzo	G. misti	» <i>T. levis</i>
Arezzo	G. misti	» <i>T. triticoides</i> e <i>T. tritici</i>
Grosseto	G. misti	» <i>T. levis</i>
Ferrara	G. misti	» <i>T. levis</i>
Belluno	Razza Mentana	» <i>T. levis</i>
Verona	» Mentana	» <i>T. levis</i>
Parma	G. misti	» <i>T. levis</i>
Milano	G. misti	» <i>T. levis</i> e <i>T. triticoides</i>

Come risulta quindi la simbiosi di *Tilletia* con *Ustilago* è abbastanza frequente se si vogliono sommare i casi delle due tabelle.

Da quanto ho esposto fin'ora ritengo di poter affermare che l'*Ustilago* simbiote con le carie è diversa dalla già nota *U. tritici*. Seguendo il concetto del Tapke<sup>(7)</sup>, che ha basato la differenziazione dei due carboni dell'orzo (*U. nuda* e *U. nigra*) più che altro sul modo di germinazione, penso che si possa anche in questo caso considerare questa *Ustilago* come specie nuova, non solo per la costante germinazione per basidi, ma anche per le altre caratteristiche fisiologiche sopra esposte. Propongo quindi per la specie il binomio e la diagnosi seguente:

***Ustilago simbiotica* n. sp.**

*Soris* olivaceo-brunneis, vel brunneo-nigris, odore foetido donatis, semper epidermide tectis, mox pulverulentis; sporis singulis, globosis aut subglobosis, 5-7-8- $\mu$  diam. brunneis vel testanis, episporio brunneo fusco, subverruculoso vel punctulato.

*Hab.* in ovariiis tritici-vulgari cum *Tilletia* sp.

*Distr.* Sparsim in Italia.

(7) V. F. TAPKE, *Occurrence, identification, and species validity of the Barley Loose smuts*, « *Ustilago nuda* », « *U. nigra* », and « *U. Medians* ». « *Phytopathology* », vol. 33, pp. 194-208, 1943.





Fig. A. - Clamidoconidi di *U. simbiotica* Gr. tra clamidoconidi di *T. levis* (ingr. 850).

Fig. B - Germinazione di *U. tritici* (ingr. 600).

Fig. C.-D-E. - Germinazioni di *U. simbiotica* (ingr. 600).

Fig. F. - N. 1. Spighe sane; N. 2. Spighe cariate-carbonate (var. Roma).

Fig. G. - Spighe simultaneamente colpite da carie e da carbone (da Munerati).



**Biologia.** — *La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris » in rapporto allo stimolo\**. Nota di T. PERRI, presentata(\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

In questa Nota mi occupo brevemente dei casi di arti soprannumerari che ottenni in *Bufo vulgaris*; trattasi di esperienze in cui da embrioni ibridi non vitali (*Bufo viridis* ♀ × *Bufo vulgaris* ♂), oppure da embrioni trattati con dose letale di raggi X oppure (per controllo) da embrioni normali, trapiantavo abbozzi o complessi di abbozzi d'organi sull'addome di embrioni normali, allo stadio di bottone codale giovanissimo. I primi reperti li ottenni occasionalmente e poi seguitai con lo scopo ben determinato di meglio conoscere la natura dello stimolo in questione e, come dirò in seguito, di studiare anch'io il problema della simmetria speculare. Sto per ultimare un lavoro in esteso con la descrizione analitica dei risultati, e con una breve esposizione dei vari problemi che più direttamente vi si ricollegano; ad esso rinvio per maggiori particolari. Mi propongo anche di sperimentare con tessuti morti.

È ben nota l'esperienza del Balinsky<sup>(1)</sup> del 1925; trapiantando omoplasticamente la vescicola otica di un embrione di *Triton* sul fianco di un altro embrione, egli ottenne la formazione di un arto soprannumerario con scheletro cartilagineo. Da successive ricerche emerse che non trattasi di stimolo specifico; uguale risultato, anzi con maggiore frequenza, si ottiene infatti con il trapianto dell'abbozzo olfattorio (Glick; Choi; Balinsky, 1933); anche l'abbozzo dell'ipofisi, come dirò meglio tra poco, ha la stessa azione; invece, come riferisce il Balinsky (1937 a), non si ebbero risultati positivi con il trapianto del pronefro (Balinsky, Filatow) o con il trapianto della vescicola ottica (Detwiler, Detwiler e van Dicke), mentre non sicura è l'azione dell'encefalo (Detwiler).

Sono ricerche eseguite su Urodeli, ad eccezione di quelle del Filatow del 1933<sup>(2)</sup>. Questi, trapiantando in embrioni normali di *Bufo vulgaris* l'abbozzo dell'ipofisi, ebbe, in un sol caso, la determinazione di un paio di arti soprannumerari fusi alla base. Per il resto, sia Filatow che Balinsky (1927 a) ebbero negli Anuri risultati negativi, come esplicitamente dissero.

I casi di arti soprannumerari che ho finora ottenuti sono 15, di cui alcuni furono fissati piuttosto giovani; tra gli altri ne tenni in vita 7 fino alla meta-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « Battista Grassi » dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) Lavori di B. J. BALINSKY che ho tenuti presenti: « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 105, 1925; ivi, vol. 107, 1926; ivi, vol. 110, 1927, a) pp. 63-70, b) pp. 71-88; ivi, vol. 130, 1933; ivi, vol. 136, 1937, a) pp. 221-249, b) pp. 250-285.

(2) D. FILATOW, « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 127, 1933.

morfosi, con arti soprannumerari unici, o duplici (1 caso), o anche triplici (2 casi).

Ecco in quali condizioni sperimentali ebbi risultati positivi. Con trapianti di vescicola ottica, asportata con l'ectoderma soprastante e con parti vicine di encefalo, da embrioni trattati con dosi letali di raggi X<sup>(3)</sup>, ebbi risultati positivi in 4 casi. Il trapianto, com'era da attendersi per altre mie ricerche, andò in gran parte o del tutto riassorbito. Altri due casi con trapianto della stessa zona, però da embrioni ibridi non vitali (*B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂) li ottenni nel 1946<sup>(4)</sup>, anche qui del trapianto non rimasero tracce o furono minime.

Ho già ricordato che Detwiler e van Dicke non ebbero risultati positivi nei trapianti di vescicole ottiche. Aggiungo, per *Bufo vulgaris* e *Bufo viridis*, che neppure in questo Istituto se ne ottennero (Perri, 1936; Cotronei e Perri, 1941)<sup>(5)</sup>. La differenza più notevole è che il trapiantato, nelle esperienze con casi positivi, è di maggior volume; e inoltre (alla qual cosa, come dirò in seguito, attribuisco particolare importanza) va in tutto, o in gran parte, riassorbito.

Gli altri 9 casi provengono da trapianto della parte apicale della testa, comprendente la regione boccale, l'ipofisi, e parti vicine dell'encefalo e dell'abbozzo olfattorio. Il trapiantato proveniva da embrioni normali o da irradiati.

Tra i primi, pochi perchè per lo più morirono precocemente, ebbi un sol caso positivo: la bocca si sviluppò foggjata a tubo, addossata ad essa vi è un arto con scheletro cartilagineo già in parte differenziato.

Nei casi di trapianto da embrioni röntgen-irradiati, ebbi ben 8 casi positivi di notevole interesse e dei quali dovrò parlare più a lungo tra poco; qui faccio risaltare che il loro numero è notevole (in un lotto di casi ne ebbi 5 su 6), e che vi appartengono i 3 casi di arti plurimi.

Già dal Balinsky e da altri autori erasi notato che il trapianto agisce qui da stimolo aspecifico, veduta generalmente accettata. Questo stimolo deve evidentemente superare una certa soglia affinché l'adiacente piastra laterale entri in proliferazione ed in accordo con le sue proprietà, o essendo essa stessa un campo di arti (*Extremitätenseitengebiet* di Balinsky, 1933), o che (Weiss, pp. 366-8)<sup>(6)</sup> in questi casi da « campo » funzioni aspecificamente lo stimolo portato dal trapiantato, formi un arto soprannumerario.

(3) Tecnica d'irradiazione: tubo Müller-Metro; tensione di 40.000 volt; intensità di 3 milliamperè; nessun filtro; distanza embrioni-anticatodo di cm. 21,5; gli embrioni erano tenuti in una vaschetta di vetro con uno strato d'acqua comune alto mm. 4. Nei casi di cui al presente lavoro, l'irradiazione fu di 30 minuti primi, allo stadio di doccia neurale da poco saldata.

(4) T. PERRI, in questi « Rendiconti », vol. I, serie VIII, 1946. Sono ricerche in cui ebbi pure, in *Bufo viridis* e con uguale trapianto, la determinazione, in un caso su pochi, di una gemma d'arto accanto ai residui del trapiantato.

(5) T. PERRI, « Boll. di Zool. », vol. 7, 1936; G. COTRONEI e T. PERRI, *ivi*, vol. 12, 1941.

(6) P. WEISS, *Principles of development*. New York, 1939.



Balinsky (1933) attribuisce alla potenzialità metabolica, all'indice mitotico, dell'abbozzo olfattorio la sua alta capacità arto-formativa.

Per l'interpretazione dei casi positivi che ho ottenuto, debbo anzitutto far rilevare che sono, relativamente, in numero assai elevato specie se si pensa che in *Bufo vulgaris* se ne conosceva un solo caso, onde debbo dedurne che la capacità di stimolo, con cui mi son trovato a sperimentare, è stata notevole. In questi casi non si può parlare di alta attività mitotica, sia per lo stadio in cui ho sperimentato, sia perchè i raggi X hanno un'azione nettamente inibitoria delle mitosi, e (per le dosi da me usate) necrotica, onde il trapiantato dopo un certo tempo regredisce in volume e può anche scomparire del tutto. E i raggi X, com'è noto, abbassano anche il metabolismo, a giudicare dall'ossigeno consumato, come per gli embrioni di Anfibi (*Rana esculenta*) hanno visto Urbani e Urbani-Mistruzzi<sup>(7)</sup> in questo Istituto.

Nei miei casi, a determinare una notevole capacità di stimolo, credo che concorrano fondamentalmente due fattori già accennati. Uno di essi è il volume del trapiantato (tenendo conto anche della sua consistenza), notevolmente maggiore di quello usato da altri autori: ad un maggior volume, si può pensare, corrisponde una maggior quantità di stimolo. L'altro fattore è che il trapiantato va in gran parte distrutto; e questo, anche per la messa in libertà di sostanze, potrebbe avere grande importanza. Si osservi che i due fatti non sono in antitesi perchè il volume del trapiantato, nonostante questa regressione, rimane a lungo maggiore del volume di una vescicola ottica o di una otocisti. Questi due fattori, io credo, contribuiscono a costituire uno stimolo di notevole intensità e durata; e quindi, assai probabilmente, efficiente anche nel tempo in cui le condizioni sono più favorevoli all'induzione; onde una maggior probabilità di casi positivi. È particolarmente su queste direttive che continueranno le mie ricerche. Si noti, intanto, che dare importanza a detti fattori non è in alcun modo in contraddizione con le vedute del Balinsky: se mai viene rafforzato il concetto di aspecificità dello stimolo: l'importante è che si raggiunga una data intensità di stimolo, indipendentemente dai fattori che vi concorrono.

Per quanto riguarda la struttura di questi arti soprannumerari, ricordo che lo scheletro cartilagineo, pur nei casi tenuti in vita più a lungo per cui le capacità evolutive ebbero tempo sufficiente per estrinsecarsi, è generalmente più o meno atipico. Così ad esempio nello zeugopodio vi è spesso una cartilagine sola invece che due. L'autopodio spesso presenta riduzione numerica e fusione di pezzi cartilaginei; in un arto di una formazione multipla esso manca del tutto. In pochi casi si riconosce chiaramente se l'arto sia destro o sinistro, anteriore o posteriore. Le dimensioni di ciascun arto sono sempre nettamente inferiori al normale. Il cinto può mancare completamente; a volte invece si differenzia in maniera tipica e qui lascia riconoscere se sia destro o sinistro; è stato sempre (tranne un caso) dello stesso lato dell'arto libero, in accordo, anche per l'eccezione trovata, con ricerche di altri autori

(7) E. URBANI, e L. URBANI-MISTRUZZI, in questi «Rendiconti», vol. I, serie VIII, 1946.

(Swett)<sup>(8)</sup>. Nei muscoli si trovano riduzioni anche notevolissime, specie nelle parti più distali. È inoltre da notare che si può avere un diverso grado di differenziamento tra i vari arti di una stessa formazione multipla.

Nel caso di arti doppi, questi hanno costituito una coppia; nei due casi di arti triplici, due arti hanno costituito una coppia ed il terzo arto è anatomicamente separato in un caso, e nell'altro ha il cinto fuso con quello di un arto della coppia. Non posso per ora dire con sicurezza se i vari abbozzi soprannumerari siano sorti indipendentemente l'uno dall'altro; o se un abbozzo ne abbia a sua volta determinato un altro; è una questione che sarà approfondita con successive ricerche.

Gli arti soprannumerari sono anatomicamente indipendenti dallo scheletro del portatore, tranne due casi di arto anteriore duplice; dei quali non tengo conto, potendosi trattare sia di fusione tra abbozzo normale e soprannumerario, sia di sdoppiamento del normale per disturbo meccanico arrestato dal trapianto.

Non ho mai riscontrato movimenti attivi spontanei o provocati di questi arti, e neppure movimenti passivi articolari; ciò è in accordo con le osservazioni del Balinsky e con le ricerche di trapianti eterotopici di abbozzi di arti.

Debbo ora accennare a due questioni, una delle quali è se gli arti soprannumerari siano armonici con il lato del corpo; e qui preciso (poichè i termini armonia e disarmonia non hanno in tutti gli autori, e così nel Cotronei, lo stesso significato) che, seguendo l'Harrison<sup>(9)</sup>, un arto dicesi armonico o disarmonico se la sua lateralità, destra o sinistra, è o meno la stessa del lato del corpo su cui giace. L'altra questione è se nei miei casi si verifichino quelle leggi di specularità del Bateson (1894)<sup>(10)</sup> che acutamente analizzate da Przibram, P. Della Valle, Harrison ed altri, continuano a destare, come l'intero problema della specularità in natura, il più profondo interesse. Le leggi del Bateson dicono che gli arti soprannumerari giacciono su uno stesso piano e ciascuno è come l'immagine speculare del più vicino. Tratto insieme le due questioni perchè ritengo che nell'ambito di questi arti soprannumerari da stimoli abnormi abbiano la stessa genesi causale.

Ricordo che il Balinsky osservò nei suoi casi che gli arti anteriori erano disarmonici e i posteriori armonici; ma poi (1933) ebbe eccezioni; si riferì a differenze regionali.

Di arti posteriori ne ho due soli con chiara lateralità; in uno vi è a destra un arto anatomicamente sinistro, nell'altro a sinistra un arto destro: sono quindi disarmonici. Ho poi un sol caso di determinazione di un arto assai probabilmente anteriore, che è vicinissimo all'arto anteriore normale, ed è armonico con il lato del corpo.

Per le leggi del Bateson, debbo esaminare i tre casi di arti soprannumerari multipli.

(8) F. H. SWETT, « J. of exper. Zoöl. », vol. 44, 1926.

(9) R. G. HARRISON, « J. of exper. Zoöl. », vol. 32, 1921.

(10) V. particolarmente l'HARRISON, loc. cit.

Nel caso con due arti, costituenti una coppia di arti posteriori, si ha che i due autopodi, uno destro e l'altro sinistro, si guardano con la loro concavità, mostrando una netta simmetria speculare; mentre se considero tutto il loro scheletro, la simmetria è meno netta. In questo caso è inoltre da notare che l'arto destro è quello che inizia più vicino all'arto normale; di modo che gli arti si succedono in quest'ordine: arto (normale) sinistro → arto destro → arto sinistro.

Nel primo caso di arti triplici, si osserva nei due arti costituenti una coppia, pur essendo atipici specie negli autopodi, un discreto grado di simmetria speculare e giacciono su uno stesso piano; il terzo arto è più atipico (senza autopodio) e giace anch'esso, grosso modo, sullo stesso piano. L'atipicità di quest'ultimo può mascherare una relazione di specularità con l'arto più vicino della coppia.

Nell'altro caso di formazione triplice, si ha nella coppia un discreto grado di simmetria speculare e giacciono su uno stesso piano, benchè in un solo arto l'autopodio sia ben conformato e questo è un arto posteriore destro collegato con un cinto destro. Il terzo arto è ben conformato; è posteriore sinistro (il suo cinto è invece destro), e giace, grosso modo, nello stesso piano dei due precedenti. In questo caso gli arti si succedono in questo ordine: arto (normale) destro → arto sinistro → arto destro.

Adunque in questi casi le leggi del Bateson, specie se si tien presente che in queste particolari condizioni di sviluppo vi sono sempre cause perturbatrici, spaziali o d'altra natura, si sono fundamentalmente verificate.

Ho già detto poco sopra che considero l'armonicità di questi arti soprannumerari e le leggi del Bateson come strettamente collegate tra loro. È una ipotesi di lavoro che successive ricerche dovranno svolgere e serenamente valutare, tenendo anche presente il concetto di « campo ». Qui mi limito a notare che tutti i casi di arti posteriori che ho finora ottenuti si prestano ad essere riguardati da uno stesso punto di vista, e dire: se esiste un arto soprannumerario, esso è disarmonico e si ha la successione: arto (normale) destro (rispettivamente sinistro) → arto sinistro (risp. destro); se poi vi è un secondo arto soprannumerario, si ha la successione: arto normale destro (risp. sinistro) → arto sinistro (risp. destro) → arto destro (risp. sinistro).

#### CONCLUDENDO:

a) Si sono ottenuti numerosi casi di arti soprannumerari mediante trapianti, su embrioni normali, di zone cefaliche di embrioni trattati con dosi letali di raggi X, oppure di embrioni ibridi non vitali.

b) Per il determinismo della capacità e durata della stimolo efficiente si annette notevole importanza sia al volume del trapiantato sia alla sua successiva distruzione (dovuta alle particolari condizioni dei donatori) talora completa.

c) Nelle formazioni multiple si sono fundamentalmente verificate le leggi di simmetria speculare del Bateson.



**Biologia.** — *Un nuovo metodo per riconoscere la sostanza amiloide in sezioni a fresco di tessuti in degenerazione. Osservazioni microfluoroscopiche.* Nota (\*) di R. DE ROSA, presentata dal Socio U. PIERANTONI.

L'interesse dell'amiloide, argomento di studio per la natura chimica della sostanza e per la patogenesi delle lesioni degenerative, mi ha spinto ad eseguire osservazioni di preparati di organi in preda a detta degenerazione seguendo un nuovo, criterio di indagine.

È noto difatti che i metodi impiegati per il riconoscimento e la messa in evidenza della sostanza, si fondano essenzialmente su reazioni microchimiche eseguibili sia su materiale a fresco che fissato e ritenute specifiche dell'amiloide: la reazione iodica e quelle metacromatiche al violetto di metile, al violetto di genziana ed alla tionina.

D'altra parte la constatazione, per quanto mi risulta, nuova di un marcato effetto di fluorescenza delle zone degenerate, mi ha indotto a riprendere l'argomento eseguendo osservazioni con il microscopio di fluorescenza su materiale a fresco tagliato al congelatore.

Mi sono valso di pezzi prelevati all'autopsia di soggetti morti per malattie cachettizzanti, per la maggior parte di tubercolosi. Si tratta di organi che presentano le note alterazioni macroscopiche di volume e di aspetto al taglio e che, trattati con i noti metodi di colorazione, presentano le reazioni tintoriali caratteristiche. Dimostrative sono state le immagini che hanno messo in evidenza le alterazioni nei vari organi.

Ho quindi eseguito osservazioni a luce ultravioletta valendomi di un microscopio Zeiss con condensatore di quarzo e con sorgente di ultravioletto costituita da una lampada Osram a vapori di mercurio schermata per il passaggio delle sole radiazioni eccitatrici della fluorescenza.

Obbiettivi adoperati: il  $10 \times$  fl. ed il  $60 \times$  fl. Reichert per gli esami microfluoroscopici.

I preparati furono ricavati da pezzi fissati in formalina al 10 % per 48 ore; le sezioni al congelatore, dello spessore di  $15 \mu$ , furono montate su vetrini portaoggetti di uviol.

Le immagini mostrano diverso aspetto nei vari organi; le più caratteristiche, dimostrative sono state osservate nei preparati di fegato e di milza. È qui rilevabile la perfetta identità con le immagini ottenute nei preparati colorati e facilmente riconoscibile l'intensa fluorescenza azzurra, effetto che si rivela caratteristico dell'amiloide.

Eseguito infatti le osservazioni prima a luce ordinaria e poi a luce di Wood, si è potuto constatare che le zone fluorescenti sono le stesse che, dopo

(\*) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1947.



trattamento con la soluzione iodica, assumono la caratteristica colorazione rosso-bruno.

Gli elementi cellulari ad un attento esame a luce naturale, non sono disposti come nella normale struttura del tessuto epatico; si notano difatti qua e

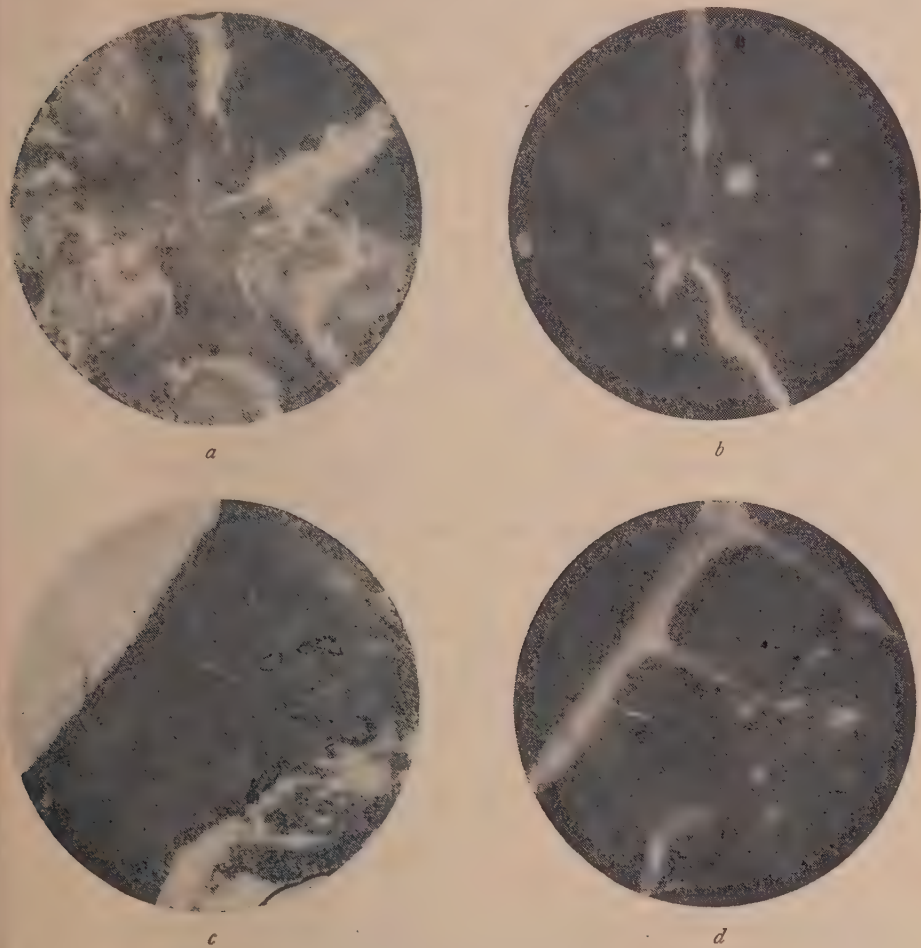


Fig. 1. - Sezioni di milza umana in degenerazione amiloide.

*a* e *c* a luce bianca; *b* e *d* a luce di Wood. Tagli al congelatore di  $15\mu$ ; fiss. in formolo al 10%;  $\times 45$ .

là delle zone ad elementi stipati e meno trasparenti, zone abbastanza ampie che mostrano intensi effetti di luminescenza a luce ultravioletta.

La fluorescenza ci permette di meglio distinguere le strutture in degenerazione che si presentano come una rete a maglie regolari disposta nel normale disegno lobulare.

Anche nella milza è possibile differenziare tratti più addensati a luce naturale; si notano zone infarcite di elementi irregolari, sia intorno ai corpu-

scoli del Malpighi che nel connettivo, che corrispondono a tratti fluorescenti intensamente in azzurro. La disposizione delle zone degenerate è diversa da quella del fegato; nella milza non si notano trame più o meno alterate, ma per lo più vere masse a volta isolate che spiccano in campo oscuro a luce ultravioletta (v. figura). Eseguendo la reazione iodica si ottiene sempre la caratteristica colorazione in rosso-bruno delle zone fluorescenti.

Le fotografie *a* e *c* mostrano sezioni a fresco di milza amiloide osservate a luce ordinaria. Le fotografie *b* e *d* mostrano le stesse sezioni alla luce di Wood. I tralci di sostanza addensata nel connettivo, difficilmente apprezzabili a luce bianca, si rendono per contro evidentissimi nell'esame a luce di Wood per il loro intenso potere emissivo di fluorescenza.

Eseguendo numerose osservazioni ho potuto notare immagini svariatissime che presentavano la caratteristica fluorescenza dell'amiloide a cui corrispondeva l'effetto della normale reazione iodica.

Nei preparati fissati in formalina per lungo tempo è sempre possibile riconoscere l'effetto luminoso dell'amiloide per quanto il tessuto circostante assuma, per il fissaggio molto prolungato, una debole fluorescenza verde-gialla sempre in ogni caso differenziabile da quella intensamente azzurra delle zone degenerate.

Si può concludere, pertanto, che la sostanza amiloide presenta caratteristica fluorescenza azzurra che permette di individuarla con sicurezza alla luce di Wood sia nei preparati a fresco che, con migliore definizione di immagini, in quelli fissati in formolo al 10 %.

All'interesse di ordine morfologico che può trovare utile applicazione nella pratica del reperto microscopico (il rilievo dell'amiloide, si tenga presente è con tale metodo rapidissimo in quanto è già sufficiente l'esame a fresco al microscopio di fluorescenza di un frammento del tessuto), si aggiunge la prospettiva di portare con l'indagine istospettrografica di fluorescenza, nuovi contributi al problema della natura chimica della sostanza amiloide. In tal senso è in corso una ricerca di cui verrà data prossimamente comunicazione.

**Biologia.** — *Ulteriori ricerche sull'influenza della tionina sullo sviluppo embrionale. - Esperienze su « Petromyzon fluviatilis »* (\*).  
Nota di M. L. CORTELLESA, presentata(\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Facendo seguito alle numerose ricerche fin qui svolte da vari Autori sui rapporti tra fenomeni ossidativi e metabolismo cellulare, ho studiato, in un precedente lavoro<sup>(1)</sup>, l'influenza della tionina (ossidante del gruppo delle tiazine) sullo sviluppo embrionale di tre specie di Anfibii: *Rana esculenta*,

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia generale dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) « Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. I, fasc. 12, p. 1352 (1946).

*Bufo vulgaris* e *Bufo viridis*. L'azione di questa sostanza era stata già più volte sperimentata su materiali diversi e con diversi risultati: Beltrami<sup>(2)</sup> ne aveva constatata la proprietà di stimolare la crescita di tessuti *in vitro*, Deotto<sup>(3)</sup> quella di favorire lo sviluppo delle uova di *Paracentrotus* e i fenomeni rigenerativi in alcune Idromeduse, mentre incerta è, secondo Piemonte<sup>(4)</sup>, la sua influenza sulla cancerogenesi chimica. Inoltre Chiurini<sup>(5)</sup>, facendo agire soluzioni di tionina su embrioni di *Bufo vulgaris*, *Bufo viridis* e *Axolotl*, non aveva ottenuto alcuna deviazione, nè in senso positivo nè in senso negativo, dal loro normale sviluppo.

Per i risultati del mio lavoro sopra accennato, e confrontando le condizioni sperimentali in cui esso si è svolto con quelle di Chiurini, potei trarre una serie di conclusioni che si possono così riassumere:

1° La tionina, nelle più forti concentrazioni, è generalmente sfavorevole o mortale per gli embrioni di *Rana esculenta*, *Bufo vulgaris*, *Bufo viridis*.

2° Le tre forme di Anfibi considerate mostrano una assai diversa sensibilità all'azione della tionina.

3° Grande importanza hanno le proprietà dell'acqua usata per preparare le soluzioni, in quanto che la tionina esplica, su ciascuna delle tre specie animali considerata a sè, un'azione diversa e più o meno spiccata a seconda dell'acqua in cui è disciolta. Ricordo in particolare i risultati ottenuti preparando le soluzioni con acqua Marcia: per la *Rana esculenta* e per il *Bufo viridis* sono mortali le concentrazioni tra 1 : 25000 e 1 : 100000; per il *Bufo vulgaris* quella 1 : 25000 e talvolta quella 1 : 50000. All'opposto, la concentrazione 1 : 500000 favorisce l'accrescimento in *Rana esculenta*.

Tali constatazioni portano a supporre, accanto alla tossicità del colorante in sè, una seconda azione maggiormente responsabile dei fenomeni riscontrati. Quale sia questa azione, e attraverso quale meccanismo si espliciti, è quanto mi sembra interessante studiare, anche per chiarirne i probabili legami con i fenomeni respiratori cellulari.

Pertanto, in una prima estensione delle mie ricerche, ho pensato che potesse essere estremamente interessante svolgere indagini con altre forme animali e tra queste soprattutto con i Petromizonti (*Petromyzon fluviatilis*): in essi infatti, a un insieme di somiglianze embriologiche con gli Anfibi (uova telolecitiche, ugual tipo di segmentazione e di gastrulazione, ecc.), non fanno riscontro altrettante uguaglianze nel campo metabolico (quantità di catalasi e di perossidasi, ossigeno assunto, anidride carbonica emessa, resistenza all'anaerobiosi, ecc.).

(2) « Tumori », anno 24, fasc. 3 (1938).

(3) « Pubblicazioni Staz. Zool. Napoli », vol. 17, fasc. 2, p. 206 (1939). « Boll. Soc. Ital. Biologia Sperimentale », vol. 14, fasc. 5 (1939).

(4) « Tumori », anno XXIV, fasc. 3 (1938).

(5) « Boll. Soc. Ital. Biologia Sperimentale », fasc. 9, vol. XVI; p. 529 (1941).

La tecnica seguita è la seguente: gli embrioni di *Petromyzon fluviatilis* sono stati posti in capsule Petri con soluzioni di tionina in acqua Marcia. Le concentrazioni usate complessivamente nelle quattro serie di esperienze eseguite, sono state: 1 : 20000 – 1 : 25000 – 1 : 50000 – 1 : 100000 – 1 : 400000 – 1 : 500000 – 1 : 1000000 – 1 : 1750000 – 1 : 2000000 – 1 : 4000000 – 1 : 5000000. I controlli erano in acqua Marcia. Le esperienze sono state eseguite a temperatura di 21°-26°.

Purtroppo non ho potuto avere a disposizione il materiale ai primi stadi di sviluppo, in quanto che i più giovani stadi da me usati erano caratterizzati da un già pronunciato sollevamento della parte anteriore sulla massa vitellina ventrale. Pertanto – essendo state le presenti esperienze svolte da un punto di vista comparativo con quelle eseguite sugli Anfibi – ho condotto altre indagini parallele su *Rana esculenta* adoperando stadi paragonabili a quelli usati su *Petromyzon*.

La tionina si è dimostrata rapidamente mortale per il *Petromyzon fluviatilis* nelle concentrazioni da 1 : 20000 a 1 : 2000000, mentre in quelle 1 : 4000000 e 1 : 5000000 gli esemplari in esperimento vivono per un tempo maggiore, pur andando infine in disfacimento. I controlli eseguiti con *Rana esculenta* in stadi paragonabili hanno dimostrato per questa specie, come nel mio primo lavoro, l'effetto mortale delle soluzioni di tionina soltanto nelle concentrazioni da 1 : 25000 a 1 : 200000.

Avevo già accennato nel mio lavoro precedente alla possibilità di porre in relazione la maggiore o minore azione letale della tionina rispettivamente con una minore o maggiore resistenza delle varie specie di fronte a un non sufficiente apporto di ossigeno: i risultati ottenuti in *Petromyzon* (che è tra le specie considerate la meno resistente all'anaerobiosi) danno proprio una bella conferma a questo modo di vedere.

È chiaro che sulla base di questi risultati si rende necessario estendere le ricerche ad altri materiali, per poter meglio stabilire i rapporti tra azione della tionina e metabolismo respiratorio dell'embrione. È bene tuttavia rilevare che il comportamento del *Petromyzon*, da me posto in evidenza nel presente lavoro, costituisce un nuovo elemento che differenzia questa forma dagli Anfibi considerati: tale comportamento non può non essere legato sia all'assoluta impossibilità di vita in ambiente privo di ossigeno, sia al particolare biochimismo posto in luce da esperienze recentissime di Pitotti <sup>(6)</sup>.

(6) In questi « Rendiconti » (in corso di presentazione).



**Biologia.** — *Sulla precoce localizzazione degli abbozzi del sangue in «Petromyzon fluviatilis» e «Petromyzon planeri» studiata col metodo delle perossidasi*<sup>(\*)</sup>. Nota di M. CASTIGLI-PITOTTI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

L'uso della reazione delle perossidasi per mettere in evidenza le isole del sangue, è stato molto proficuamente introdotto in biologia da Slonimski<sup>(1)</sup>. Il metodo è assai vantaggioso, in quanto permette di stabilire con certezza e con facilità le zone dove si inizia la formazione degli elementi del sangue perchè in esse si ottiene, in presenza di acqua ossigenata e in ambiente acido, una intensa colorazione blu. Questa colorazione è dovuta al fatto che nelle zone predette assai precocemente vengono a sintetizzarsi sostanze capaci (nelle condizioni predette) di provocare la trasformazione della benzidina in una sostanza di color blu caratteristico. Con questo metodo si può inoltre seguire la evoluzione morfologica delle isole del sangue durante lo sviluppo dell'embrione.

Slonimski applicò la reazione allo studio della origine e della formazione del sangue negli Anfibi e negli Uccelli; in seguito essa è stata usata allo stesso scopo da Spirito<sup>(2)</sup> nei Ciclostomi, Pesci, Anfibi, Uccelli e Artropodi e da Storti<sup>(3)</sup> negli Uccelli e nei Mammiferi.

Questi Autori hanno potuto stabilire così una topografia degli abbozzi del sangue e le relazioni esistenti tra sangue e sistema circolatorio. Spirito inoltre è riuscito a stabilire (ciò che non era stato visto dagli altri autori citati) che in un primo tempo nelle isole sanguigne la reazione blu non si forma per la presenza di emoglobina, ma per la esistenza di vere perossidasi, le quali si originano nelle isole prima del pigmento emoglobinico.

Nelle sue ricerche Spirito ha usato la benzidina in soluzione alcoolica, invece di quella in soluzione acquosa (metodo di Wu), usata dagli Autori precedenti.

Egli ha inoltre esteso le ricerche a più forme animali, onde trarre vantaggio anche dall'analisi comparativa nella precisazione del valore da attribuire alle zone e alle sostanze in esame. E soprattutto questa estensione si rendeva interessante nei Ciclostomi, là dove le somiglianze con gli Anfibi (ugual tipo di uova teleocitiche, somiglianza di segmentazione, ecc.) pote-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia generale dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) P. SLONIMSKI, «C. R. Soc. Biol.», vol. 96, p. 1496, 1927; *ibid.*, p. 1498.

(2) A. SPIRITO, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», vol. 9, p. 901, 1934 *a*; «Arch. Sc. Biol.», vol. 20, p. 442, 1934 *b*; Atti Soc. It. Anat. in «Mon. Zool. It.», vol. 45, p. 322, 1935 *a*; «Arch. Zool. It.», vol. 22, p. 223, 1935 *b*; «Riv. Biol.», vol. 19, p. 437, 1935 *c*; «Atti VI Congr. Mond. Pollicultura», Berlin-Leipzig, vol. 2, p. 83, 1936; «La Ricerca Sc.», serie II, vol. 1, p. 3, 1938.

(3) E. STORTI, «Arch. Zool. It.», vol. 21, p. 242, 1935.

vano far prevedere una uguaglianza o quasi nel comportamento delle predette isole.

Spirito, per altro, non aveva potuto risolvere il problema in quanto il metodo della benzidina alcoolica da lui usato per lo studio della localizzazione delle isole del sangue negli Anfibi e negli Uccelli, non dava risultati nei Ciclostomi. Infatti in *Petromyzon* la massa vitellina è ricchissima di sostanze che con la benzidina alcoolica danno una reazione blu molto intensa, che non permette di vedere quale parte di essa è dovuta alle perossidasi delle isole sanguigne (Spirito 1935 c).

Alcuni anni or sono <sup>(4)</sup> io riprendevo lo studio della localizzazione delle perossidasi in *Petromyzon*, valendomi del metodo della benzidina di Loele (benzidina in soluzione acquosa acidificata con acido acetico), differente da quello usato da Spirito. Reputai però opportuno applicare ai vari stadi di sviluppo del *Petromyzon fluviatilis* entrambi i metodi, onde poter precisare le eventuali differenze ottenute nei risultati. Rimando per quel che riguarda la comparazione suddetta, al lavoro citato. Qui richiamo unicamente questa constatazione, cioè che mentre con la benzidina alcoolica, al primo sollevarsi della zona cefalica sul vitello, tutto l'embrione dà una reazione fortemente positiva, a partire da questo momento, con la benzidina acquosa, la reazione scompare dal vitello, mentre si effettua nel resto dell'embrione. Già in quel lavoro feci notare che in stadi successivi si poteva rilevare sul vitello rimasto incolore, la reazione blu data dalle isole del sangue.

Non starò qui a ripetere le esperienze fatte allora allo scopo di indagare la natura di un siffatto comportamento della reazione con i due metodi, soprattutto in relazione alla possibilità di rendere la reazione della benzidina acquosa uguale a quella della benzidina alcoolica. Tali esperienze furono fatte trattando il materiale in esame con svariati agenti chimici e fisici. Esse sono state da me riprese e formarono l'oggetto di un lavoro a parte.

Ai fini del presente lavoro, nel quale si è utilizzata la mancanza di reazione nella massa vitellina ventrale con il metodo di Loele, per poter rilevare quella dovuta, alle perossidasi prima, all'emoglobina degli elementi del sangue poi, riferirò soltanto sulla topografia degli abbozzi di quest'ultimo in *Petromyzon planeri* e *Petromyzon fluviatilis*. La descrizione seguente si riferisce alla prima delle due specie in questione: la disposizione degli stessi abbozzi nell'altra specie è pressochè identica.

Fig. 1. — Negli stadi anteriori a quello disegnato nella fig. 1, sullo sfondo bianco della massa ventrale del vitello di riserva, non si nota con la reazione alla benzidina acquosa, la più piccola traccia di colorazione blu. Occorre giungere in tutti i casi allo stadio di cui alla figura predetta, per notare il primo apparire della reazione blu della benzidina nella parte ventrale dell'embrione. Tale colorazione è localizzata precisamente in vici-

(4) M. PITOTTI, «R. Acc. It.», Rend. Sc. Fis. e Nat., serie VII, vol. 3, p. 154, 1941.

nanza della linea di inserzione della parte anteriore dell'embrione sulla riserva vitellina ventrale. Si tratta di piccole macchioline sparse, che possono però essere facilmente considerate in due raggruppamenti ai lati del piano di simmetria bilaterale dell'embrione.



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.

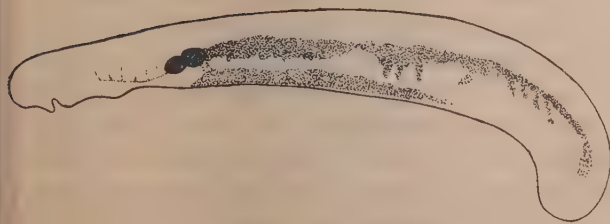


Fig. 6.

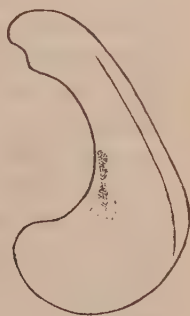


Fig. 7.

Fig. 2. - In questo stadio ci si può render conto di quanto si è detto più sopra, poichè la reazione blu con la benzidina si rileva nettissima in forma di due macchie omogenee simmetriche di forma allungata, situate nella stessa posizione indicata per le piccole macchioline di cui allo stadio precedente.

Fig. 3. - Con il progredire dello sviluppo, portante ad un allungamento e ad uno snellirsi dell'embrione, la reazione blu con la benzidina viene a

trovarsi su di una parte di esso più affusolata che non negli stadi precedenti. Questi cambiamenti di forma dell'embrione e l'estendersi delle isole fanno sì che le zone che danno la reazione blu della benzidina, prima nettamente separate l'una dall'altra, confluiscono ora nella linea mediana formando nell'insieme una V rovesciata.

Fig. 4. — La reazione è fondamentalmente simile a quella della figura precedente salvo l'estendersi di essa in direzione caudale. Un fatto interessante che si presenta per la prima volta è il comparire della reazione anche in due finissime strie che si trovano ai lati dell'embrione nella zona di passaggio tra la parte ventrale ricca del vitello di riserva e la parte dorsale.

Figg. 5 e 6. — L'allungamento delle isole si accentua ancora di più negli stadi ulteriori dello sviluppo, rappresentati da queste due figure. Nella ultima di esse è dato definire con grande precisione l'abbozzo del primo sistema vasale, costituito dall'aorta dorsale, dal vaso ventrale e dal cuore. In questa prima rete vasale è dato di ravvisare, sempre come effetto della reazione, l'abbozzo dei vasi intestinali, renali e branchiali: si tratta degli elementi del sangue che dalle isole sono passati nei distretti vasali.

Fig. 7. — La descrizione precedente può ripetersi, come ho già detto, per il *Petromyzon fluviatilis*, del quale riporto questa unica figura, nella quale si può rilevare la perfetta somiglianza con quanto si è visto in *Petromyzon planeri* nella figura 2.

La descrizione che precede ha rivelato chiaramente strette analogie di comportamento per quel che riguarda il sorgere di particolari sostanze con funzioni perossidasiche nei primi stadi di sviluppo degli Anfibi e Petromizonti, in zone che rappresentano gli abbozzi del sangue (vedi Spirito, 1934-1935). Le piccole differenze rilevabili tra la mia figura 1 del *Petromyzon planeri* e le figure riportate da Spirito per *Rana esculenta* e per *Rana agilis*, e da Slonimski (1927) per *Axolotl*, possono essere facilmente spiegate: penso di poter prospettare a questo proposito l'idea che in *Petromyzon* l'isola si presenti in forma di piccole e sparse macchioline blu, mentre in *Rana agilis* e *Rana esculenta* si presenta in forma di una zona omogenea, soltanto perchè in *Petromyzon* l'ectoderma molto sottile e la bianchezza del vitello sottostante permettono la visibilità della reazione in uno stadio più precoce che in *Rana*. In uno stadio successivo, infatti, anche in *Petromyzon* l'isola si presenta come una macchia omogenea ben delimitabile.

Un altro punto da considerare è quello della rivelabilità della reazione della benzidina nell'ambito delle regioni vasali, soltanto a partite dallo stadio disegnato nella fig. 4, mentre il cuore è già in contrazione a partire dallo stadio della fig. 2. Il fatto non deve meravigliare, chè anzi la giustezza dell'osservazione eseguita con l'analisi microchimica, corrisponde esattamente a quanto è stato visto in *Petromyzon fluviatilis* da un punto di vista mor-



fologico. Un lavoro di Ara <sup>(5)</sup> ci dice infatti che, negli stadi paragonabili a quelli disegnati da me nelle figg. 2 e 3, il cuore ha già iniziato le sue contrazioni, ma esso nel suo interno è completamente sprovvisto di elementi cellulari circolanti. Solo a partire da uno stadio paragonabile all'incirca allo stadio 4-5 nell'interno del cuore si notano gli elementi circolanti, fatto che ci permette di renderci conto della reazione positiva della benzidina al di fuori degli abbozzi del sangue in quanto dovuta agli elementi sanguigni spostatisi dalle isole nell'ambito dei primi vasi.

L'aver trovato in *Petromyzon* la localizzazione degli abbozzi del sangue con il metodo della benzidina, non esaurisce l'argomento, perchè occorre ricordare che la reazione stessa si ottiene con tutte quelle sostanze che agiscono come perossidasi, che sono cioè capaci di dare con la benzidina una colorazione blu in presenza di perossidi in ambiente acido. Tale reazione è dovuta fra l'altro alla emoglobina. Alcuni degli Autori da me citati, come ho già detto, hanno appunto fatto uso della benzidina per la ricerca della localizzazione delle isole del sangue in quanto una reazione positiva ottenuta con essa starebbe a dimostrare la presenza della emoglobina negli elementi della serie rossa. Questa conclusione, come ha prospettato Spirito, è stata fatta erroneamente. Infatti questo Autore ha dimostrato chiaramente che in *Rana esculenta* e *Gallus domesticus* c'è un periodo in cui le predette isole si possono mettere in evidenza col metodo della benzidina, senza che per altro si sia in esse ancora operata la formazione dell'emoglobina. Questa ultima sorge soltanto più tardi, in quegli elementi ove prima la solita reazione era da imputarsi esclusivamente alla presenza di vere perossidasi. Sarebbe stato molto interessante conoscere anche in *Petromyzon* il momento preciso in cui si effettua la prima sintesi della emoglobina, ma in questa specie (almeno con i mezzi oggi a nostra disposizione) non è stato possibile ottenere alcun risultato, date le peculiari qualità del vitello della riserva ventrale da me descritte in altro lavoro, in corso di stampa, cui rimando il lettore. Accennerò soltanto che usando il metodo della trasformazione della emoglobina in emocromogeno, rivelabile in quantità infinitesime con l'aiuto del microspettroscopio, in *Petromyzon* non si ottiene alcun risultato, dato che tutta la massa del vitello contiene sostanze che con i reattivi usati danno lo spettro dell'emocromogeno con tale intensità da impedire la percezione di quello eventualmente dovuto alla presenza della emoglobina nelle isole del sangue.

Si è detto che la possibilità di rivelare col metodo microchimico della benzidina la localizzazione delle isole del sangue si è avuta soltanto con l'uso del metodo di Loele, e non con quello di Spirito. Con quest'ultimo infatti tutta la massa vitellina ventrale dà una reazione intensa delle perossidasi, mentre col primo essa, in questa zona, è limitata alle isole del sangue.

(5) L. ARA, « Boll. di Zool. », vol. 8, p. 17, 1937.

Gli studi da me svolti a questo proposito e che saranno riferiti in altro lavoro, permettono di renderci conto delle ragioni della reazione positiva delle perossidasi con il metodo di Spirito, in quanto dovuta a sostanze che si sa posseggono analoga azione. Ciò che è importante nelle presenti ricerche è il fatto che l'impiego della benzidina con differenti modalità ha permesso la delimitazione di parti che contengono sostanze a diverso comportamento. Che poi questo diverso comportamento sia dovuto alla presenza di sostanze diverse, o a diverse condizioni fisico-chimiche della stessa sostanza, o a un insieme di condizioni che rendono le varie parti studiate più o meno suscettibili di dare la reazione della benzidina, sono questioni il cui studio è stato da me iniziato e sarà continuato in seguito.

Al termine delle presenti ricerche è appena necessario che io faccia rilevare come i reperti ottenuti possano essere utilizzati ai fini dello studio sperimentale di tutti quei problemi che si riferiscono agli abbozzi del sangue, alla circolazione embrionale e a tutte le altre questioni che ad essa si collegano, come è già stato iniziato negli Anfibi (Friggeri) <sup>(6)</sup> nei riguardi delle interrelazioni tra abbozzi del sangue, circolazione e catalasi. Infatti i reperti ottenuti permettono l'asportazione dei primi abbozzi delle isole sanguigne e lo studio delle conseguenze che da essa derivano. Queste ricerche si possono prevedere molto interessanti in *Petromyzon*, dove alcune peculiari proprietà messe in evidenza in lavori miei e dell'Istituto, permettono di considerare tale forma come avente caratteri profondamente diversi da quelli degli Anfibi.

**RIASSUMENDO:** Nel presente lavoro col metodo della benzidina è stato studiato il primo abbozzarsi delle isole del sangue in *Petromyzon pleneri* e *P. fluviatilis*.

Il primo abbozzo delle isole sanguigne è pari ed è rivelabile in forma di due piccole zone poste nella regione ventrale dell'embrione. Successivamente l'abbozzo diviene unico estendendosi sempre più caudalmente.

Confrontando i risultati ottenuti dagli altri Autori negli Anfibi, si nota, da questo punto di vista, un significativo parallelismo di comportamento.

(6) A. FRIGGERI, «Arch. di Scienze Biol.», vol. 26, p. 1, 1940.

**Biologia.** — *Problemi di tecnica e di citologia ipofisaria. Nuovi metodi di colorazione differenziale per le cellule della preipofisi* (\*).

Nota di M. GALGANO, presentata (\*\*) dal Corrisp. N. BECCARI.

L'Azan di Heidenhain (1915) e il Cresazan di Romeis (1940) sono i migliori metodi che si conoscono per colorare differenzialmente i vari tipi di cellule ipofisarie. D'altra parte tali metodi riescono bene solo con pochi fissativi; inoltre la loro esecuzione è assai lunga e complicata.

Io ho fatto molti tentativi, infine coronati dal successo, per trovare due metodi di colorazione (1), che dessero risultati all'incirca altrettanto buoni di quelli dell'Azan e del Cresazan, ma che al tempo stesso fossero meno lunghi e meno complicati e riuscissero bene con un maggior numero di fissativi.

**MATERIALI E FISSATIVI.** — A quest'ultimo proposito tengo a far subito rilevare che ambedue i nuovi metodi hanno dato ottimi risultati su ipofisi (2) umane, di bove e di Anfibi (3), con tutti i fissativi che ho provato: formalina neutra al 10 % in soluzione fisiologica (però dà una fissazione pessima negli Anfibi); Susa; Stieve; Maximow (soluzione madre di Zenker, cc. 100; formalina neutra cc. 10); Bouin-Hollandè, e Sanfelice. Il sublimato deve essere eliminato appena possibile dai pezzi secondo la tecnica usuale.

Col primo metodo si è colorata discretamente bene anche la neurocheratina in encefali di Anfibi e in nervi spinali di coniglio fissati in Stieve e nell'orecchio interno di gatto (ganglio spirale del Corti e nn. acustico e faciale) fissato in Susa è decalcificato con acido tricloroacetico; cattivo esito hanno dato encefali di Anfibi fissati in Sanfelice.

**INCLUSIONE E AFFETTATURA.** — La doppia inclusione in celloidina-paraffina è il metodo che dà migliori risultati; è anzi indispensabile per il materiale di Anfibi fissato in Susa e in Stieve. La paraffina (si usi quella fusibile a 58°-60°) può esser migliorata con l'aggiunta del 2 % di ceresina (4).

(\*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze. I risultati principali sono stati comunicati al IX Convegno della Soc. Ital. di Anatomia, tenuto a Bologna nell'ottobre del 1947.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) Ho usato colori della Casa Grübler e prodotti chimici per analisi.

(2) Colgo l'occasione per ringraziare vivamente il dott. PIERO NOCENTINI e il sig. VASCO GIUNTINI, per avermi tanto cortesemente fornito una parte del materiale di studio.

(3) Per evitare, nelle piccole ipofisi degli Anfibi, la sovralfissazione degli strati superficiali prodotta dal Susa e dallo Stieve, ho usato l'accorgimento di rivestire il pezzo con uno straterello di albume d'uovo, prima d'immergerlo nel fissativo. All'occorrenza si può togliere l'albume quando il pezzo si trova nell'alcool a 75°.

(4) La ceresina fonde a circa 70°, e perciò si presenta in fiocchi nella paraffina fusa nella stufa a 58°-60°. Ma è sufficiente riscaldare una sola volta sopra i 70°, per ottenere che la miscela resti limpida per una diecina d'ore nella stufa. I vantaggi offerti dalla ceresina (maggior compattezza e durezza del blocco d'inclusione; assenza di bolle) compensano il piccolo disturbo.

Le sezioni non debbono superare lo spessore di  $5\ \mu$  ed è preferibile che siano montate sui vetrini coprioggetto.

**DIFFERENZIAZIONE DELLA FUCSINA ACIDA E CLASSIFICAZIONE DELLE CELLULE ACIDOFILE DELL'IPOFISI.** - Per le mie ricerche mi sono servito come base della tricromica di Mallory (1900, 1903 e 1905) per il connettivo. Maxwell (1938) e Ignesti (1943) hanno il merito di avere assai migliorato il metodo originale; tuttavia con le loro modificazioni riesce molto difficile, a meno che non si possegga un'abilità tecnica notevole, d'ottenere risultati uniformi, per l'estrema rapidità con cui avviene la differenziazione della fucsina acida.

Io ho trovato una maniera molto semplice per superare tale difficoltà. Ho infatti notato che con i fissativi da me impiegati l'acido fosfomolibdico esercita un'azione quasi esclusivamente fissatrice sulla fucsina acida<sup>(5)</sup>. Basta perciò sovraccolorare le sezioni con la fucsina e poi sottoporle all'azione di tale acido, per ottenere che la differenziazione in acqua di fonte avvenga con lentezza, in circa 5'-10'. Il controllo al microscopio può essere fatto agevolmente, ogni volta che si desidera, arrestando la differenziazione in  $H_2O$  con l'1 % di acido acetico.

Ma fino a qual punto doveva essere spinta la differenziazione della fucsina acida? Il problema, a quanto mi consta da nessuno finora sollevato, era assai difficile a risolvere, perchè implicava anche una questione di nomenclatura.

Romeis (1940) distingue, nei preparati d'ipofisi umana colorati con l'Azan, le cellule  $\alpha$ , che si colorano in rosso con l'azocarminio, e le cellule  $\epsilon$ , che si colorano in giallo con l'orange. Ma già Dawson e Friedgood (1938) avevano distinto due classi di acidofile (azocarminofile e orangiofile) nell'ipofisi di coniglio e di gatto. Vari altri autori ritengono pure che esistano tali due tipi di cellule acidofile, a diversa affinità tintoriale, anche in altre specie.

Secondo le mie ricerche, eseguite soprattutto con la fucsina acida, la presenza in quantità maggiore o minore o la mancanza di cellule colorate in giallo dall'orange dipendono dalla differenziazione più o meno spinta della fucsina nel mio metodo e dell'azocarminio nell'Azan<sup>(6)</sup>. Con una differenzia-

(5) Solo dopo decalcificazione con acido tricloroacetico (orecchio interno di gatto) ho constatato che la fucsina si differenzia quasi completamente nell'acido fosfomolibdico.

(6) Come osserva per l'Azan, in *Triturus viridescens*, anche COPELAND (1943), che però non ammette termini di passaggio fra orangiofile e azocarminofile. Stadi intermedi fra i due tipi sono stati invece osservati con l'Azan, in *Thamnophis sirtalis*, da HARTMANN (1944).

La cromizzazione delle fette, come è stata praticata da DAWSON e FRIEDGOOD e da altri, non modifica, a quanto mi consta, l'affinità tintoriale delle cellule ipofisarie. Invece la fissazione in Sanfelice, contenente acido cromo, determina una maggiore affinità verso l'orange. Ho notato inoltre che le cellule acidofile degli strati più superficiali, sovralfissate con liquidi contenenti sublimato (per esempio lo Stieve), riescono più facilmente colorate in giallo che in rosso. Orbene, DAWSON e FRIEDGOOD, COPELAND e HARTMANN hanno fissato di regola in



zione spinta a sufficienza, le cellule acidofile — almeno nelle ipofisi di uomo e di bove, che ho più studiate — presentano tutta una gamma di passaggi da quelle d'un rosso intenso (le più acidofile delle  $\alpha$ ) a quelle d'un giallo pallido (le meno acidofile delle  $\epsilon$ ). Nelle sezioni colorate soltanto con la miscela di Mallory le cellule acidofile offrono tutte le gradazioni dal giallo più intenso al più debole, andando dalle cellule  $\alpha$  alle cellule  $\epsilon$ . Dunque le cellule  $\alpha$  hanno maggiore affinità delle  $\epsilon$ , non solo verso la fucsina acida e l'azocarminio, ma anche verso l'orange<sup>(7)</sup>. La riprova di quanto sopra si può ottenere per altra via, nel modo seguente. Soluzioni acquose molto diluite di fucsina acida (circa all'1 su 20.000 ed oltre) colorano, in 24 h, soltanto o quasi le cellule più fortemente acidofile<sup>(8)</sup>. Lo stesso risultato si ottiene con l'orange, colorando per breve tempo, dopo permanenza di 5' in soluzione acquosa all'1 % di acido fosfomolibdico, in una miscela di Mallory col 2,5 % di acido acetico al posto dell'acido ossalico. Col progressivo aumentare della concentrazione della fucsina acida (fino circa all'1 su 6-7000) si colora un numero sempre maggiore di cellule acidofile, fino a mettere bene in evidenza anche quelle più deboli. Lo stesso avviene con l'orange, se si aumenta progressivamente il tempo di permanenza nella miscela suddetta.

I risultati di tante prove indicherebbero che, se non altro nell'uomo e nel bove, non vi sono ragioni, almeno dal punto di vista tintoriale considerato, per scindere le cellule acidofile in due distinte categorie: cellule  $\alpha$  o azocarminofile e cellule  $\epsilon$  o orangiofile. Proporrei per tanto che nell'uomo, nel bove e nelle altre specie a comportamento eventualmente analogo, tutte le cellule aventi affinità verso la fucsina acida, l'orange e l'azocarminio, fossero tenute riunite come prima in una sola categoria; quella delle cellule acidofile o cellule  $\alpha$ .

soluzione satura di sublimato col 10 % di formalina e non accennano a trattamento dei pezzi con soluzione jodo-jodurata; quindi, se l'eliminazione del sublimato non fosse stata eseguita, l'ipofisi intera dovrebbe risultare sovraffissata.

(7) Nei preparati normali, a colorazione completa, le cellule  $\alpha$  ed  $\epsilon$  prendono tanto il rosso che il giallo; ma, dove resta in quantità anche il rosso (perchè la differenziazione di questo colore è stata arrestata a un certo punto), l'orange non si avverte, tranne per il fatto di rendere più vivo il colore rosso.

(8) In tal caso è necessario che le capsule di Petri siano pulite con cura e ripetutamente lavate con H<sub>2</sub>O prima dell'uso, perchè la fucsina acida è molto sensibile agli acidi e agli alcali. Per la stessa ragione le sezioni, una volta sparaffinate e portate attraverso la serie discendente degli alcool fino all'acqua, non debbono esser sottoposte ad alcun altro trattamento preliminare, prima d'esser messe nelle soluzioni molto diluite di fucsina acida. Per esempio, sezioni colorate per 1' con emallume acido di Meyer, virate in acqua di fonte, poi lavate in quattro H<sub>2</sub>O per 5' ciascuna, e infine tenute per 3' in una soluzione acquosa allo 0,1 % di fucsina acida, non prendono quasi affatto quest'ultimo colore; al contrario, sezioni trattate come sopra, ma non virate, prendono fortemente la fucsina, anche nelle cellule basofile; mentre nelle sezioni colorate soltanto con la fucsina allo 0,1 % per 3' (cioè come nel 1° tempo del Mallory originale), le cellule acidofile appaiono d'una tinta rossa di mediocre intensità, sopra un fondo rosa (provè eseguite su ipofisi d'uomo e di bove fissato in Stieve, con sezioni immediatamente susseguentisi nelle serie).

Nella soluzione madre di fucsina acida, allo 0,5 o all'1 % in H<sub>2</sub>O, si metta un pezzetto di camfora per impedire lo sviluppo di muffe.

Dalle riserve espresse intorno al punto più importante della questione si può trarre la conseguenza che almeno nell'uomo e nel bove lo spingere un po' più del giusto la differenziazione della fucsina acida avrebbe un'importanza relativa. Tuttavia, dato che per il nostro occhio il colore dell'orange nei preparati è percepibile con minor facilità di quello della fucsina, consigliereerei di differenziare in modo da lasciare tutti i granuli acidofili colorati in rosso. A tale scopo sarà utile servirsi, come orientamento, di qualche sezione colorata come nel I tempo del Mallory originale<sup>(9)</sup>, in cui tutti i granuli acidofili si colorano in rosso, per quanto assai meno intensamente che col mio metodo.

**PROPRIETÀ TINTORIALI NON ANCORA NOTE DELLE CELLULE  $\beta$ .** - Nel suo recente trattato, Romeis (1940) ha distinto le cellule basofile in  $\beta$  e in  $\delta$ . Con la tecnica di Berblinger e Burgdorf (1935) (resorcinfucsina, orange, bleu di anilina), utilizzata poi da Romeis nel suo Cresazan, ambedue i tipi prendono il bleu di anilina; ma soltanto le cellule  $\beta$  si colorano con la resorcinfucsina di Weigert. Le cellule  $\beta$  prendono anche il mucicarminio, la mucimemateina, ecc. Ma secondo Romeis la colorazione migliore si ottiene con la resorcinfucsina; il mucicarminio riuscirebbe bene solo nell'uomo (in realtà io ho ottenuto solo una mediocre colorazione rosa) e nel porco, dopo fissazione in Susa, Subtrie o Stieve, e meno bene dopo fissazione in formalina. La resorcinfucsina, però, richiede una laboriosa preparazione, un tempo di permanenza delle sezioni da 1 a 12 ore e un successivo lavaggio in tre alcool a 95° (Romeis, 1940, pp. 79 e 591).

I risultati delle mie ricerche tendono ad appoggiare la tesi sostenuta da Romeis, che esistano due tipi di cellule basofile: le  $\beta$  e le  $\delta$ . Infatti sono riuscito a mettere a punto una nuova tecnica, che permette una colorazione differenziale delle cellule basofile, omologa a quella ottenuta per la prima volta da Berblinger e Burgdorf e in seguito anche da Romeis.

Effetti assai buoni e perfettamente corrispondenti a quelli dati dalla resorcinfucsina sulle cellule ipofisarie si ottengono più rapidamente con una delle due seguenti soluzioni, facili a prepararsi: resorcina (oppure pirogallolo) gr. 1; carminio rubr. opt. gr. 0,5; H<sub>2</sub>O cc. 100<sup>(10)</sup>. Queste nuove soluzioni,

(9) Si proceda come segue: 1° soluzione acquosa allo 0,1% di fucsina acida, 3'; 2° sciacquare rapidamente in H<sub>2</sub>O; 3° asciugare fra carta assorbente; 4° 3 alcool assoluti; 5° 2 xiloli; 6° montaggio in balsamo. Le sezioni possono anch'essere passate, dopo il tempo 2, in H<sub>2</sub>O con l'1% di acido acetico e senz'altro essere osservate al microscopio.

(10) Si riscalda e si fa bollire per 1'-5'; dopo raffreddamento si filtra 1-2 volte e si aggiunge un pezzetto di canfora. La soluzione può essere usata appena fatta, ma dopo 4-6 giorni colora più rapidamente. La colorazione riesce bene con tutti i fissativi che ho adoperato. Il carminio alla resorcina, se maturo, impiega 1-2 h (4-5 h dopo fissazione in Sanfelice) per colorare; mentre col carminio al pirogallolo, assai più rapido ed energico quand'è maturo, sono sufficienti 20'-30' (un po' di più dopo fissazione in Sanfelice). Quest'ultimo carminio potrà essere usato con vantaggio nei casi particolarmente difficili, per esempio nel bove.

La resorcinsafanina di MINERVINI (1901) colora pure, come ho potuto assodare, le cellule  $\beta$ ; ma presenta gli stessi inconvenienti della resorcinfucsina e richiede circa 24 h per dare una colorazione sufficientemente intensa.

che io chiamerò rispettivamente reso- e pirocarminio, colorano in rosso le cellule  $\beta$ , in rosa pallido il fondo e in rosa vivo il connettivo; i nuclei non prendono affatto o ben poco. I nuovi carmini danno risultati particolarmente eccellenti dopo l'ematossilina di Regaud, impiegata secondo il procedimento rapido di Foot (1933), perchè il fondo risulta meno colorato.

Un carminio simile, ma meno elettivo, si ottiene sostituendo la resorcina col tartrato neutro di sodio<sup>(11)</sup>. Ora, per quanto il tartrato sia un composto aciclico, mentre la resorcina e il pirogallolo sono composti ciclici, le tre sostanze hanno a comune la caratteristica di possedere degli ossidrili alcoolici. Parebbe quindi esser condizione necessaria, per ottenere dal carminio una buona colorazione delle cellule  $\beta$ , l'associarlo a un composto organico avente degli ossidrili alcoolici. Naturalmente deve avere molta importanza anche il radicale del composto organico; ma occorreranno altri studi per chiarire il problema.

Se, dopo uno dei tre nuovi carmini, le sezioni vengono poste per 5'-10' circa in bleu di metilene secondo Löffler (oppure in soluzione alcoolica satura), e poi differenziate in  $H_2O$  con l'1 % di acido acetico, si può constatare che le cellule  $\beta$  si sono arricchite di bleu di metilene, fino ad assumere un'intensa colorazione dal rosso- al nero-violetto. Tale proprietà parrebbe legata alla presenza del carminio, poichè il bleu di metilene da solo non colora le cellule  $\beta$ , e in soluzione con la resorcina non dà una colorazione elettiva. L'arricchimento da me osservato ricorda quello dato dal bleu di toluidina dopo il metodo di Salazar al tannino ferrico, reso noto da Wallraff (1939).

La I miscela di Mallory (bleu di anilina-orange-acido ossalico) smonta l'emallume acido di Meyer e l'ematossilina ferrica di Regaud, che uso come coloranti nucleari nei miei due metodi. La II miscela (bleu di anilina-orange-acido fosfomolibdico) dà risultati scadenti dopo l'artificio impiegato per ben differenziare la fucsina acida. Ho dovuto quindi modificare anche a questo riguardo la colorazione originale del Mallory. La miscela, che, dopo aver dato uno dei nuovi carmini, permette di differenziare meglio le cellule  $\beta$  dalle  $\delta$ , è quella contenente verde luce e bleu di metile a parti uguali (cfr. miscela III alla pagina seguente): con essa le cellule  $\beta$  diventano di regola violacee, mentre le  $\delta$  assumono un colore azzurro-verde.

**1° METODO.** - Dà risultati equivalenti a quelli dell'Azan, col vantaggio di una colorazione nucleare diversa da quella dei granuli acidofili. Consta dei seguenti passaggi, da eseguirsi sui vetrini sparaffinati e portati, attraverso la serie discendente degli alcool, fino all'acqua distillata.

1° Emallume acido di Meyer fatto di recente, 1'-3' circa (per le ipofisi in alterazione cadaverica un po' spinta, 5'-10'); il fondo deve restare

(11) Occorre colorare per circa 24 h, poi passare direttamente nell'alcool a 75° fino a mediocre differenziazione, se si vuol procedere col mio 2° metodo, oppure fino a differenziazione completa, e infine stabilizzare il colore nelle cellule (chè altrimenti diffuirebbe di colpo nell'acqua) nell'alcool a 95° con l'1 % di acido citrico.



non colorato o quasi <sup>(12)</sup>. 2° Lavare in due H<sub>2</sub>O. 3° Soluzione acquosa allo 0,1 % di fucsina acida con 1 goccia d'acido acetico ogni 10 cc. (= allo 0,25 %), 1'-2'. 4° Sciacquare in H<sub>2</sub>O. 5° Soluzione acquosa all'1 % di acido fosfomolibdico, 5'. 6° Acqua di fonte, fino a decolorazione completa o quasi del fondo (cfr. a pp. 632-33) <sup>(13)</sup>. Si agiti spesso il vetrino, tenendolo fra le pinze; si usi perciò un recipiente con acqua alta 4-5 cm. Quando si vuol controllare al microscopio, si arresti la differenziazione, sciacquando in H<sub>2</sub>O con l'1 % di acido acetico. 7° Sciacquare in H<sub>2</sub>O con l'1 % di acido acetico. 8° Soluzione acquosa all'1 % di acido fosfomolibdico, 5'. 9° Sciacquare rapidamente in H<sub>2</sub>O. 10° Miscela di Mallory modificata <sup>(14)</sup>, 1 h per le ipofisi umane, 1 1/2 h o più, secondo la specie, per quelle di Anfibi, 2 h per quelle di bove. 11° Breve lavaggio in H<sub>2</sub>O; si può controllare al microscopio se la colorazione è sufficiente. 12° Asciugare fra carta assorbente. 13° Alcool a 95°, da rinnovare

(12) Assai miglior risultato si ottiene, specie sul materiale fissato in Sanfelice, con l'ematossilina ferrica di Regaud, secondo il procedimento rapido di FOOT (1933): a) Soluzione acquosa al 5 % di allume ferrico a 45°, 5'; b) lavare con H<sub>2</sub>O a getto; c) ematossilina ferrica di Regaud a 45°-50°, 5'; d) sciacquare in H<sub>2</sub>O; e) differenziare a fondo in 2 parti di soluzione satura di acido picrico in alcool a 95° + 1-2 parti di alcool a 95° (oppure a 50°) (per controllare al microscopio io uso sciacquare in acqua); f) lavare per 15' in acqua di fonte corrente. Si lavi quindi in H<sub>2</sub>O, prima di passare al tempo 3.

(13) Nei passaggi successivi va perduta in complesso una quantità molto piccola, quasi trascurabile, di fucsina acida. Solo dalle sezioni d'ipofisi in alterazione cadaverica un po' spinta viene eliminata una discreta quantità di fucsina; in tal caso si può tentare di differenziare meno, ma non si otterrà mai un buon risultato.

(14) Io uso tener pronte le seguenti soluzioni acquose madri: una di Orange G al 2 %, sciolta a freddo, addizionata con 2,5 cc. di acido acetico, e filtrata; una di verde luce allo 0,5 %, con 2,5 cc. di acido acetico, fatta come la precedente; una di bleu pirrolo allo 0,3 %, con 2,5 cc. di acido acetico, fatto come la prima, e una di bleu di metile allo 0,5 %, sciolta a caldo facendo bollire per 2'-3', lasciata raffreddare completamente, addizionata quindi con 2,5 cc. di acido acetico e filtrata. Le miscele fatte con le soluzioni madri si conservano inalterate per circa un mese e possono essere riadoperate più volte.

Per l'ipofisi si può adoprare una delle seguenti miscele: I) per mettere in risalto le minime granulazioni acidofile: soluzioni madri di verde luce e di orange a parti uguali. II) per mettere in risalto le granulazioni basofile e il connettivo: soluzioni madri di bleu di metile e di orange a parti uguali. Con questa miscela i preparati acquistano straordinariamente, se osservati a luce artificiale con un debolissimo filtro verde: a tale scopo uso una vaschetta di vetro a facce piane, distanti mm. 8 fra loro, riempita con 50 cc. di H<sub>2</sub>O addizionata con una goccia di soluzione acquosa al 2 % di verde luce. III) forse la migliore, perchè in essa i pregi e i difetti delle due precedenti si contemperano a vicenda: soluzione madre di verde luce, 1 parte; soluzione madre di bleu di metile, 1 parte; soluzione madre di orange, 2 parti. Con questa miscela i preparati acquistano, se osservati a luce artificiale senza o con un debole filtro azzurro, oppure usando per filtro una vaschetta come sopra, riempita di una soluzione diluitissima di acido picrico. IV) per mettere meglio in evidenza le cellule basofile più deboli nelle specie in cui risulti difficile colorarle, come ad esempio nel bove dopo fissazione in Susa o in Stieve: soluzioni madri di bleu pirrolo e di orange a parti uguali.

Per gli Anfibi e per il materiale fissato in Sanfelice va messa soltanto la metà della dose di soluzione madre di orange indicata per ciascuna miscela.

Per la neurocheratina è preferibile usare soltanto la soluzione madre di verde luce (o di bleu di metile). In tal caso è sufficiente colorare per 30'-40'.



spesso, circa 60'', agitando, per eliminare il colore superfluo; si può fare un controllo al microscopio. 14° Tre alcool assoluti, 60'' ciascuno, agitando; nel primo si può controllare al microscopio, e, se la differenziazione risulta ancora incompleta, rimettere il vetrino nell'alcool a 95°. Si può usare anche il solvente R, purchè neutralizzato e parzialmente purificato. 15° Due xiloli, circa 30'' ciascuno. 16° Montaggio in balsamo neutro o in dammara.

Risultati: nuclei brunicci o neri; granulazioni acidofile rosse (quelle ipoacidofile, volendo, gialle); granulazioni basofile, secondo la miscela usata, verdi, o turchine, o azzurro-verdi, oppure azzurre; citoplasma delle cellule cromofobe grigiastro pallido; neurocheratina rossa.

II METODO. — Dà risultati equivalenti a quelli del Cresazan, col vantaggio di una colorazione nucleare differente da quella dei granuli acidofili. Esso consta dei seguenti passaggi.

A) Colorazione nucleare con l'ematossilina ferrica di Regaud, secondo il procedimento rapido di Foot<sup>(12)</sup>, differenziando quasi a fondo. B) Lavaggio in due H<sub>2</sub>O. C) Resocarminio (oppure pirocarminio), fino a colorazione delle cellule  $\beta$  in rosso vivo, ma non troppo intenso; per i tempi si veda alla nota 10<sup>(13)</sup>. D) Lavaggio in due H<sub>2</sub>O. Si eseguano quindi i tempi 3-16 del I metodo. Al tempo 10 si usi la III miscela<sup>(14)</sup>, che dà una colorazione differenziale delle cellule  $\beta$  e  $\delta$  forse migliore di quella che si ottiene col Cresazan. Qualora il fondo risultasse troppo colorato per la sovrapposizione del giallo dell'orange al rosa del carminio, sarà vantaggioso adoperare la II miscela senza o con metà dose di orange, colorando rispettivamente per circa la metà o i due terzi del tempo indicato.

Risultati: nuclei neri; granulazioni acidofile rosse (quelle ipoacidofile, volendo, gialle); granulazioni  $\beta$ , per sovrapposizione del rosso carminio, del bleu e del verde, turchino-violacee, violacee, o rossiccio-violacee; granulazione  $\delta$  azzurro-verdi o turchino-verdi; citoplasma delle cellule cromofobe rosa grigiastro; connettivo turchino, per sovrapposizione del rosa carminio, del bleu e del verde.

#### INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE.

BERBLINGER W. e BURGDORF A. L., «Endokrinol.», 15 (1935). — COPELAND D. E., «Jour. Morph.», 72 (1943). — FOOT N. C., «Stain Techn.», 8 (1933). — DAWSON A. B. e FRIEDGOOD H. B., «Stain Techn.», 13 (1938). — HARTMANN J. E., «Am. Jour. Anat.», 75 (1944). — HEIDENHAIN M., «Zeitsch. wiss. Mikr.», 32 (1915). — IGNESTI U., «Monit. Zool. Ital.», 54 (1943). — MALLORY F. B., «Jour. exp. Med.», 5 (1900); «Jour. med. res.», (1903, e 1905). — MAXWELL T. Jr., «Stain Techn.», 13 (1938). — MINERVINI R., «Boll. R. Accad. med. Genova», 16 (1901). — ROMEIS B., «Handbuch mikr. Anat. Mensch.» di W. v. MÖLLENDORFF, VI, 3 «Hypophyse» (1940). — WALLRAFF J., «Zeitsch. mikr.-anat. Forsch.», 45 (1939).

(15) Si può omettere l'ematossilina ferrica e dare invece l'emallume alla fine, o meglio verso la fine della colorazione col carminio, lavando prima e dopo in due H<sub>2</sub>O; soltanto quando i nuclei sono particolarmente ben colorabili l'emallume può essere dato prima del carminio, perchè questa soluzione asporta con lentezza la colorazione nucleare. Avverto però che con tale procedimento la colorazione nucleare risulta di gran lunga inferiore.

**Citologia.** — *Assorbimento di sostanze lipoides* (\*). Nota (\*\*) di A. CORTI, presentata dal Corrisp. G. VERNONI.

Girini di *Rana*, di *Bufo*, di *Hyla* con gli arti posteriori ben sviluppati furono nutriti per alcuni giorni con mollica di pane onde provocare l'allontanamento dal tubo digerente dei detriti di limo e dei gusci di diatomee abbondanti nelle abituali condizioni: dopo un periodo di digiuno fu somministrato quale alimento tuorlo sodo di uovo di gallina: a distanza varia di tempo gli intestini furono fissati con il procedimento di Ciaccio per i lipoidi e le sezioni trattate con la colorazione specifica dello stesso autore.

L'esame dei preparati, del tutto consimili nelle tre serie di esperienze, mi ha fatto ritenere che il primo visibile risultato si abbia in una diffusa colorazione che il Sudan III determina nel citoplasma del segmento cellulare compreso fra lo straterello sottocuticolare e la zona del lacunoma degli elementi assorbenti; reazione diffusa, evidente soffusa colorazione di una fascia regolare e continua corrente per la sezione dell'epitelio, nella figura 1 alquanto sminuita dalla sua evidenza per l'opportunità materiale di valersi nella riproduzione della ugual tinta sia pur attenuata anche per il restante del corpo cellulare che non aveva in realtà dimostrata la specifica reattività; non si vedono corpuscoli figurati siano pur minuti a reazione positiva: appare reagente il gel protoplasmatico, il gliode per usare il termine del Bottazzi; si è indotti a pensare alla concezione del reticolo molecolare costituente secondo le vedute più moderne del Frey Wyssling le proteine della sostanza viva, che nelle sue maglie contiene particelle minori di lipidi, di glicidi, di sali, di acqua, di sostanze varie necessarie alla vita, e che qui sarebbe arricchito dei lipoidi assorbiti e diffusi: e proprio pur si sa anche che possono esservi presenti sostanze non strettamente legate.

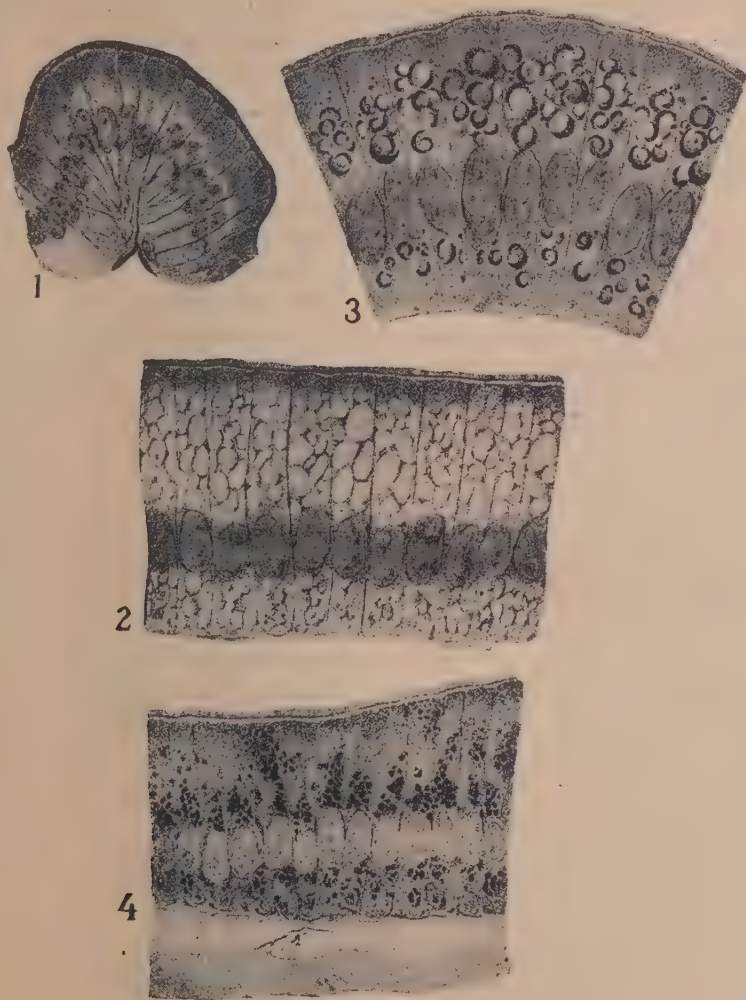
In momenti successivi la cellula cambia con imponenza la sua struttura (fig. 2): vacuoli vari, taluni così ampi da eguagliare quasi il diametro trasverso dell'elemento, tenuissimi, di forme per lo più regolarmente sub tondeggianti, son per tutto il citoplasma, possono essere per tutta la cellula, escluso naturalmente il nucleo, dallo straterello sottocuticolare fino alla regione basale più profonda: vacuoli tenuissimi per sé, per il contenuto di regola quasi ialino, per la linea limitante regolare sottilissima, per la tenuità di tutto il citoplasma che è tra i vacuoli in misura diversa a seconda che essi sono numerosi, numerosissimi per tutta la cellula, oppure un po' limitati; piccolissimi granellini di sostanza reagente al Sudan III compaiono qua e là.

In uno stadio ulteriore i grandi vacuoli mantengono dimensioni e contorno regolari, ma sul limite, degno veramente di nota (fig. 3) si trovano,

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata e Istologia dell'Università di Torino.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1947.

nitide e forti, delle linee, quasi a falce di luna, di sostanza nitidamente e fortemente reagente al Sudan III: i vacuoli rappresentano di certo l'assorbimento massivo del liquame contenuto nel tubo intestinale e le sostanze lipoidee



Epitelio intestinale di girini di Anfibii anuri nostrali alimentati con tuorlo sodo di uovo di gallina: fissazione e colorazione secondo il metodo di Ciaccio per i lipoidi; (l'immagine dei nuclei venne eseguita con la medesima tinta del citoplasma per ridurre le difficoltà e il costo della riproduzione).

N. B. - Per difficoltà di stampa non si è potuto riprodurre con la tinta del colorante citologico il materiale di cui nella nota è descritto il comportamento: la comprensione non sarà però difficile per il lettore.

diffusevi, veramente in omaggio a conoscenze che si posseggono, appena raggiungano sufficiente concentrazione appaiono in nitida evidenza in corrispondenza a linee limitanti le due diverse fasi, dei vacuoli e del citoplasma.



Quella sostanza che appare in tali forme di falci di luna, fortemente, vorrei dire con impressione di solida reazione al Sudan III, si va accrescendo, fino a ritrovarla in vacuoli completamente colorati, ancor regolari di consimile forma, aspetto e giacitura dei descritti, o pur in granuli di minor volume e meno regolari, più densi, dall'aspetto veramente consistente, opaco (fig. 4), distribuiti essi pure nei due segmenti della cellula, nel sovranucleare e nel sottonucleare, fino alla base.

La reazione del Sudan III si è dimostrata fine e precisa, sul materiale di particolare natura ingerito ed assorbito dai piccoli girini: e i fatti evidenti e più rilevati mi sembrano di indubbio ben palese interesse.

Molti e molti anni or sono (1920) descrissi la fortunata riuscita di esperienze con altre forme giovanissime di ittiospodi: avannotti di *Salmo* erano stati nutriti con polpa di milza e quindi, gli intestini, fissati a lungo in miscela di Tellyesnichzy: la reazione del sale di cromo si era nelle preparazioni mantenuta sui materiali ematici, e ne era risultato un quadro suggestivo quanto elementarmente chiaro degli elementi dell'epitelio, il cui segmento sovranucleare era repleto dell'immutato materiale esterno: non mi riuscì di vedere il comportamento del restante corpo cellulare, del sottonucleare, avendo pur ripetute e variate le esperienze: una bella riproduzione di una mia illustrazione è nel *Trattato di Istologia* del Pensa.

A. Ruffini, nella sua *Fisiogenia* (1925), riportò il suddetto risultato (p. 353) dicendolo «sorprendente»; e non potendo attribuire il passaggio del materiale corpuscolare a fatti di osmosi o di imbibizione, non dubitò di vedervi la «assoluta» espressione di «sicura funzione fagocitaria» da parte degli elementi entodermici. Io ero stato trattenuto dal formulare tale affermazione, se pur pareva che senz'altro s'imponesse, dalle diligentissime osservazioni, dal nessun indizio che nelle preparazioni avevo potuto scorgere a suffragio: l'orlo cuticolare degli elementi e lo straterello esoplasmico sottostante, erano apparsi ovunque e sempre normalmente e regolarmente integri, assolutamente immutati.

Ma il Ruffini ha dato anche una figura (161) imitata dalla mia, modificandola purtroppo secondo sue schematiche concezioni che io non ho mai potuto accettare, e che trovano decisa opposizione in tutti i miei più accurati e costanti reperti, e proprio anche in quelli descritti in questa Nota.

Le cellule dell'epitelio degli avannotti, come quelle dei girini, come ho sempre trovato pur nei vertebrati adulti, erano strettamente, regolarmente contigue, a continuo contatto tra loro per tutta la loro altezza, compreso il segmento sottonucleare, e la base larga, evidente, tutta impiantata sul connettivo dello stroma della mucosa. Non posso accettare quella concezione del peduncolo cellulare basale, che il Ruffini riconduce allo schema morfologico della secrezione interna intestinale del Mingazzini: nè posso condividere l'accettazione dell'esistenza e tanto più del significato di spazi intercellulari che il Ruffini considera per l'assorbimento dei materiali del chilo: l'epitelio intestinale è in ogni momento una soda ben continua e ben contesta barriera.



Circa la differenziazione fra il segmento sovranucleare assorbente e il restante, prossimale, compreso il nucleo, secondo il Ruffini, secernente, elaborante i materiali, anzi addirittura «assimilante», se non ho potuto dire una parola per gli avannotti, abbiamo nei girini condizioni del tutto da tal concezione discordanti; sia in esemplari nutriti con alimenti non specializzati, e sia in quelli nutriti con tuorlo d'uovo, nei momenti dell'assorbimento, tutto il citoplasma, dall'esoplasma superficiale alla base, può essere, è quasi di regola, pervaso da grandi vacuoli, da vacuoli e dalle masserelle lipoides: in consimile quadro, di quanto ancora in tempi più lontani (1912) io avevo descritto durante la funzione specifica intestinale di un pesce (*Box*) e, del resto, di quanto è da tempo pur noto per l'assorbimento dei grassi. Esistono invero come ognun sa, differenze notevoli, anche fondamentali, fra i due segmenti cellulari, più chiaramente evidenti nel digiuno, cioè nella preparazione che non nell'attività specifica: senza eccezione trovasi sempre nel superiore il lacunoma (apparato interno), il condrioma abbondante vi è rappresentato da regolari lunghi ben disposti condrioconti; mentre il segmento sottonucleare è caratterizzato da un solo uniforme addensamento di condriosomi granulari; ciò non ostante non è dato sinora di stabilire una tipica specificazione o differenziazione funzionale<sup>(1)</sup>.

I risultati delle dette esperienze sulle sostanze lipoidi hanno uno speciale interesse per un dominio lontano che da tempo è oggetto di mie indagini: dalle quali ho tratto la conclusione che l'apparato del Golgi — da mezzo secolo oggetto di numerosissime ricerche e delle più varie interpretazioni, evidente solo ed esclusivamente per le figure che ne danno i peculiari procedimenti con l'argento e con l'osmio — non esista in natura qual realtà sostanziale; con paziente diligenza ho cercato di stabilire e dimostrare la non esistenza di sostanza cellulare da riconoscere quale sostrato delle specifiche riduzioni dei due elementi sopradetti: riduzioni che insorgerebbero invece per condizioni e fattori ignoti in corrispondenza a determinate reali particolari masserelle di citoplasma ben differenziate da tutto il restante, costanti per forma, per massa, per sede, che primamente individuai, descrissi e figurai, e che, nell'assieme, indicai con il termine di lacunoma<sup>(2)</sup>.

(1) Le grandi cellule dell'epitelio intestinale degli Anfibi nostrali, Urodeli e Anuri, offrono nel confronto a tutti gli altri Vertebrati che ebbi occasione di saggiare, una particolare estrema difficoltà alla dimostrazione del lacunoma, dell'apparato interno: la reazione di questo secondo reperto è per contro particolarmente facile nell'epitelio gastrico degli stessi Anfibi (dove il GOLGI per primo lo descrisse) ben affine per struttura e per origine; anche i girini considerati in questa Nota hanno confermato il fatto, che per gli adulti avevo già avuto occasione di far notare, inducendomi alla rinuncia di una metodica ricerca al proposito.

(2) Nello studio degli avannotti di *Salmo* è venuto (1920) il primo ritrovamento, la prima descrizione, figurazione e interpretazione del lacunoma, e successivamente (1924) una delle più suggestive evidenti dimostrazioni della corrispondenza dell'apparato di Golgi. Cenno riassuntivo e apporti di ricerche e di considerazioni sul lacunoma, con tutta la bibliografia, sono nei due miei scritti più recenti: *Ricerche sul lacunoma* nel vol. XXXIX della « Rivista di Biologia », e *Per la tecnica e per la conoscenza del lacunoma* nel vol. LVI del « Monitore Zoologico Italiano ».

È invece diffusa fra gli studiosi la primaria opinione che l'apparato interno debba considerarsi realtà, nonchè quella di una sua costituzione lipoidea; opinioni sdoppiate fra quanti accettano le figure dei preparati quali rappresentazioni di condizioni strutturali normali, e quanti invece ritengono che le dette figure siano il risultato di materiali lipoidei normalmente diffusi nel citoplasma e artificiosamente addensati per l'azione innaturale delle preparazioni.

Ho opposto, da decenni, fatti cardinali concorrenti: nessun fatto, di sorta, è mai stato avanzato a dimostrazione o a sol obiettivo sostegno delle tesi da me rigettate: nessuna peculiare porzione del citoplasma, ho già detto, è stata mai riconosciuta o solo indicata quale spettante all'apparato; nè i metodi specifici della tecnica per l'apparato interno hanno azione alcuna sugli addensamenti lipoidi del citoplasma, nè i metodi per i lipoidi nulla hanno mai rivelato in corrispondenza dell'apparato interno.

Questa ricerca sull'assorbimento del tuorlo d'uovo nell'epitelio intestinale, che con il metodo classico per i lipoidi ha dato i risultati positivi veramente brillanti e di finissima evidenza assoluta che ho sopra descritto e figurato, attestano una precisa capacità elettiva del metodo stesso anche per i lipoidi che non sono di certo ancor assimilati al bioplasma, e neppure considerabili qual paraplasma, ma presenti nelle cellule solo quali sostanze non vitali; e viene a scuotere ancora una volta, a mio giudizio, la concezione di un esistente apparato lipoideo: che dovrebbe naturalmente essere di materiali bioplasmatici, in forma normale o sia pur modificata (smescolata): di materiali lipoidei ipotetici, che però nella realtà non hanno mai e in alcun modo risposto alla peculiare forte, precisa, specifica reazione. Ho accennato, a proposito dei vacuoli, la proprietà dei lipidi di addensarsi alle superfici limitanti fasi diverse: la linea di demarcazione delle masserelle del lacunoma dal restante citoplasma è sempre nitidamente regolare, nessuna struttura nessuna differenziazione vi si è mai potuta scorgere: la mia primitiva descrizione faceva appello alla goccia d'olio nell'aceto: la specifica fine e forte reazione del Sudan III non vi ha mai rivelato alcun reperto positivo: la mia conclusione di non accogliere la diffusa opinione di un addensamento lipoideo, ipoteticamente limitante o costituente l'apparato interno ne è pertanto ancora, da questa ricerca, assai più precisamente e più decisamente rafforzata.

**Scienza della Alimentazione.** — *Azione di preparati di pancreas (lipocaic, lipodierasi) sul contenuto in grassi del fegato di cane spancreato.* Nota di C. LOMBROSO e S. BOCCHIOTTI, presentata (\*) dal Corrisp. U. LOMBROSO.

In questo ultimo decennio, la concezione che il pancreas, per mezzo della sua funzione endocrina, intervenga a regolare il metabolismo intermedio dei grassi, ha ricevuto una larga documentazione per opera di numerosi autori americani, fra i quali primeggiano Dragstedt e collaboratori.

Come è noto, l'osservazione del dato di fatto che poltiglia di pancreas somministrata oralmente, od estratti di pancreas purificati iniettati parenteralmente, difendevano i cani spancreati o i diabetici gravi dalla infiltrazione grassa del fegato, ha condotto all'affermazione che questi estratti rappresentino l'increto pancreatico che domina la combustione del grasso. In loro assenza tale grasso, inesorabilmente accumulato, disturba la funzionalità del fegato e conduce a morte l'animale.

La concezione di una funzione interna del pancreas necessaria per regolare il metabolismo dei grassi, era già stata sostenuta fino dal 1903, con una complessa serie di argomenti sperimentali, da U. Lombroso (1). Richiamiamo l'attenzione su un gruppo di ricerche (1920-27 (2)) su tale argomento dello stesso autore, per gli stretti rapporti che esse hanno con le indagini della Scuola Americana, e perchè sono il punto di partenza delle esperienze del presente lavoro, svolte nell'intento di meglio conoscere e precisare il meccanismo d'azione del «lipocaic».

Nelle ricerche di U. Lombroso era stato dimostrato che se poltiglie di fegato di cane spancreato sono poste in termostato in autolisi asettica (con fluoruro di sodio 1%), non modificano il loro contenuto in lipidi. Se a tale poltiglia si aggiunge un estratto di pancreas, sia semplicemente preparato con soluzione fisiologica e pancreas triturato, sia estraendo l'enzima lipodietico (3), si osserva una perdita del contenuto in lipidi che può, nelle prime 18-24 ore, superare persino il 40%. Fenomeno tanto più impressionante quando si pensi che il fegato di cane spancreato ha un contenuto elevatissimo di grasso, persino decuplo di quello del fegato di cani normali.

La scomparsa del grasso in così alta percentuale non è però definitiva; cioè i grassi in realtà non sono bruciati, ma hanno semplicemente assunta una forma che li rende solubili nella fase acquosa in cui vengono a trovarsi durante il primo tempo della loro estrazione col metodo del Kumagawa-Suto.

(\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) U. LOMBROSO, «C. R. Soc. Biol.», LVII, 74, 76, 1904; LVI, 396, 399, 1907.

(2) U. LOMBROSO, «Annali Clin. Med. Palermo», XI, 78, 1921; «Arch. intern. Physiol.», XXII, 1, 9-10, 17, 137, 153, 1923; XXII, 321, 336-337, 348-349, 357, 1924; XXVI, 59, 69-280, 295, 1926; XXVII, 1, 9, 1927.

(3) F. GENTILE, «Arch. intern. Physiol.», XXIII, 357, 367, 1924.



Prolungando infatti il periodo di tempo della lipodieresi asettica, dopo 76-90 ore si ritrova il primitivo contenuto in acidi grassi.

Ora, nel caso del « lipocaic », ciò che è stato ben dimostrato è la scomparsa dal fegato del grasso infiltrato; ma non risulta se tale scomparsa si debba ad una combustione in sede, o non rappresenti un semplice allontanamento del grasso dal fegato, per avere esso assunta una forma chimica facilmente diffusibile; trovando poi una via di uscita per l'emuntorio intestinale, od eventualmente portandosi in altra sede dove deve essere bruciato.

Nessuna ricerca sul metabolismo gassoso è stata eseguita dagli autori americani, sia per misurare le possibili variazioni dell'intensità delle combustioni, sia sul Quoziente Respiratorio per conoscere quale alimento fosse bruciato durante la somministrazione del « lipocaic ».

Le osservazioni fatte sulla lipemia, che si esalta all'inizio della cura col « lipocaic », parlano più in favore di una mobilitazione dei grassi che di una loro combustione.

Ciò premesso, noi abbiamo ritenuto interessante di impostare esperienze comparative sul modo di comportarsi del contenuto in grassi da parte della poltiglia di fegato di cane pancreato posto in autolisi asettica, sia, per controllo, senza alcuna addizione, sia con addizione di « lipocaic » (preparato secondo le indicazioni di Dragstedt), sia infine con addizione di enzima lipodieretico.

Ci si riprometteva, con questa disposizione sperimentale, di controllare anzitutto ancora una volta l'assenza di modificazioni nel contenuto in lipidi di poltiglia di fegato di cane pancreato posto in autolisi asettica, e la profonda temporanea scomparsa dei lipidi quando alla poltiglia si addiziona l'enzima lipodieretico; confrontare infine l'azione di quest'ultimo con l'azione del « lipocaic » addizionato esso pure « in vitro » alla poltiglia di pancreas, per stabilire se la sua presenza poteva o no provocare una scomparsa di grassi, e se tale scomparsa era definitiva o semplicemente temporanea, similmente a quanto si avverte con l'aggiunta di enzima lipodieretico.

#### CONCLUSIONI. — Dalle ricerche esposte risulta:

1° Ancora una volta dimostrato che non si osservano modificazioni nel contenuto di lipidi nelle poltiglie di pancreas di cani pancreati poste in termostato in autolisi asettica.

2° Che si ottiene invece una profonda scomparsa di acidi grassi quando a tali poltiglie si addiziona estratto di pancreas od enzima lipodieretico.

3° Che uguale risultato si può ottenere addizionando quel particolare fattore lipotropo, preparato secondo le indicazioni del Dragstedt, denominato « lipocaic ». Però in questo secondo caso, si deve usare una quantità di materiale molto superiore che non con l'enzima lipodieretico (20-50 volte superiore).

4° Che in ambedue i casi, non si tratta di combustione, o di profonda demolizione dei grassi scomparsi, dato il perfetto ripristino dell'iniziale contenuto percentuale dopo una più prolungata permanenza in termostato.



TABELLA.

	Durata	inizio	18 h	48 h	76 h	120 h
<i>I Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato semplice gr. 5	Peso % acidi grassi	12,7	12,8	12,7	12,8	12,9
	Variazione %	—	—	—	—	—
Fegato gr. 5+Lipo- caic mg. 5	Peso % acidi grassi	12,72	12,11	12,14	12,10	12,73
	Variazione %	—	— 6,1	— 5,7	— 4,2	—
<i>II Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato semplice gr. 5	Peso % acidi grassi	26,52	26,01	26,20	26,11	26,43
	Variazione %	—	—	—	—	—
Fegato gr. 5+Lipo- dierasi	Peso % acidi grassi	26,52	18,21	22,43	23,90	26,72
	Variazione %	—	— 32,1	— 18,64	— 8,15	—
Fegato gr. 5+Lipo- caic mg. 50	Peso % acidi grassi	26,52	21,82	23,77	25,85	26,16
	Variazione %	—	— 24,11	— 9,4	— 4,1	—
<i>III Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato semplice gr. 5	Peso % acidi grassi	19,21	19,13	19,09	19,14	19,22
	Variazione %	—	—	—	—	—
Fegato gr. 5+Lipo- dierasi	Peso % acidi grassi	19,21	14,02	16,59	18,77	19,04
	Variazione %	—	— 22,4	— 12,2	— 4,1	—
Fegato gr. 5+Lipo- caic mg. 50	Peso % acidi grassi	19,21	14,50	17,05	18,92	19,11
	Variazione %	—	— 19,71	— 9,64	— 2,3	—
<i>IV Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato semplice gr. 5	Peso % acidi grassi	23,15	23,04	23,07	23,14	23,17
	Variazione %	—	—	—	—	—
Fegato gr. 5+Lipo- dierasi	Peso % acidi grassi	23,15	17,01	21,60	22,07	23,10
	Variazione %	—	— 27,1	— 8,7	— 5,3	—
Fegato gr. 5+Lipo- caic mg. 50	Peso % acidi grassi	23,15	17,20	21,05	21,60	22,92
	Variazione %	—	— 26,1	— 9,3	— 6,4	—

La quantità di «lipodierasi» aggiunta ad ogni campione corrisponde a grammi 5 di pancreas.

Le variazioni inferiori al 2% sono state omesse.

Il complesso di questi risultati tendono a fare attribuire al « lipocaic » una attività simile a quella esplicata (con molta maggiore energia) dalla *lipodierasi* estraibile dal pancreas con metodi che ne alterano assai meno le attività enzimatiche.

Il « lipocaic » eserciterebbe quindi non un intervento atto a far bruciare in sede i grassi, ma semplicemente una azione atta a rendere i grassi diffusibili; così da permettere un loro allontanamento dalla sede di deposito. Se poi, allontanati dal fegato, essi troveranno altra sede ove esistano le condizioni necessarie per la loro combustione, o se saranno semplicemente espulsi per l'emuntorio intestinale, sarà indagato in ulteriori ricerche.

A noi interessa per ora richiamare l'attenzione sul fatto che con ogni probabilità, il cosiddetto « lipocaic » trovava nella « lipodierasi » un precedente assai più efficace e di più facile preparazione. Con ciò non si tende a minimizzare l'importanza delle indagini del Dragstedt, che tendono ad introdurre nel campo delle applicazioni pratiche dei risultati prima rimasti nel campo della pura ricerca scientifica.

**Scienza della Alimentazione.** — *Variazioni di doppi legami dei grassi contenuti nel fegato di cane spancreato durante autolisi asettica in presenza o assenza di fattori lipodieretici* (\*). Nota di C. LOMBROSO e S. BOCCHIOTTI, presentata (\*\*) dal Corrisp. U. LOMBROSO.

Nella precedente Nota abbiamo confermato che la poltiglia di fegato di cane spancreato messo in autolisi asettica, non modifica sensibilmente il suo contenuto in lipidi. Se si addiziona a tale poltiglia un fattore lipodieretico, « lipocaic », « lipodierasi », si avverte una elevatissima scomparsa di grassi sino al 40%. Questa scomparsa non rappresenta una combustione dei grassi mancanti, ma una loro semplice modificazione che è reversibile, tanto che prolungando la permanenza in termostato, dopo 76-90 ore si ritrova il primitivo contenuto in grassi.

Questi risultati erano semplicemente dati oggettivi, alle cui interpretazioni tendono le ricerche che riferiremo nella presente Nota.

I quesiti alla cui soluzione tendono le nostre indagini sono i seguenti:

1° Perchè non si osserva la scomparsa di grassi quando si esperimenta con poltiglia di fegato di cane spancreato, così come si ottiene esperimentando con fegato di cane normale ?

2° Qual'è la modificazione subita dai grassi che scompaiono in un primo tempo dell'autolisi asettica quando si addiziona un fattore lipodieretico ?

Una prima ipotesi che abbiamo preso in esame è la seguente: Il variare di doppi legami degli acidi grassi modifica la loro solubilità nell'acqua: come è già stato dimostrato da Tangl-Berend<sup>(1)</sup>. Questi autori esperimentando

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) TANGL-BEREND, « Bioch. Zeit. », CCXX, 234, 39 (1930).

con grassi posti in presenza di estratti di pancreas e<sup>1</sup> bile, videro aumentare il numero dei doppi legami sino a chè i grassi acquistavano la solubilità, e la proprietà di sciogliersi in acqua diventando dializzabili.

Precedenti esperienze di U. Lombroso e De Frisco <sup>(2)</sup> avevano dimostrato che nella poltiglia di fegato di cane normale posto in autolisi asettica, si possono ottenere modificazioni dei doppi legami dei grassi in essa contenuti.

E precisamente, avendo gli autori somministrato, prima di sacrificare il cane, grasso molto saturo (grasso di montone) o molto insaturo (olio di lino), il contenuto in grassi immediatamente controllato nel fegato dimostrava una notevole partecipazione dei grassi ingeriti nel contenuto in lipidi del fegato stesso. Posto in autolisi asettica (con modalità e velocità lievemente diversa da caso a caso), si osservava che dopo un certo tempo, aumentavano i doppi legami nel fegato di cane alimentato con grasso di montone, mentre i doppi legami si riducevano in quello alimentato con olio di lino: dimodochè dopo 76-90 ore i grassi tendevano a portarsi al normale contenuto di doppi legami che si riscontrano nei grassi del fegato di cane non sottoposto a questa introduzione di grassi eterogenei. Il fegato di cane normale ha cioè la capacità di deidrogenare i grassi in esso contenuti o di idrogenarli, e con notevole intensità.

TABELLA I.

	Durata	Inizio	18 h	48 h	76 h	120 h
<i>I Esperienza cane spancreato.</i>						
Fegato gr. 5	Numero Jodio	71,4	62,1	51,3	57,2	109,4
	Variazione %	—	— 11,4	— 27,2	— 19,6	+ 38,1
<i>II Esperienza cane spancreato.</i>						
Fegato gr. 5	Numero Jodio	76,14	58,1	85,0	93,3	107,1
	Variazione %	—	— 23,4	+ 11,3	+ 16,1	+ 31,5
<i>III Esperienza cane spancreato.</i>						
Fegato gr. 5	Numero Jodio	69,5	57,3	89,1	105,5	111,3
	Variazione %	—	— 7,1	+ 28,3	+ 37,9	+ 41,8
<i>IV Esperienza cane spancreato.</i>						
Fegato gr. 5	Numero Jodio	74,3	57,2	81,8	95	108,2
	Variazione %	—	— 23,1	+ 9,3	+ 28,1	+ 33,2

(2) U. LOMBROSO, A. DE FRISCO, «Boll. Soc. Sper. Biol.», II, 809, 814 (1927).

TABELLA II.

	Durata	Inizio	18 h	48 h	76 h	120 h
<i>I Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato semplice gr. 5	Numero Jodio	83,1	70,5	96,2	96,3	114,0
	Variazione %	—	— 15,0	+ 18,7	+ 18,71	+ 31,0
	Peso % acidi grassi	12,7	12,3	12,7	12,8	12,9
	Variazione %	—	—	—	—	—
Campioni di fegato gr. 5 + lipocaic mg. 5	Numero Jodio	83,1	73,1	94,0	97,0	112,0
	Variazione %	—	— 12,3	+ 17,3	+ 18,9	+ 30,5
	Peso % acidi grassi	12,72	12,11	12,14	12,10	12,63
	Variazione %	—	— 6,1	+ 5,7	— 6,0	—
<i>II Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato semplice gr. 5	Numero Jodio	71,5	60,3	81,4	90,5	96,2
	Variazione %	—	— 15,2	+ 12,3	+ 22,9	+ 24,5
	Peso % acidi grassi	26,52	26,01	26,2	26,11	26,43
	Variazione %	—	—	—	—	—
Campioni di fegato gr. 5 + lipodierasi	Numero Jodio	71,5	60,8	80,0	92,5	99,1
	Variazione %	—	— 15,0	+ 12,9	+ 23,2	+ 25,7
	Peso % acidi grassi	26,52	18,21	23,43	23,90	26,72
	Variazione %	—	— 32,1	+ 18,64	— 8,15	—
Campioni di fegato gr. 5 + lipocaic. mg. 50	Numero Jodio	71,5	62,4	83,2	98,7	102,1
	Variazione %	—	— 13,7	+ 14,5	+ 25,2	+ 30,9
	Peso % acidi grassi	26,52	21,82	23,77	25,85	26,16
	Variazione %	—	— 24,11	— 9,5	— 4,1	—
<i>III Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato semplice gr. 5	Numero Jodio	70,4	62,1	79,3	93,0	110,1
	Variazione %	—	— 11,5	+ 12,4	+ 26,1	+ 40,4
	Peso % acidi grassi	19,21	19,13	19,09	19,14	19,22
	Variazione %	—	—	—	—	—



Segue: TABELLA II.

	Durata	Inizio	18 h	48 h	76 h	120 h
Segue: <i>III Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato gr. 5 + lipodierasi	Numero Jodio	70,4	60,4	81,2	87,3	109,5
	Variazione %	—	— 12,7	+ 13,1	+ 21,5	+ 39,2
	Peso % acidi grassi	19,21	14,02	16,59	18,77	19,04
	Variazione %	—	— 22,4	— 12,2	— 4,10	—
Campioni di fegato gr. 5 + lipocaic mg. 50	Numero Jodio	70,4	59,7	76,3	91,0	109,7
	Variazione %	—	— 14,6	+ 9,2	+ 26,1	+ 35,3
	Peso % acidi grassi	19,21	14,50	17,05	18,92	19,11
	Variazione %	—	— 19,71	— 9,74	— 2,2	—
<i>IV Esperienza cane spancreato.</i>						
Campioni di fegato semplice gr. 5	Numero Jodio	67,3	61,4	81,8	88,9	107,4
	Variazione %	—	— 9,9	+ 17,2	+ 25,1	+ 44,5
	Peso % acidi grassi	23,15	23,04	23,07	23,14	23,17
	Variazione %	—	—	—	—	—
Campione di fegato gr. 5 + lipodierasi	Numero Jodio	67,3	60,5	79,6	92,5	105,6
	Variazione %	—	— 10,4	+ 15,7	+ 26,2	+ 42,7
	Peso % acidi grassi	23,15	17,01	21,60	22,07	23,10
	Variazione %	—	— 27,1	— 8,7	— 5,3	—
Campioni di fegato gr. 5 + lipocaic mg. 50	Numero Jodio	67,3	64,2	83,5	97,0	103,9
	Variazione %	—	— 6,8	+ 18,1	+ 28,1	+ 39,8
	Peso % acidi grassi	23,15	17,20	21,05	21,60	22,92
	Variazione %	—	— 26,1	— 9,3	— 6,4	—

La quantità di «lipodierasi» aggiunta ad ogni campione corrisponde a gr. 4 di pancreas.

Le variazioni inferiori al 2 % sono state omesse.

Ora, siccome era stata dimostrata la capacità da parte di estratti di pancreas di provocare *in vitro* la formazione dei doppi legami, sorgeva logico il dubbio che la mancata lipodieresi nel fegato di cani spancreati fosse dovuta alla mancanza dell'enzima deidrogenante, il quale sarebbe fornito ai vari organi per via endocrina dal pancreas.

Abbiamo quindi creduto interessante di studiare anzitutto il comportamento dei doppi legami nel contenuto in lipidi del fegato di cane spancreato a vari tempi di autolisi asettica (tabella I). Inoltre abbiamo impostate uguali indagini, addizionando alle poltiglie di fegato un fattore lipodieretico (tabella II).

Come abbiamo visto nella precedente Nota, l'enzima lipodieretico ed il lipocaic esplicano un'azione del tutto simile, facendo cioè in un primo tempo scomparire i grassi che in tempi successivi si ripristinano alla percentuale primitiva.

In tal modo si provocava una profonda scomparsa di lipidi, e si poteva controllare se con tale fenomeno si associasse una variazione dei doppi legami che armonizzasse, sia con la scomparsa dei grassi, sia con la loro ricomparsa nel senso di una deidrogenazione o successiva idrogenazione.

Nelle nostre esperienze i cani, prima di essere spancreati, venivano per più giorni alimentati con elevate quantità di grasso di bove, nella presunzione, effettivamente avvenuta, che, elevando nei depositi il contenuto di grassi saturi, nella infiltrazione in seguito insorgente, tali grassi fossero rappresentati in alta percentuale; si potevano così seguire più facilmente i processi deidrogenativi.

Risulta dalle riferite esperienze:

1° Che la poltiglia di fegato di cane spancreato con un contenuto di grassi piuttosto saturo (per previa alimentazione con grassi ad alto punto di fusione) tenuto in autolisi asettica, dopo un primo tempo (18-24 ore) nel quale si può talvolta osservare una ulteriore diminuzione di doppi legami, manifesta in seguito un aumento dei suoi doppi legami, come era stato osservato nelle precedenti ricerche eseguite con fegato di cane normale; sino a raggiungere le cifre abituali (95-110). E ciò senza che apprezzabili quantità di lipidi vengano a scomparire, in assenza cioè di lipodieresi.

2° Che l'addizione di « lipocaic » o di « lipodierasi » che conduce in un primo tempo ad una profonda scomparsa di lipidi, non modifica per nulla il comportamento dei doppi legami dei grassi del fegato, che tendono a risalire progressivamente anche durante la scomparsa di alte percentuali di grassi. E così pure non si avverte una modificazione di tale processo deidrogenante, durante il ripristino del contenuto primitivo dei grassi.

Insomma tra i processi della scomparsa ripristino di grassi per addizione di lipocaic-lipodierasi alla poltiglia di fegato di cane spancreato in autolisi asettica, e deidrogenazione dei lipidi in esso contenuti, non esiste nessun rapporto di interdipendenza.

Non appare quindi che con questa direttiva si possa interpretare l'azione lipodieretica degli estratti di pancreas, e, così pure risulta che l'attività deidrogenante non è legata ad una funzione endocrina del pancreas.

**Scienza della Alimentazione.** — *Azione degli acidi malonico, e monoiodoacetico e della florizina sulla lipodieresi* <sup>(\*)</sup>. Nota di C. LOMBROSO e di S. BOCCHIOTTI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. U. LOMBROSO.

La lipodieresi, la scomparsa cioè di acidi grassi superiori, che si manifesta durante la autolisi asettica di poltiglie di organi, è certamente uno dei fenomeni più interessanti che si svolgono nel metabolismo lipidico.

Non si conosce per ora cosa rappresenti questa scomparsa di acidi grassi superiori, ma soltanto ci sono note alcune condizioni che intervengono per rendere manifesto il fenomeno o per impedirlo. Una delle condizioni fondamentali affinché si manifesti la lipodieresi, è che il tessuto sul quale si vuole sperimentare sia prelevato da un animale (cane) nel periodo digestivo, o dopo introduzione mediante sonda di una soluzione al 0,5 % di HCl; vale a dire è necessario l'intervento di un « quid » che viene messo in circolo quando il tubo digerente è stimolato per il passaggio nell'intestino di HCl.

Come è noto da molti decenni U. Lombroso <sup>(1)</sup> sostiene che il pancreas è un organo che interviene con una funzione endocrina a regolare il metabolismo intermedio lipidico; nel quale metabolismo la lipodieresi rappresenterebbe una tappa di particolare interesse.

In armonia con questa affermazione sta il fatto che poltiglia di cane pancreatico non presenta lipodieresi se posta in autolisi asettica; questo anche quando l'animale è sacrificato dopo un abbondante pasto di carne o introduzione di HCl.

Se però alla poltiglia di fegato di cane pancreatico si addiziona un estratto pancreatico (estratto glicerico, acquoso, lipodierasi, lipocaic) si ottiene una scomparsa di acidi grassi che in qualche caso raggiunge il 40 %; mentre nei campioni senza aggiunta del preparato pancreatico non si ottiene nessuna variazione apprezzabile.

La scomparsa del grasso titolabile con il metodo Kumagawa-Suto, non rappresenta una combustione del grasso scomparso, perchè prolungando l'autolisi si constata il ripristino totale del contenuto di acidi grassi.

Nella Nota precedente <sup>(2)</sup> abbiamo iniziato il controllo delle varie ipotesi che si possono logicamente formulare per spiegare la scomparsa dei grassi; e fra esse abbiamo presa in considerazione la concezione di Tangl e Berend <sup>(3)</sup> secondo i quali per l'azione di bile ed estratti pancreatici su grassi saturi, si formavano composti a doppi legami solubili nella fase acquosa. Al controllo

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) U. LOMBROSO, «C. R. Soc. Biol.», LVII, 74, 76, 1904; ibidem, 396, 399, 1904; «Arch. inter. Physiol.», XXII, 1, 9-17, 19, 1923.

(2) Pubblicata negli «Atti della Acc. Nazion. Lincei»: *Variazioni dei doppi legami, ecc.* fasc. 5-6, p. 644, 1947.

(3) TANGL e BEREND, «Bioch. Zeit.», CCXX, 234-236, 1930.

però questa ipotesi non si è confermata, perchè non abbiamo potuto constatare un parallelismo tra la scomparsa dei grassi e l'aumento dei doppi legami. Infatti noi abbiamo osservato che poltiglie di fegato di cane spancreato presentavano profonde variazioni dei doppi legami nei loro grassi senza modificazioni nel loro contenuto; analogo comportamento si osservava in campioni del medesimo fegato, al quale era stato aggiunto enzima lipodieretico che provocava una forte diminuzione degli acidi grassi superiori.

Si aggiunga che uno di noi (Bocchiotti) in una serie di ricerche in corso di stampa, ha constatato che nel liquido di idrolisi di campioni di fegato, nel quale la scomparsa del grasso è stata molto elevata, non si trovano materiali con doppi legami.

TABELLA I.

*Abbreviazioni:* sempl. = semplice, lipod. = lipodieresi, iodac. = acido monoiodoacetico malon. = acido malonico, floriz. = florizina.

Num.	durata	semp.	lipod.	lipod. iodac.	lipod. malon.	lipod. floriz.	materiale
I	inizio	6,76					
peso %	18 h	6,78	5,10	6,75	6,79	5,12	
acidi	48 h	6,77	6,64	6,76	6,75	6,62	Fegato di cane
grassi	76 h	6,78	6,75	6,77	6,78	6,71	spancreato
II	inizio	16,22					
peso %	18 h	16,20	13,05	16,18	16,16	13,10	
acidi	48 h	16,18	15,60	16,19	16,15	15,12	Fegato di cane
grassi	76 h	16,21	16,10	16,17	16,18	15,90	spancreato
III	inizio	3,91					
peso %	18 h	3,90	2,85	3,85	3,87	2,90	
acidi	48 h	3,87	3,14	3,86	3,88	3,24	Fegato di cane
grassi	76 h	3,91	3,70	3,84	3,86	3,83	allossanato
IV	inizio	5,07					
peso %	18 h	5,05	4,18	5,09	5,08	4,22	
acidi	48 h	5,06	4,71	5,02	5,05	4,84	Campioni di
grassi	76 h	5,10	4,98	5,07	5,06	5,05	tuorlo d'uovo
V	inizio	4,94					
peso %	18 h	4,93	4,07	4,91	4,92	4,17	
acidi	48 h	4,95	4,36	4,89	4,90	4,35	Campioni di
grassi	76 h	4,92	4,77	4,93	4,93	4,86	tuorlo d'uovo



Questa ipotesi quindi che trovava nella letteratura precedente vari argomenti per essere ammessa, non trova conferma nel controllo diretto.

Nella presente Nota abbiamo voluto indagare quale fosse l'azione sul processo lipodieretico di alcune sostanze la cui presenza interferiva in modo preciso in particolari reazioni enzimatiche che molto probabilmente intervengono durante il processo lipodieretico.

Noi abbiamo aggiunto ai campioni di fegato le seguenti sostanze: acido malonico, acido monoiodoacetico e florizina nella misura di 5 mg. per campione. L'acido malonico, come è noto, inibisce la succinodeidrogenasi; la florizina è inibitrice della fosfoferasi, e l'acido monoiodoacetico, oltre alle ben note azioni, inibisce la gliossalasi.

Nella tabella I sono esposti i risultati.

**CONCLUSIONI.** — Le nostre esperienze ci inducono ad affermare che la florizina non modifica per nulla l'andamento della lipodieresi provocata da estratti di pancreas aggiunti al fegato di cane diabetico per estirpazione di pancreas, o per iniezione di allossana, o aggiunti a tuorlo d'uovo, diluito in soluzione di NaFl all'1%.

Gli acidi malonico e monoiodoacetico invece bloccano l'azione della lipodierasi; di modo che l'assenza di ogni variazione nel contenuto in acidi grassi, che si avverte in questo materiale se non si aggiunge il fattore lipodieretico, si avverte pure quando in presenza di tale fattore trovansi gli acidi malonico e monoiodoacetico.

Sul significato di questi risultati tratteremo più ampiamente in una prossima Nota nella quale studiamo l'azione di queste sostanze nel periodo in cui al processo della scomparsa dei grassi segue la neoformazione.

**Biologia.** — *Sulla presenza di cellule basofile del tipo  $\beta$  e del tipo  $\delta$  nella preipofisi del Tritone crestato*<sup>(\*)</sup>. Nota preventiva di V. MAZZI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. N. BECCARI.

Nel 1940 Romeis<sup>(1)</sup> immaginava una tecnica con la quale, integrando il metodo di Berblinger e Burgdrof<sup>(2)</sup> con l'Azan di Heidenhein, riusciva a distinguere nell'ipofisi umana, in base alle caratteristiche tintoriali, due tipi di cellule basofile, che contraddistinse con i simboli  $\beta$  e  $\delta$ . Ambedue i tipi hanno affinità per il bleu di anilina, ma soltanto il primo anche per la resorcina-fucsina.

Questa tecnica, detta del Cresazan, la quale, permettendo una più precisa valutazione classificativa degli elementi cromofili della preipofisi, pre-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata della Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) « Handbuk mikr. Anat. Mensch. » di W. v. MÖLLENDORFF, VI/3. « Hypophyse » (1940).

(2) « Endokrinol. », 15 (1935).

senta indubbi vantaggi rispetto alle tecniche normalmente usate, non è stata messa a profitto dai recenti autori che si sono dedicati allo studio della ipofisi degli Anfibi. Aplington (1942)<sup>(3)</sup> in *Necturus* e Kent (1945)<sup>(4)</sup> in *Triturus viridescens* sono ricorsi alla tricromica di Masson; Leghissa (1942)<sup>(5)</sup> nell'*Axolotl* ad una modificazione della tricromica di Mallory; Klose (1941)<sup>(6)</sup> nel Tritone crestato, e Copeland (1943)<sup>(7)</sup> in *Triturus viridescens* all'Azan; Klose nel Tritone crestato, Tuchmann-Duplessis (1945)<sup>(8)</sup> nel Tritone palmato, alpestre e marmorato, e Pisanò (1946)<sup>(9)</sup> in *Rana esculenta*, al metodo di Mann.

Era pertanto interessante stabilire se i criteri classificativi introdotti da Romeis potevano essere applicati anche agli Anfibi.

Ultimamente Galgano (1947)<sup>(10)</sup> ha messo a punto una tecnica che presenta notevoli vantaggi rispetto al Cresazan di Romeis, pur dando risultati perfettamente corrispondenti. Poichè Galgano ed io apparteniamo allo stesso Istituto, ho potuto conoscere ed applicare subito questa tecnica allo studio della ipofisi del Tritone crestato (*Triturus cristatus carnifex* [Laur]) di cui ho in corso lo studio del ciclo annuale.

Ho fissato in Stieve, con l'avvertenza di ricoprire l'ipofisi di un leggero strato di albume d'uovo per evitare, secondo l'avvertenza di Galgano, fatti di sovralfissazione periferici. Ho quindi incluso in paraffina e celloidina, sezionato a  $5\mu$ , e colorato con il II metodo di Galgano (ematossilina ferrica di Regaud, resocarminio, fucsina acida, miscela di Mallory modificata).

La colorazione differenziale da me adottata permette la classificazione delle cellule basofile del lobo anteriore dell'ipofisi del Tritone in due categorie, che, dai controlli fatti con la resorcin-fucsina, risultano corrispondenti a quelle designate da Romeis come  $\beta$  e  $\delta$ .

Comunico brevemente le prime osservazioni che ho svolto su animali dei due sessi, sacrificati nei mesi di giugno, luglio e settembre, relative alla presenza e ad alcune caratteristiche dei due tipi surricordati di cellule basofile.

Le cellule  $\beta$  si riconoscono facilmente, perchè si colorano in violetto chiaro; le  $\delta$  invece in varie tonalità di azzurro-verde. Contrariamente a quanto si riscontra nell'uomo, le  $\beta$  sembrano essere numericamente inferiori alle  $\delta$ .

Le cellule  $\beta$  che, almeno in parte, corrispondono alle « purple basophilic cells » di Aplington e Kent, sono rappresentate da elementi per lo più grandi, a forma irregolarmente cubica o prismatica, con citoplasma molto ricco di minutissimi granuli, non sempre facilmente distinguibili. In tutti gli animali sacrificati si trovano in modo caratteristico disposte in una, due file, di contro alla parete endimale, che separa l'infundibolo dalla preipofisi. Esse ven-

(3) « Am. J. Anat. », 70, 201 (1942).

(4) « J. Tennessee Acad. Sc. », 20, 139 (1945).

(5) « Arch. Ist. Bioch. It. », 4 (1942).

(6) « Zeitschr. f. wiss. Zool. », 155, 46 (1941).

(7) « J. Morph. », 72, 379 (1943).

(8) « Thèse », Hermann et Cie. Paris.

(9) « Atti Acc. Fisiocr. », Siena (1946).

(10) « Atti Acc. Naz. Lincei », questo stesso fascicolo.

goño a costituire una piccola lamina, disposta nelle regioni mediana e paramediana, che si estende dal confine con la parte intermedia fino ad un cordone solido di elementi dello stesso tipo, che è situato perpendicolarmente all'asse della lamina, ed occupa la parte mediana dell'angolo diedro ventro-rostrale della ghiandola. Cellule  $\beta$ , simili a quelle ora descritte, accompagnano, in numero relativamente notevole, le travate connettivali che si distaccano dal connettivo sottoependimale per approfondarsi nel corpo della adeniofisi. Si trovano inoltre cellule  $\beta$  in piccolo numero e sparse lungo il margine ventrale, nella vicinanza della linea mediana. L'apice caudale della pituitaria comprende alcune cellule di questo tipo. Si tratta in ogni caso di cellule con abbondante citoplasma. Altre cellule  $\beta$  con citoplasma assai ridotto si trovano sparse in modo irregolare profondamente nel corpo della preipofisi.

Fra le cellule  $\beta$  quelle della zona periependimale e del cordone trasverso sembra rappresentino elementi piuttosto stabili, nel senso che si presentano con caratteri di uniformità, sia nel  $\delta$  che nella  $\varphi$ , almeno nei mesi in cui ho sacrificato gli animali. Tutte le altre invece sembrano sottostare a fluttuazioni notevoli.

Le cellule  $\delta$ , le quali, come ho già ricordato, si colorano in varie tonalità di azzurro-verde, si possono suddividere almeno in due sottogruppi distinti. Il primo è rappresentato da cellule per lo più grandi che contengono anche granulazioni fucsinofile più o meno grosse. Seguendo in parte Copeland denominerò queste cellule, che nel Tritone crestato non sono state riconosciute nè da Meyer (1939)<sup>(11)</sup>, nè da Klose nè Tuchmann, « cellule  $\delta$  globulari ». Il secondo sottogruppo è rappresentato da cellule di grandezza variabile, che non contengono granulazioni fucsinofile. Corrispondono in parte alle « cellule basofile » di Copeland e le chiamerò semplicemente « cellule  $\delta$  ».

Apparentemente nel Tritone le cellule globulari sottostanno ad un ciclo che si avvicina molto nelle sue fasi a quello descritto da Aplington in *Necturus*. I miei preparati colgono la fase finale di questo ciclo, nella quale il citoplasma, assai ridotto e di color azzurro pallido, è completamente ripieno di grossi granuli fucsinofile. Mancano, mi sembra, i fenomeni di vacuolizzazione ricordati da Aplington. Il processo è già al suo culmine nei maschi sacrificati alla fine di giugno, mentre è ancora in atto nelle femmine, in cui si colgono numerose cellule a citoplasma più intensamente basofilo e solo parzialmente ripieno di granuli acidofili. Alla fine di luglio la popolazione delle basofile della preipofisi (con l'esclusione naturalmente del lobo intermedio, di cui non mi occupo nella presente Nota), è rappresentata soltanto da cellule globulari in piena maturità. Queste cellule permangono ancora nelle femmine di settembre, accanto a cellule  $\delta$  che hanno fatto la loro comparsa; mancano invece nel maschio, dove si notano soltanto cellule  $\delta$  con citoplasma scarso ma intensamente colorato.

(11) « Arch. Entwkl. mekanik », 139, 309 (1939).



**Biologia.** — *Gli elementi morfologici del sangue di «Seps chalcides»* (\*). Nota di L. RAUNICH, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. BRUNELLI.

Ho avuto occasione di studiare il sangue di alcuni esemplari di *Seps chalcides* (*Chalcides tridactylus*), rettile Lacertile della famiglia degli Scincidi, abbastanza comune nel Bolognese, caratterizzato, come è noto, dalla notevole riduzione degli arti. Date le conoscenze tuttora molto scarse, e a dire il vero ancora assai imprecise, di ematologia comparata, ritengo non privo di interesse esporre i risultati di queste mie ricerche sul sangue del *Seps*, materiale ancora assai poco noto dal punto di vista ematologico. Le attuali osservazioni si riferiscono esclusivamente a esemplari femmine in avanzata gestazione, catturati nel mese di maggio.

Ho studiato gli elementi sanguigni tanto a fresco, con o senza aggiunta di coloranti vitali quanto su strisci fissati e colorati. Per l'esame a fresco ho seguito la tecnica semplicissima di porre una goccia di sangue su un vetrino portaoggetti e ricoprirlo con un coprioggetti, lutando con olio di vaselina; i due vetrini devono essere pulitissimi e passati alla fiamma; nei preparati allestiti in questa maniera gli elementi sanguigni si mantengono vitali per più di una settimana.

Per lo studio del sangue con i coloranti vitali basta distendere sul coprioggetti, prima di coprire la goccia di sangue, un sottile velo del colorante prescelto. Ho usato il Rosso neutro, il Brillantkresylblau e il Verde Janus.

Gli strisci furono fissati con alcool metilico, col calore o col May Grünwald, e colorati col May Grünwald - Giemsa, Triacido di Ehrlich, e Bleu policromo - fucsina carbolica.

Gli eritrociti del *Seps* sono elementi discoidali appiattiti, a contorno ellissoidale, piuttosto allungati, di dimensioni medie oscillanti fra minimi di  $7 \times 13,5 \mu$  e massime di  $10 \times 18 \mu$ ; presentano un citoplasma ialino, che non presenta particolari strutture nè in vivo nè in strisci, e che si colora in roseo col Giemsa; sono tutti nucleati, con nucleo centrale, allungato, con cromatina raccolta in tanti blocchetti fitti (struttura matura) o più radi (struttura eritroblastica). In casi rarissimi ho notato, accanto al nucleo, un corpicciuolo rotondo, più piccolo del nucleo, ma della sua stessa struttura. Si incontrano pure, ma molto raramente, eritrociti di forma rotonda molto più piccoli di quelli normali (diametro medio circa  $7 \mu$ ).

Da notare che mancavano completamente tanto gli eritrociti anucleati (eritroplastidi) quanto gli eritroblasti policromatofili. La mancanza di questi due elementi, che sono pressochè costanti nel sangue periferico in tutti i Vertebrati<sup>(1)</sup>, non deve meravigliare, perchè occorre tener conto del fatto

(\*) Ricerche eseguite presso l'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) Cfr. F. KOERNER, *Ueber die kernlosen Erythrocyten und die freien Kerne im Blute der Urodelen*. «Z. Zellf.», 28 (1938); P. SLONIMSKI, *Studien über die morphotischen Blutelemente*



che gli esemplari studiati erano stati catturati in una data stagione e in particolari condizioni (gestazione avanzata); sono note infatti le variazioni stagionali nel quadro ematico dei Vertebrati, ed è probabile che il *Seps* non faccia eccezione.

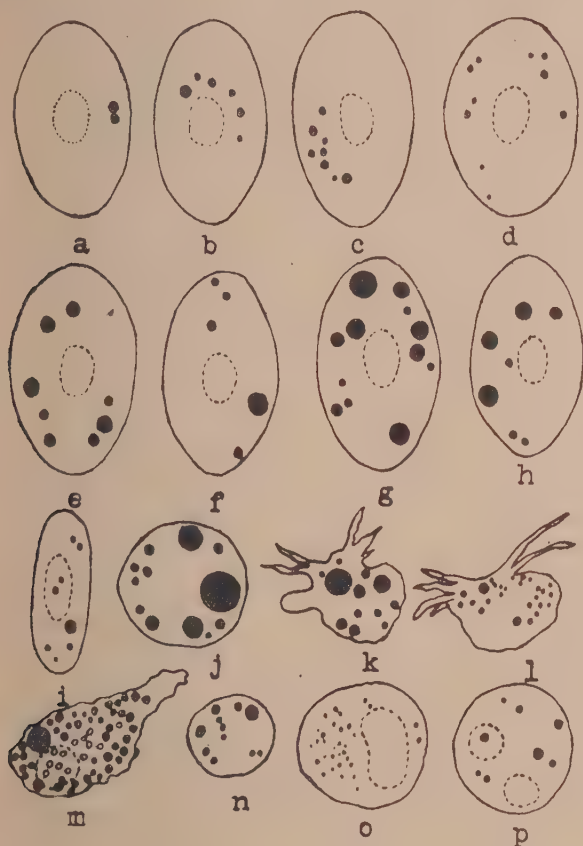


Fig. 1.

*a, b, c, d*, eritrociti di *Seps chalcides* trattati con Rosso neutro; 10 minuti dopo l'allestimento del preparato: si è messo in evidenza un numero variabile di granulazioni metacromatiche (in nero); il nucleo è tratteggiato; *e, f, g, h*, eritrociti del medesimo preparato, 6 ore dopo l'allestimento; i granuli sono aumentati di volume e di numero; *i*, trombocito, 1 ora dopo l'allestimento del preparato, colorato col Rosso neutro; *j, k*, granulociti neutrofili, trattati con Rosso neutro, 6 ore dopo l'allestimento del preparato; si notano diversi granuli e vacuoli metacromatici; *g*, granulocito a riposo; *k*, con pseudopodi; *l*, granulocito neutrofilo, trattato con Brillantkresylblau, 10 minuti dopo l'allestimento del preparato, in movimento ameboide; *m*, granulocito basofilo, in movimento ameboide; il nucleo è tratteggiato; si notano vacuoli metacromatici, granulazioni più piccole colorate e granulazioni incolore; *n*, linfocito trattato col Verde Janus, 1 ora dopo l'allestimento del preparato; *o*, granulocito neutrofilo, trattato con Verde Janus, 1 ora dopo l'allestimento del preparato; *p*, granulocito eosinofilo, 1 ora dopo l'allestimento del preparato, colorato con Verde Janus.

Disegni eseguiti alla camera lucida. Ingr. 1600 diametri circa.

*der Puffotter (Bitis arietans)*. «Verh. Anat. Ges.», 46. Vers. (1938); L. RAUNICH, *Ricerche sulla morfologia del sangue nella Lampreda di ruscello (Petromyzon planeri)*. «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», 20 (1936).

Negli eritrociti trattati con coloranti vitali (Rosso neutro, Brillantkresylblau) si ha la immediata colorazione di un numero vario, ma sempre scarso, di granuli metacromatici, disposti senza alcun ordine intorno al nucleo o nella parte periferica del discoplasma (v. fig. 1, *a, b, c, d*) (granuli primari); prolungando l'esposizione al colorante, questi granuli aumentano man mano di volume, diventando talora grossi vacuoli colorati in arancione col Rosso neutro, in Rosso porpora col Brillantkresylblau (v. fig. 1, *e, f, g, h*); contemporaneamente se ne formano dei nuovi 'granuli secondari', senza però che il numero complessivo superi la dozzina. Con l'andare del tempo questi vacuoli si scolorano e scompaiono. Il nucleo, fin che la cellula è vitale, si colora tenuissimamente in rosa; dopo la sua morte il nucleo si colora intensamente. Col Verde Janus invece non si mette in evidenza alcuna struttura particolare.

Fra gli elementi della serie bianca ho notato una notevole abbondanza di granulociti, mentre assai scarsi erano gli elementi linfocitari e i monociti. Ho pure incontrato qualche raro elemento a carattere immaturo. Fra i granulociti si distinguono nettamente i neutrofili, gli eosinofili e i basofili.

I granulociti neutrofili sono cellule che negli strisci appaiono come elementi rotondeggianti, di diametro medio  $9 - 11,5 \mu$ , con nucleo rotondeggiante (tipo mielocitico), reniforme (tipo metamielocitico) o segmentato (tipo polimorfo), ma per lo più non bene visibile, talora anzi del tutto nascosto dalle numerose granulazioni contenute nel citoplasma. Queste granulazioni sono di varia grandezza nella stessa cellula, disposte con una certa irregolarità, e si colorano in violetto col Giemsa, in violetto sporco col triacido. Il citoplasma si colora in grigio violetto chiaro col Giemsa; in qualche elemento di tipo mielocitico il citoplasma è lievemente basofilo.

All'esame a fresco presentano movimenti ameboidi, con emissione di lunghi pseudopodi sottili (fig. 1, *j, k, l*). Col Verde Janus si colorano numerosi e minuti condriosomi granulari (fig. 1, *o*). Col Rosso neutro e col Brillantkresylblau si colorano diversi granuli metacromatici, di varie dimensioni; le granulazioni specifiche, che si rivelano come minuti granuli rifrangenti animati da movimenti browniani, restano scolorati; prolungandosi l'esposizione al colorante, anche questi granuli aumentano di volume e di numero, assumendo talora l'aspetto di grossi vacuoli. Questi granuli e vacuoli metacromatici perdurano molto più a lungo nei granulociti che non negli eritrociti: anche quando questi ultimi sono già completamente scolorati, i granulociti sono ancora provvisti dei vacuoli colorati.

I granulociti eosinofili presentano un aspetto del tutto particolare, assai simile a quello descritto dal Babudieri<sup>(2)</sup> in *Chalcides ocellatus* (un altro Scincide) e in *Vipera ammodytes*. Sono elementi che negli strisci appaiono rotondi, del diametro di  $13,5 - 15,5 \mu$ , con nucleo bi-, tri-, o tetrasegmentato, con i segmenti disposti alla periferia della cellula, mentre l'interno è occupato da un certo numero, non molto cospicuo, di granuli eosinofili, di varie dimensioni, e disposti curiosamente a raggera, quelli più grandi alla periferia, i

(2) B. BABUDIERI, *Studi di ematologia comparata*. «Haematologica», 11 (1930).

più piccoli al centro. La zona periferica di citoplasma è completamente libera di granuli ed ha un aspetto ialino, lievemente tinto in celestino-grigio chiaro col Giemsa. A fresco mostrano movimenti ameboidi simili a quelli dei neutrofili.

Il Verde Janus colora pochi granuli di varia grandezza, ma piuttosto grossi, disposti irregolarmente (fig. 1, *p*). Col Rosso neutro e col Brillantkresylblau si colorano granuli metacromatici che presentano le medesime caratteristiche di quelli dei neutrofili.

I granulociti basofili sono elementi rotondeggianti o ovalari negli strisci, di dimensioni piuttosto piccole ( $6,8-8,2\mu$ ), col citoplasma infarcito di grossi granuli colorati in violetto cupo dal Giemsa, per cui il nucleo non è distinguibile. Anche i granuli si distinguono malamente nelle cellule integre per la loro disposizione fitta; si vedono bene solo negli elementi che si sono rotti con lo striscio, e appaiono allora di dimensioni variabili, ma sempre piuttosto grossi, di forma perfettamente sferica.

A fresco i granulociti basofili presentano movimenti ameboidi, con emissione di lobopodi. Col Brillantkresylblau si colorano numerosi granuli nel citoplasma (fig. 1, *m*) ma non in modo uniforme: una parte resta incolore e questi appaiono come goccioline rifrangenti sospese nel citoplasma; la maggior parte dei granuli invece si colora, parte in rosso violetto intenso, parte più debolmente in violetto rossiccio. Accanto a queste granulazioni si colorano anche alcuni grossi vacuoli metacromatici in rosso porpora. Questi ultimi probabilmente corrispondono ai vacuoli metacromatici che si mettono in evidenza coi coloranti vitali anche negli altri elementi sanguigni, mentre i primi dovrebbero corrispondere alle granulazioni specifiche; sappiamo infatti che le granulazioni basofile, a differenza da quelle eosinofile e neutrofile, assumono sopravvitalmente i coloranti vitali basici (3).

Come già detto, i granulociti erano gli elementi bianchi di gran lunga più abbondanti; la formula leucocitaria ha dato il 96 % di granulociti, con prevalenza dei neutrofili (48 %), seguiti dai basofili (25 %) e da ultimo dagli eosinofili (23 %). Il rimanente 4 % è dato da monociti (1 %), linfociti (1 %) e forme giovani (2 %).

Gli elementi di tipo linfocitario sono rappresentati da cellule di piccole dimensioni, con citoplasma scarso, basofilo, con nucleo grande, rotondo o reniforme, a grosse zolle cromatiniche. Col Rosso neutro e Brillantkresylblau si colorano pochi e piccoli granuli metacromatici nel citoplasma. Col Verde Janus si mettono in evidenza diversi granuli, alcuni di dimensioni abbastanza rilevanti (fig. 1, *n*).

Gli elementi di tipo monocitico sono cellule rotondeggianti, del diametro di circa  $7-9\mu$ , a citoplasma lievemente basofilo, più abbondante che nei linfociti, con nucleo ovalare o reniforme, a cromatina disposta in forma di reticolo lasso.

(3) Cfr. A. JOKL, *Ueber vitalfärbbare Erythrocytengranulationen* («Substantia metachromatica-granularis»), *beim Rochen, nebst weiteren Bemerkungen über das Blut diese Tiere*. «Z. mikr. anat. Forsch.», 2 (1925).

Le cellule fusiformi (trombociti) sono elementi delicatissimi, allungati, che negli strisci appaiono sempre alterati. Nei preparati a fresco hanno l'aspetto di corpicciuoli allungati, coi poli arrotondati, un po' più corti delle emazie e molto più stretti di queste, con citoplasma ialino, trasparente, e nucleo centrale, allungato; col Rosso neutro e Brillantkresylblau si colorano anche in essi alcuni granuli metacromatici sparsi (fig. 1, i). Negli strisci, causa la loro delicatezza, assumono tutte le forme possibili; il loro citoplasma si manifesta lievemente basofilo; il nucleo è chiaro a grosse zolle cromatiniche, ma sempre più o meno alterato dallo striscio. Sono molto abbondanti in circolo, contandosi circa 100-110 trombociti ogni 100 leucociti.

Sono da menzionare da ultimo gli elementi a carattere immaturo, pure questi piuttosto rari, rappresentati da cellule rotonde, piccole, a citoplasma intensamente basofilo, e con nucleo a cromatina finemente granulare.

**Antropologia.** — *Sulla litotecnica preistorica. — Esperimenti di fabbricazione.* Nota preliminare di M. O. ACANFORA, presentata (\*) dal Corrisp. S. SERGI.

Dell'esame tipologico degli strumenti litici fa parte, ed è essenziale soprattutto per le prime età preistoriche, lo studio della tecnica mediante la quale essi furono foggiate. Nella lentissima e graduale evoluzione dell'industria paleolitica, lo strumento di pietra rappresenta la testimonianza costante, spesso unica, della attività manuale dell'uomo pleistocenico, attività che presuppone e concreta un sia pur minimo lavoro intellettuale. Individuare quest'ultimo è studiare la tecnica e il metodo di fabbricazione degli strumenti litici.

Se pure un eccessivo uso del criterio tipologico nella classificazione delle industrie può portare (come ben ammonisce il Vayson) <sup>(1)</sup> ad errori fondamentali, lo studio semplice della tecnica può sempre fornire elementi sostanziali ed obbiettivi per la valutazione sia di un singolo tipo che di una classe di oggetti.

Non molti sono gli studiosi che svolsero in questo campo le loro indagini. Quasi esclusivamente <sup>(2)</sup> paletnologi francesi i quali ricercarono negli strumenti paleolitici il processo fabbricativo particolare per alcuni utensili <sup>(3)</sup>

(\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) A. VAYSON, *L'Etude des outillages en pierre*. «L'Anthr.», 1922, p. 1.

(2) Fra i paletnologi italiani qualche osservazione sulla litotecnica fece il RELLINI in *Essai de classification des couteaux et armes en silex taillés*. «L'Anthr.», XXVIII, 1917, p. 21. Egli tratta però solo di strumenti neo-eneolitici.

(3) Notiamo solo alcuni studi che hanno attinenza col nostro argomento: A. BARNES et H. KIDDER, *Differentes techniques de débitage à la Ferrassie*. «Bull. Soc. Prehist. de France», 1936, XXXIII, p. 272; A. CHEYNIER et A. BARNES, *Les lames à section triangulaire et les Pièces à Crete*. «Congr. Prehist. de France», XII, 1936; BOURLON et BOUYSSONIE, *Grattoirs carénés, rabots et grattoirs nucléiformes. Essai de classification*. «Rev. Anthr.», 1912, p. 473; BOURLON, *Observations sur la technique*. «Rev. Prehist.», 1908, p. 331.



e generale (scelta della pietra, distacco delle schegge, modo di esercitare la percussione, pressione ecc.)<sup>(4)</sup> per la maggior parte di essi. Lavori senza dubbio utilissimi anche se generalmente non escono da un campo strettamente sperimentale.

Fra gli strumenti ancora privi di un adeguato esame tecnico-tipologico è la lama (e la cuspidi) detta « a dorso abbattuto » (dal francese « à dos rabattu »), sulla cui fabbricazione non troviamo, pur tra i moltissimi autori che trattarono di questo così noto strumento, che pochi cenni di carattere generale ed imprecisi<sup>(5)</sup>. Può essere quindi utile uno studio particolare sull'argomento.

Una abbondantissima e spesso perfetta esemplificazione di lame e cuspidi « a dorso abbattuto » troviamo nell'armamentario della stazione-officina litica di Termini Imerese.

Sulla industria termitana, nella « Rivista di Antropologia » è in corso di pubblicazione un nostro lavoro<sup>(6)</sup> del quale diamo in anticipo un riassunto preliminare con i dati più essenziali.

Il Riparo sotto roccia « del Castello » a Termini Imerese ha rivelato, com'è noto<sup>(7)</sup>, una abbondantissima industria litica contenuta in uno strato culturale unico ed omogeneo con nella parte superiore pochi frammenti ceramici. In contrasto con la omogeneità dello strato culturale è la varietà dei tipi industriali in esso contenuti e solitamente attribuiti a diversi periodi culturali. Il che si prestò, nella conoscenza della stazione, ad attribuzioni diverse, suscitando questioni non ancora risolte. Si aggiunga la deficienza di precisi accertamenti stratigrafici e la parziale conoscenza del materiale in gran parte inedito.

Quest'ultimo è stato particolare oggetto della nostra illustrazione, mentre abbiamo cercato di studiare il carattere della industria termitana astraendo da qualsiasi teoria, basandoci solo sulla osservazione obiettiva degli oggetti stessi. Lo scopo principalmente perseguito è stato quello di riconoscere la tecnica con cui furono fabbricati gli strumenti litici, e ciò, sia osservando minutamente i pezzi, sia, praticamente, fabbricandone di simili. Particolare osservazione abbiamo dedicato agli avanzi di nuclei da cui furono tratte

(4) L. COUTIER, *Expériences de taille pour rechercher les anciennes techniques paléolithiques* « Bull. Soc. Prehist. de France », 1929, p. 172; F. BORDES, *Etude comparative des différentes techniques de taille du silex et des roches dures*. « L'Anthr. », XLI, 1907, p. 1.

(5) Le indicazioni più precise furono date da H. BREUIL, *Les gisements présolutréens du type d'Aurignac*. « XIII<sup>e</sup> Congrès d'Anthr. et Arch. Prehist. », Monaco 1907; *Les subdivisions du Paléolithique supérieur et leur signification*, ed. 1937. Più particolarmente ne trattarono C. OPHOVEN, *L'Aurignacien en Belgique, quelques pointes de La Gravette inédites provenant des gisements Belges*. « Bull. Soc. Prehist. de France », 1936; A. BARNES e H. KIDDER, *Differentes techniques de débitage à La Ferrassie*, « Bull. Soc. Prehist. de France » 1936, XXXIII, p. 272.

(6) *Tecnica di lavorazione nella stazione-officina litica di Termini Imerese*, nella « Rivista di Antropologia », vol. XXXV.

(7) Per la bibliografia sulla stazione e tutte le questioni connesse alla conoscenza della medesima v. il lavoro sopracitato.

le lame, agli strumenti incompiuti, ed alla grandissima quantità di lame di rifiuto o non utilizzate, di alcune delle quali ci siamo serviti per i nostri esperimenti di fabbricazione<sup>(8)</sup>. Le qualità di pietra generalmente usate nella stazione preistorica furono la selce e la quarzite (abbondanti nel luogo) solite di tutte le industrie litiche; esse furono lavorate con la medesima tecnica.

Sono presenti a Termini i principali strumenti litici del paleolitico superiore e mesolitico. A parte i bulini (che non compaiono che casualmente) e tutte le comuni lame brute o parzialmente ritoccate, gli strumenti principali e più distintivi sono (alcuni esemplari alla tav. I, 1-21): le lame e cuspidi « a dorso abbattuto »; i raschiatoi detti aurignaciani o grimaldiani (semplici, doppi, corti) di vario spessore e « carenati »; i microliti (ivi compresi quelli geometrici); i microbulini di tipo tardenoisiano.

Tutti questi strumenti fanno capo, comè metodo fabbricativo, alle lame « a dorso abbattuto ».

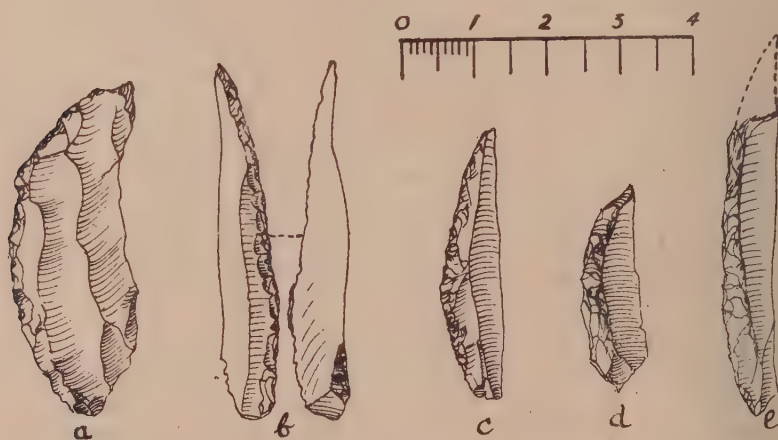


Fig. 1. - « Falsi » di cuspidi con margine dorsale abbattuto.

Premesso che con tale comune locuzione si intende in realtà « margine dorsale abbattuto », è utile anzitutto distinguere: lame con *sottile* margine dorsale abbattuto (tav. I, 6, 8), e lame con *spesso* margine dorsale, determinante non poche volte una formazione triedrica dello strumento (tav. I, 5, 7, 9, 16). Se per ritoccare le prime è sufficiente la semplice progressiva *pressione* con una robusta punta sul filo originario della lama, per le seconde è necessaria una *percussione* operata verticalmente sul margine.

Per operare agevolmente tale percussione è necessario anzitutto l'appoggio stabile della lama da ritoccare, il che si ottiene con un'incudine appo-

(8) Il nostro studio si basa sull'esame di tutto il materiale recuperato a Termini dagli scavi di E. GABRICI e di gran parte di quello precedentemente raccolto da G. PATIRI. Al Museo Nazionale di Palermo, dove si conserva la maggior parte del materiale, abbiamo potuto eseguire gli esperimenti di fabbricazione su lame non utilizzate della stessa officina preistorica. Ciò grazie al gentile interessamento della soprintendente dott.ssa J. Bovio Marconi ed al valido aiuto dell'assistente sig. G. Meli.

sitamente scanalata. Il modello di tale incudine ci è offerto da due grosse pietre, il cui uso pareva inspiegabile, rinvenute a Termini insieme all'industria<sup>(9)</sup>. Esse presentano in un dato punto della loro superficie delle scanalature artificialmente praticate, di diversa grandezza, in cui è possibile appoggiare una lama per il ritocco.

Il processo di lavorazione da noi praticamente sperimentato, è il seguente: Inserita entro la scanalatura dell'incudine la faccia dorsale di una lama bruta (che deve presentare ai colpi la faccia inferiore di stacco) si tiene fissa la lama stessa con la mano sinistra lasciando sporgere alquanto dalla scanalatura il margine da scheggiare; con un ciottolo percussore impugnato nella destra si colpisce ripetutamente il margine, regolando la violenza dei colpi secondo lo spessore della lama. Le superfici di stacco delle minuscole schegge che man mano si staccano a partire dal margine, invadono or più or meno la faccia opposta (dorsale) della lama terminando su di essa con una linea irregolare. Alla precedente figura 1, *a*, *b*, *c*, sono riprodotti alcuni «falsi» dei quali *a* e *b* fabbricati mediante percussione nel modo descritto; la cuspide *c* fu eseguita mediante percussione e pressione.

Talvolta il ritocco della base delle cuspidi tipo La Gravette è «inverso», cioè, la percussione essendo stata praticata sulla faccia superiore dorsale, le superfici di stacco delle minuscole schegge sono visibili sulla faccia inferiore della lama. Il ritocco della base sulla cuspide *b* della figura 1 fu appunto eseguito mediante percussione inversa.

Nelle lame o cuspidi a corpo triedrico — a sezione, cioè, triangolare — le scheggiature del ritocco anzichè terminare, come si è visto, con una linea irregolare, si interrompono nettamente a spigolo con la faccia superiore dorsale. Ciò avviene quando queste minuscole scheggiature, che dal margine della faccia di stacco raggiungono con progressiva distruzione la faccia dorsale opposta, si incontrano con una costolatura longitudinale di quest'ultima o con l'unica costolatura centrale se, come più spesso avviene, la lama ha sezione triangolare.

Per foggare questi strumenti infatti, scelta una lama preferibilmente a sezione triangolare (fig. 2), si distrugge (cioè si «abbatte») fino alla costolatura centrale (*b*) tutta una faccia longitudinale del dorso (*a*); si forma così una nuova sezione triangolare (*a'*) in cui uno dei lati è costituito dalle scheggiature del ritocco, che interessano tanto il piano di stacco che la corrispondente faccia anteriore dorsale.

Una volta creato lo spigolo sulla faccia anteriore si può (capovolgendo la lama) operare sul margine da esso costituito una nuova percussione perfezionando il ritocco già operato che mostra quindi scheggiature in opposte direzioni (v. anche tav. I, 5, 9, 16).

I diversi espedienti tecnici fin qui descritti non hanno in se stessi carattere esclusivo, ma tutti concorrono a costituire il metodo di fabbricazione

(9) Illustrate alla tav. VI del nostro lavoro già citato. La maggiore praticità è però offerta da una incudine, similmente scanalata, di legno.

comune per tutte le lame « a dorso abbattuto ». Infatti non di rado alcuni espedienti sono contemporaneamente applicati (pressione e percussione, ritocco diretto e inverso, formazioni parzialmente triedriche) per la fabbricazione di uno stesso strumento.

Per quanto riguarda poi la forma, il profilo esteriore, di questi strumenti, tutti sono ugualmente fabbricati con l'una o con l'altra – o con più d'una – delle varianti tecniche di cui sopra. Fra cuspidi del tipo di Chatelperron o di La Gravette, cioè a margine dorsale rispettivamente curvo o rettilineo, e i tipi derivati romboidi, triangolari, semilunari, non possiamo distinguere alcuna differenza nella tecnica fabbricativa. La uniformità di aspetto è anche accentuata dalla mancanza di fissità nelle forme stesse per cui di frequente esse di fondono in una maggioranza di forme intermedie.

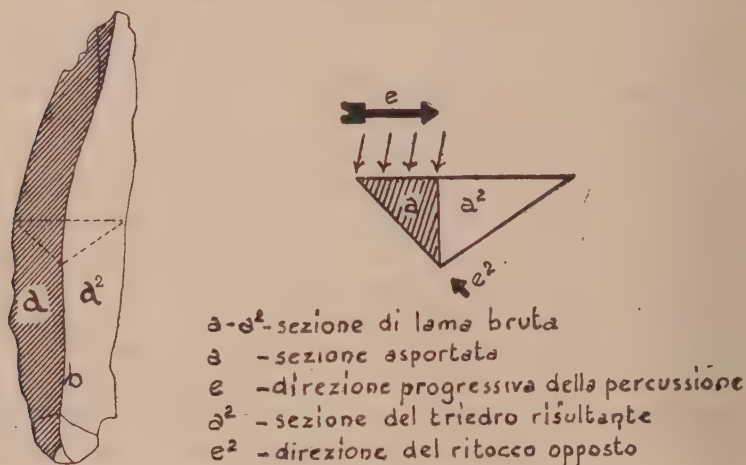


Fig. 2. – Lama a sezione triangolare e processo di ritocco indicato schematicamente su sezione (ingrandita) della lama stessa.

È chiaro il carattere unitario di tutta la produzione delle lame « a dorso abbattuto ».

Fissata la tecnica osserviamo la sua applicazione ad altre classi non meno vaste di strumenti.

Anzitutto a quella coeva dei raschiatoi aurigno-grimaldiani. La linea marginale di qualsiasi di tali raschiatoi altro non è che un comune margine dorsale abbattuto, ritoccato mediante percussione o, raramente, pressione, secondo le stesse opportunità e con gli stessi espedienti (compreso l'uso dell'incudine scanalata) che valgono per la lame e cuspidi. Significativo è un raro esemplare (tav. I, 1) in cui il ritocco, incontrando le costolature della faccia dorsale vi creò spigoli identici a quelli delle cuspidi a triedro.

Un particolare espediente per la fabbricazione dei raschiatoi è quello di troncare anzitutto con colpi forti e ben diretti la estremità opposta al bulbo della lama bruta per formare una « testa » del voluto spessore. A questa prima percussione sono dovuti solitamente i lunghi distacchi verticali che



negli esemplari « carenati » o « rostro carenati » raggiungono nella estremità più spessa le costolature dorsali (tav. I, 4). Lo strumento viene poi tutto rifinito con un ritocco marginale, spesso di grande finezza, non inferiore certo a quello delle cuspidi. Furono così ottenuti i « falsi » figg. 24 e 27 della tavola I.

Ma dove, infine, il ritocco del « dorso abbattuto » raggiunge la sua perfetta espressione è nella fabbricazione dei microliti.

In questa classe di strumenti non possiamo, a rigore, per lo strumentario termitano, distinguere microliti riproducenti in piccolo i comuni utensili — lame, cuspidi, raschiatoi — e microliti geometrici; poichè anche le forme geometriche — triangolari e semilunari (quasi assenti i trapezi) — sono rappresentate fra gli utensili maggiori come forme derivate dalla cuspidi « a dorso abbattuto ». A parte ciò, non è neanche possibile una distinzione nella tecnica di fabbricazione, perchè essa è indistintamente la medesima per ogni tipo di microliti. Nè i microliti geometrici sono « tagliati » su lama (metodo più rischioso ed estraneo alla tecnica comune), ma anch'essi ricavati da lamette e frammenti di lame mediante progressiva distruzione del margine delle stesse, sempre con lo stesso metodo già illustrato. La prova pratica ci ha più volte mostrato la relativa facilità di ottenere simili strumentini. Così per i « falsi » Tav. I, 25, 26, 29.

Non è facile piuttosto la fabbricazione delle lamette e cuspidi microlitiche: Data la estrema sottigliezza di esse, viene accresciuto al massimo il pericolo di una frattura trasversale del pezzo durante il lavoro di ritocco. Questo pericolo, costante durante la lavorazione di qualsiasi lama, è in certo modo ovviato nei microliti geometrici i quali presentano una superficie relativamente larga rispetto alla lunghezza e sono spesso ricavati da un frammento di lama già naturalmente spezzatosi nel suo punto più debole.

Infatti, mentre furono facilmente ottenuti i « falsi » geometrici, quelli ritoccati su sottili lamette (Tav. I, 23, 28) presentarono la maggiore difficoltà fra tutti gli esemplari da noi fabbricati.

Ed eccoci, infine, ad un ultimo gruppo di strumenti: i microbulini del tipo detto « tardenoisiano » con intaccatura laterale ritoccata e punta determinata sulla faccia inferiore da scheggiatura obliqua subtriangolare (Tav. I, 17, 21).

Questi oggettini, la cui fabbricazione fu già oggetto di studio<sup>(10)</sup>, rientrano anch'essi, in linea generale, nell'ambito degli strumenti ottenuti con ritocco mediante pressione o percussione su margine di lama come quello di ogni « dorso abbattuto ». Sono sempre infatti fabbricati su lame (o frammenti) e col solito metodo fu eseguito il ritocco della intaccatura laterale.

Quanto alla caratteristica sbieatura subtriangolare della punta, essa fu certamente ottenuta con un colpo netto praticato sempre verticalmente

(10) L. SIRET, *La taille des trapèzes tardenoisienues*. « Revue Anthr. », XXXIV, 1924, nn. 3-4; E. VIGNARD, *Les microbulins tardenoisienues du Sebilien*. « Congrès Préhist. de France », X, 1931, p. 66.

sul margine, nella intaccatura. Nel particolare modo con cui fu praticato il colpo o negli espedienti che accompagnarono la percussione sta la riuscita della tipica formazione della punta.

Per parte nostra, malgrado l'esperimento di non pochi espedienti (compreso l'uso di una incudine a cresta, già segnalato dal Vignard <sup>(11)</sup>, non abbiamo ottenuto che insuccessi. Una sola punta tipica da microbulino ci è risultata da pressione esercitata sul margine di una lametta mentre si praticava l'intaccatura laterale (tav. I, 22).

Alla estremità di alcuni strumentini microlitici termitani (tav. I, 19 20) abbiamo osservato una scheggiatura subtriangolare da microbulino risultata, pare, casualmente, durante il ritocco del margine dorsale. Questi esempi possono essere utili se non ad indicare con certezza il metodo di fabbricazione, piuttosto a suggerire il primo sorgere di questi utensili nell'ambito e dalla tecnica stessa degli strumenti « a dorso abbattuto ».

Utensili e non rifiuti di fabbricazione dei microliti geometrici furono i microbulini termitani: anzitutto perchè essi talvolta mostrano qua e là altri ritocchi marginali e tracce di uso alla punta; in secondo luogo perchè i microliti geometrici termitani (che sono in numero notevolmente maggiore dei microbulini) furono (come già prima esposto) ricavati e non « tagliati » su lama, nè staccati col metodo detto « del microbulino ».

Sulla base delle esperienze tecniche fin qui esposte i tipi strumentali termitani ci appaiono strettamente collegati da un medesimo metodo di fabbricazione. Ne deriva un aspetto fondamentalmente unitario per tutta l'industria di Termini, elemento di non lieve importanza per la valutazione culturale della stazione preistorica.

Base dell'industria litica è la lama « a dorso abbattuto » e i microliti (non geometrici) ne rappresentano il perfezionamento tecnico, forse occasionale, certo non rigidamente progressivo nel tempo. Anche la fabbricazione dei microbulini rientra nell'ambito della stessa tecnica, pur presentando qualche elemento diverso.

Il problema rappresentato dalla stazione di Termini era impostato essenzialmente, come si è prima accennato, sulla diversità del materiale in essa rinvenuto; l'industria litica era scomposta in elementi del paleolitico superiore e mesolitico. Le nostre osservazioni dimostrano, al contrario, la omogeneità di tale industria, omogeneità in accordo con la continuità dello strato culturale.

Nel nostro più ampio studio sull'argomento <sup>(12)</sup> riportiamo poi la generale attribuzione cronologica nell'ambito della cultura grimaldiana di cui la stazione di Termini fa parte.

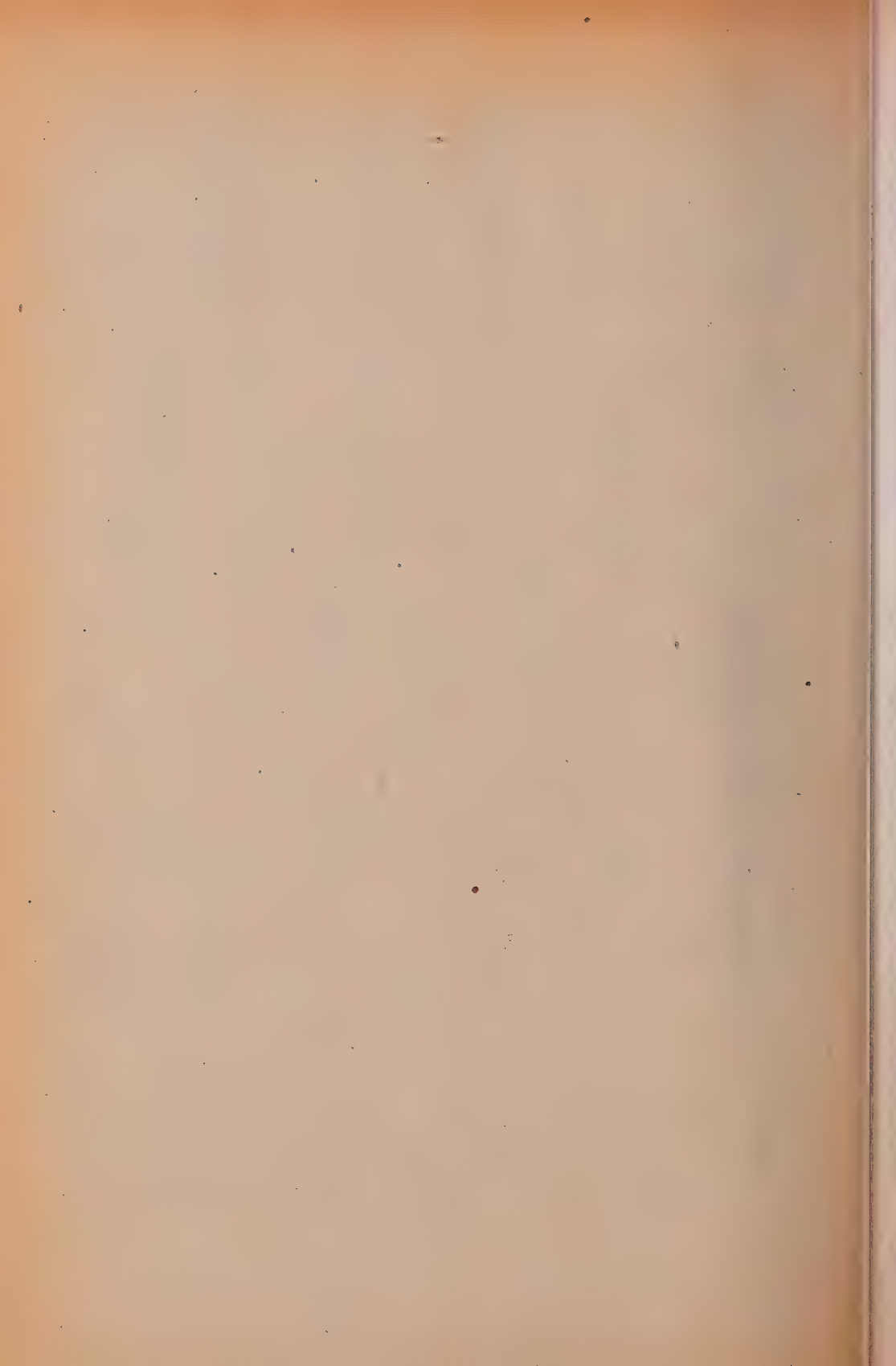
Tornando ora all'argomento generale che qui specialmente interessa, possiamo infine concludere come la tecnica del margine dorsale abbattuto indipendentemente da possibili differenziazioni di aspetti culturali, legghi la

(11) Op. cit.

(12) *Tecnica di lavorazione* ... cit.



STRUMENTI LITICI DI TERMINI IMERESE: raschiatoi (1-4); lame «a dorso abbattuto» di tipi diversi e microliti (5-16, 18); microbulini (17, 19-21); «FALSI»: raschiatoi (24, 27); microliti (23, 25, 26, 28, 29); microbulino (22).





maggior parte della produzione su lame del paleolitico superiore e mesolitico. Infatti, proprio il particolare studio tecnologico intrapreso per le lame e cuspidi « a dorso abbattuto » ci ha condotto ad allargare successivamente il campo delle nostre esperienze comprendendovi le classi dei raschiatoi e dei microliti.

Le osservazioni fatte per lo strumentario di Termini si potranno applicare dovunque lo stesso complesso di utensili litici caratterizzi un aspetto industriale.

## COMMEMORAZIONI

**Storia delle Scienze.** — *L'avverso destino di Evangelista Torricelli.* Nota (\*) del Socio G. LORIA.

### NEL TRICENTENARIO DELLA MORTE.

1. Aveva di poco oltrepassata l'adolescenza quando il Torricelli (nato nel 1608) per suggerimento di un suo zio paterno si trasferì a Roma con lo scopo di proseguire gli studi scientifici, per cui aveva dimostrata una spiccata attitudine scientifica, raccomandato a Benedetto Castelli, professore alla Sapienza e lustro della Corte del Papa Urbano VIII. Quale sia stato il *curriculum* dei suoi studi non è noto, ma se ne conoscono i risultati. Dei contatti da Lui avuti col suo maestro, considerato allora come la massima autorità in fatto d'idraulica pratica, trae origine un suo scritto *Sulla bonifica della Valle di Chiana* presentato nel 1645, dietro sua richiesta, al Principe Leopoldo de' Medici. D'altronde, certamente per consiglio del suo maestro, egli studiò i *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* di Galileo; ne è indubbia prova una Memoria di Torricelli che tratta *De motu gravium naturaliter descendentium*, ispirata a questa grande opera, Memoria la quale esercitò un'influenza decisiva sull'intera sua vita; giacchè il Castelli, avendo riconosciuto l'indiscutibile valore di quello scritto, lo recò al sommo scienziato declinante, in una sua visita ad Arcetri; e Galileo, a cui il Torricelli non era un ignoto, gli offrì ospitalità nella propria villa, affinché lo aiutasse a redigere le *Lezioni* che il Grande Vecchio, nell'insonne travaglio della sua mente, aveva concepito in aggiunta all'opera dianzi citata. Il Nostro non esitò ad accettare; ma in causa di precedenti impegni, non poté raggiungere Arcetri prima del 10 ottobre 1641; tosto ebbe inizio la progettata collaborazione; ma, per sventura di entrambi e della scienza, fu troncata l'8 gennaio 1642 per la scomparsa del più grande dei partecipanti.

2. Durante il suo soggiorno a Roma, il Torricelli passò ben presto da alunno ad investigatore originale; come tale si fece conoscere, a tacer d'altri,

(\*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1947.

da un dotto francese residente ivi, il P. Niceron, il quale nel 1640 gli suggerì di porsi in rapporti epistolari con i matematici Francesi. Fra essi certamente emergeva il P. Mersenne, che disimpegnava allora l'utile ufficio di raccogliere, per poi diffonderle, notizie intorno ai progressi che la matematica andava compiendo in Francia ed altrove. Il Torricelli seguì tale consiglio; ne sono prova le lettere, tuttora esistenti, da Lui ricevute dal Mersenne, ed inoltre il prezioso *Racconto d'alcuni problemi preposti e scambiati scambievolmente* fra i matematici di Francia e Lui, preziosa fonte d'informazione sulla vita scientifica del nostro illustre connazionale.

3. Tutto conduce a credere che nel breve periodo ottobre 1641-gennaio 1642, durante cui Egli assistette Galileo, s'ia fatto tanto apprezzare che, avvenuta la scomparsa del Maestro, mentre si apprestava a far ritorno a Roma, il Granduca regnante lo trattenne a Firenze collo stesso grado di cui fruiwa Galileo, di suo « primo matematico e filosofo », con l'obbligo d'insegnare nello Studio fiorentino e nella locale Accademia di Disegno.

Seguì allora il periodo più fecondo della Sua breve esistenza. Riflettendo sopra qualche discorso che Egli ebbe con Galileo, giunse allora alla memorabile scoperta della pressione atmosferica ed all'invenzione del barometro, scoperta e invenzione che, d'un balzo lo fecero conoscere ed ammirare in tutta Europa. D'altro lato il Suo benemerito protettore si dichiarò pronto a sostenere le spese di stampa per un volume in cui sono esposti i risultati degli studi geometrici da Lui fino allora compiuti. Questo volume dimostrò come in Lui il matematico non fosse inferiore al fisico; esso permette oggi di formarsi un concetto della evoluzione del Suo pensiero matematico.

4. Infatti in una Prima Parte Egli si rivela discepolo dei Greci, chè essa potrebbe fungere quale Appendice agli *Elementi* di Euclide, tenendo conto delle opere di Archimede. Lo si riconosce notando che i *Solidi sferali*, ivi classificati e misurati non sono che le figure nascenti dalla rotazione di un poligono regolare attorno ad una retta condotta dal centro ad un vertice o perpendicolarmente ad un lato. La II Parte — indubbiamente scritta molto più tardi — mostra l'autore perfettamente al corrente dei procedimenti allora in uso per applicare con rigore il concetto d'infinito alla misura delle figure geometriche. I numerosi casi in cui il Torricelli si arresta a compiere una stessa ricerca, tanto col metodo di esaustione, quanto con la geometria degli indivisibili, mostrano essersi Egli proposto di dimostrare che la recente procedura era pari in potenza dell'antica, compito di somma importanza dati i dubbi sorti in quel tempo sul valore dei neonati concetti cavalieriani. I problemi da Lui risolti, considerati anche indipendentemente da questo scopo, sono per sè pieni d'interesse. Il primo concerne la quadratura della parabola, a cui Egli giunse per non meno di venti strade differenti fra loro e da quella battuta da Archimede. Segue la trattazione di una questione allora all'ordine del giorno, la quadratura della cicloide; poi la dimostrazione di un fatto di apparenza paradossale, cioè la finitezza del volume generato dalla

rivoluzione d'un'iperbole attorno ad un proprio asintoto. Chiude il volume la determinazione del volume generato da un'area piana qualunque, animata da un movimento elicoidale, il cui asse stia nel piano della curva considerata, questione la cui importanza risulta dal fatto che occupò in tempi a noi vicini alcuni altri matematici (senza però ricordare chi per primo l'aveva studiata!) <sup>(1)</sup>.

5. Avvenuto il Suo definitivo stabilimento a Firenze, malgrado gli obblighi dell'insegnamento da Lui scrupolosamente adempiuti (e di ciò esistono prove indubbie fra i manoscritti da Lui relitti), il Torricelli continuò con inesausta lena, le ricerche, cogliendo frutti di indiscutibile valore. Fu allora (1644) che giunse a determinare il baricentro dell'area compresa fra una cicloide e la sua base; mostrò poi, sull'esempio della spirale logaritmica, la possibilità di rettificare una curva; prima di Huygens dedicò alla curva logaritmica (hemyperbole logaritmica) un'esauriente trattazione, ove di essa sono dimostrate le proprietà essenziali. Inoltre compose alcuni saggi dedicati alle curve di recente scoperte (parabole, iperboli, spirali) col proposito di comporne una monografia dal titolo *De lineae novis*, a cui attribuiva con ragione notevole importanza; e poichè non esisteva in quel tempo la stampa periodica a carattere scientifico, Egli propose al Cavalieri di inserirla in un volume che stava stampando (è quello dal titolo *Exercitationes mathematicae Libri sex*); l'avversa sorte, con la morte di entrambi, vietò l'effettuazione di questo progetto. Del Cavalieri Egli godeva tale e tanta stima che, nel periodo conclusivo della sua travagliata esistenza, il celebre Gesuato ricorse a Lui (e non invano) per la soluzione di un problema sul cilindro parabolico. Altri lavori del Nostro hanno carattere generale e teorico: uno ve n'ha sopra i massimi e minimi, argomento di cui Egli si occupò in varie occasioni <sup>(2)</sup>. Scopo di altri è l'esame critico dell'uso dell'infinito in geometria e dei concetti basilari della geometria degli indivisibili, argomento questo d'attualità chè erano sorti, al loro apparire, molti dubbi sulla loro legittimità:

6. Questo intenso lavoro matematico non costrinse il Torricelli ad abbandonare la fisica. In quegli anni dedicò la propria attività alla politura delle lenti, in quanto hanno funzione essenziale nella costruzione dei cannocchiali. Dei concetti che lo guidavano in tali lavori Egli era gelosissimo e li confidò soltanto agli amici Cavalieri e Magiotti, mediante lettere che andarono perdute; per ciò, e per altre dolorose circostanze di cui diremo più avanti, riguardo ad essi grava un impenetrabile, eterno silenzio.

(1) Ricordiamo gli scritti: N. FERGOLA, *La vera misura delle volte a spira* («Atti della R. Accademia delle Scienze e Belle lettere», Napoli 1788); G. KÖNIGS, *Sur les volumes engendrés par un contour fermé dans un mouvement quelconque* («Comptes rendus», 21 Mai 1888).

(2) Limitiamoci a ricordare il problema, da Lui detto *delle tre linee brevissime*, che consiste nella ricerca del punto del piano di un triangolo, tale che risulti minima la somma delle sue distanze dai vertici.



7. Le scoperte compiute in vari campi dal Torricelli, aprivano il cuore alla speranza che Egli, giunto ormai alla Sua piena maturità, altre, ancora più cospicue fosse chiamato a compiere. Ma il destino che, sino a quel giorno Gli si era mostrato benigno, si scatenò contro di Lui in modo implacabile. Ed invero nel 1647 Egli fu colpito da una malattia contro cui la medicina del tempo non aveva armi. All'approssimarsi del Suo ormai inevitabile tramonto, Egli diede all'amico Serenai precise disposizioni concernenti la sorte dei manoscritti tuttora inediti. Riguardo a quelli di fisica ordinò che i vetri intorno a cui aveva lungamente lavorato, fossero affidati, insieme alle carte esplicative, al Principe suo protettore; ora, questi le passò, esigendo ogni garanzia, ad un noto discepolo dello Scomparso, Vincenzo Viviani. Ma questo non si dimostrò degno di tanta fiducia, giacchè, con imperdonabile negligenza (della quale fu aspramente rimproverato da fedeli ammiratori del grande Faentino), nel proprio testamento non diede alcuna disposizione relativa a quel prezioso deposito; in conseguenza se ne è perduta ogni traccia e si è ridotti a semplici congetture intorno al suo contenuto.

Riguardo ai suoi scritti geometrici, il Torricelli ordinò al Serenai, suo esecutore testamentario, che, avvenuta la sua morte, venissero inviati a Bonaventura Cavalieri e Michelangelo Ricci, affinchè li esaminassero e decidessero quanto fosse meritevole di venir dato alle stampe (il Granduca si era già dichiarato disposto a sostenere la spesa della relativa stampa). Se non che, la morte del primo ed il rifiuto del secondo resero vana questa saggia disposizione; e senza risultati ebbero eziandio i congeneri tentativi compiuti dal Serenai. Miracolosamente salvatisi (non avendo il Viviani provveduto alla conservazione di quegli importantissimi cimeli) essi finirono per trovare sicuro asilo nella Biblioteca di Firenze <sup>(3)</sup>.

8. Immenso fu il danno che, non soltanto il Torricelli, ma la matematica tutta, risentirono per il lungo periodo durante cui tanti lavori rimasero sconosciuti e sterili; per rendersene conto basta avere presenti le vicende della nostra scienza durante il secolo XVII: gli è allora che una schiera di matematici appartenenti a vari paesi d'Europa, prepararono la creazione della nuova analisi destinata a recare le firme di Leibniz e Newton; ora chi può ragionevolmente dubitare che il Torricelli, che aveva speso tante veglie sulla rettificazione e la quadratura delle curve, sulla determinazione di baricentri e alla risoluzione di questioni di massimi e minimi, non avrebbe man-

(3) Nel frattempo la sorte nemica non rispettò il Nostro neppure nella pace del sepolcro; infatti nel 1658, un eminente matematico, B. Pascal, in uno scritto a pretese storiche (*l'Histoire de la roulette*) lo dipinse sotto l'aspetto di un servo infedele che, non appena spirato il padrone, fruga nelle carte da lui lasciate e s'impadronisce delle più preziose. Subito un'amico, Carlo Dati, in base a inoppugnabili documenti, dimostrò trattarsi di preta calunnia che il Torricelli avesse carpito ai matematici francesi la dimostrazione della quadratura della cicloide. Tuttavia (quasi a conferma di una massima resa popolare da Molière) quella indegna affermazione si ritrova nell'opera di P. DUHEM, *Les Origines de la statique* (Paris 1906), giacchè a p. 205 del II volume si leggono le parole: «l'étrange larcin dont il "(Roberval)" fu victime de la part de Torricelli».



cato di assumere un posto di comando in quel glorioso esercito di combattenti ?

9. Questo forzato letargo a cui fu condannata l'opera di Torricelli, si prolungò per oltre due secoli. Gli è soltanto verso la fine del secolo XIX, che alcune pubblicazioni che ad esso si riferiscono, richiamarono l'attenzione degli studiosi su questa deplorabile circostanza, facendo presente essere imprescindibile dovere dell'Italia risorta a nazione, di porre in valore tutta la grandezza di colui che era stato decoro della scuola di Galileo. Dell'obbligo di pubblicarne tutte le opere si fece autorevole interprete un Congresso internazionale riunito a Roma in principio del presente secolo. A questa esortazione non rimase sorda la patria di Torricelli; in occasione del terzo Centenario della Sua nascita, essa assunse e, malgrado inattese difficoltà sopraggiunte<sup>(4)</sup>, e portò a termine<sup>(5)</sup> la magnanima impresa.

Questa, finalmente, permette di misurare completamente il contributo da Lui dato alle matematiche e di determinare la posizione che Gli compete nello sviluppo di esse. Egli visse quando non era ancora spenta l'eco della scoperta italiana della risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado; quando, ad opera del Viète, l'algebra stava assumendo la funzione direttiva di tutto il movimento scientifico. Ora di tale metamorfosi il Nostro si mostrò inconsapevole sdegnoso od almeno ad essa indifferente, chè in tutti i Suoi scritti non escluso il carteggio, si cerca indarno una formola algebrica od un cenno di questa nuova direzione che stava assumendo la ricerca matematica. Maneggiando egli con ammirevole disinvoltura i metodi di Archimede e Cavalieri, si mostrò sempre convinto che essi erano così potenti ed agili, da essere pronti ad affrontare qualunque battaglia ed a celebrare ulteriori trionfi; in conseguenza non reputò opportuno di volgere la mente ad altri procedimenti euristici. Chi condivide tale convinzione, ne trae conferma di una delle più spiccate caratteristiche delle scienze esatte, quella cioè, secondo cui essa, è con instancabile vigore, eleva nuovi edifici, senza abbattere gli antichi: nessuno scrittore ne offre prove più convincenti delle Opere di Torricelli.

(4) Alludesi qui allo scoppio della prima conflagrazione mondiale.

(5) *Opere di Evangelista Torricelli edite col concorso del Comune di Faenza da Gino Loria e Giuseppe Vassura* (Faenza 1919 e 1944).

## Rievocazione di Ettore Marchiafava nel centenario della sua nascita

letta (\*) dal Socio D. DE BLASI

Nel mese di giugno, prima che l'Accademia prendesse le sue vacanze annuali, in private conversazioni svoltesi in questa sede, alcuni Consoci rammentavano che nell'anno 1947 cade il centenario della nascita di uno dei più insigni Lincei, ETTORE MARCHIAFAVA, morto dodici anni or sono; e prospettavano l'opportunità che di tale ricorrenza fosse fatto esplicito ricordo in una delle ultime sedute dell'anno.

Il nostro Presidente, vigile promotore delle buone iniziative, accolse cordialmente la proposta e, d'accordo coi Soci che l'avevano avanzata, conferì l'onorifico ed arduo incarico alla mia persona, tenendo più di ogni cosa presente la circostanza che fra i membri dell'Accademia io sono oggi l'unico che, essendo stato discepolo del Marchiafava, gli sia poi rimasto spesso vicino per molti anni, sempre sul terreno delle ricerche e delle organizzazioni scientifiche: infatti ho goduto a lungo l'inestimabile privilegio di far tesoro, senza interposte persone, dei preziosi insegnamenti e dell'esempio di un così grande Maestro di scienza e di vita.

Ho detto che l'incarico è arduo pensando sopra tutto al fatto che nella seduta accademica del 2 febbraio 1936 Egli fu degnamente commemorato dall'eminente Anatomo-patologo Antonio Cesaris-Demel, il quale morì anche lui dopo soli due anni, ed alla cui Memoria noi tutti c'inchiniamo reverenti. Ho voluto rileggere quell'orazione commemorativa, e l'ho riletta con zelo e commozione, perchè essa illustra egregiamente, in forma ordinata precisa e compiuta, le singole ricerche scientifiche di Ettore Marchiafava, tutte importanti e non poche veramente nuove, aventi cioè il carattere di scoperte originali; perchè in essa l'oratore lueggia e ravviva, con parola nitida calda ed elevata, la complessa nobilissima figura del Maestro, che non fu soltanto uno studioso di vasta e molteplice operosità scientifica, ma anche uno squisito umanista, un forbito scrittore di poderosi trattati e monografie, universalmente apprezzati e tradotti in diverse lingue. Egli fu un uomo di alte virtù morali e civili, amantissimo del bene del prossimo, quindi anche praticamente attivo nei campi della Medicina e dell'Igiene sociale, fondatore e fervido promotore di benefiche opere di tutela sanitaria e di assistenza a malati, convalescenti e indigenti. Egli fu nei Consigli Superiori della Pubblica Istruzione e della Sanità pubblica ed in altri consessi, ma

(\*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

sopra tutto nel Senato, assertore ascoltativissimo dei principî fondamentali dell'Igiene eubiotica e profilattica, ed efficace propugnatore di leggi adeguate: insomma un vero apostolo di carità, oltre che uno scienziato di fama mondiale.

Il Cesaris-Demel ricorda anche, e commenta simpaticamente, le varie commemorazioni che Ettore Marchiafava ebbe a fare di uomini illustri, come quelle di Guido Banti, di Pio Foà, di Recklinghausen, di Klebs, di William Osler, di Luigi Pasteur. Prima di discorrerne singolarmente, egli manifesta la seguente opinione: «Necessario è anche il ricordare, per il loro intrinseco «valore, le commemorazioni che Marchiafava ci lasciò (molte lette in questa «Accademia) di persone illustri nel campo della scienza, giacchè ognuna «non solo ci dà una precisa cognizione di quanto colui che Egli ha fatto rivi- «vere nel ricordo ha scritto nel grande libro del Sapere, ma ci permette di «meglio conoscere attraverso il prisma dei ricordi personali, dei giudizi, «dei riferimenti, l'animo nobilissimo di Marchiafava nelle sue più delicate «sfumature.

«Troviamo così nelle accorate parole colle quali Egli rievoca e vivifica «coll'efficacia del ricordo e della ammirazione, le bellè figure di Angelo Celli, «suo compagno di gloria e di lavoro, di Amico Bignami e di Antonio Dio «nisi, suoi diletti allievi e collaboratori (. . . .) troviamo dico tutta la paterna «riconoscenza che Egli sentiva per l'opera da loro compiuta a complemento «ed in continuità della propria, e la compiacenza che almeno Celli "si sia «spento nella visione dell'Italia redenta dalla malaria" . . . .».

Mentre leggevo queste parole mi sovvenne che io possedevo il manoscritto della commemorazione che ETTORE MARCHIAFAVA fece di Angelo Celli all'Accademia di Medicina di Roma il 28 febbraio 1915, e con un sussulto dell'animo intravvidi subito che la presentazione di quel manoscritto sarebbe riuscita graditissima ai Soci di questa Accademia in occasione del centenario della nascita di Colui che ne era stato l'Autore. Nel 1915 io ero Segretario dell'Accademia di Medicina, ed il Professor Marchiafava, appena terminata la commemorazione, mi consegnò il manoscritto per la stampa negli atti accademici: quando fu pubblicato il relativo fascicolo, mi recai da Lui per riportargli il manoscritto, ma nello stesso tempo gli rivolsi la preghiera di farmene dono, perchè desideravo conservarlo come ricordo di Lui stesso e di Angelo Celli, del quale Egli era stato compagno di lavoro ed amico, ed io affezionato allievo e collaboratore. Egli acconsentì con visibile compiacimento, e così fu esaudito il mio desiderio. Ecco, illustri Consoci, quel manoscritto prezioso, che è per me, come ben comprendete, doppiamente caro.

Questo manoscritto è un documento tangibile della vita dell'Uomo che intendiamo onorare: i piccoli fogli che lo compongono sono stati chi sa quante volte da Lui maneggiati; essi ci ricordano la Sua esistenza corporea, ci consentono quasi di vederlo ancora in mezzo a noi, di ravvivare nella nostra mente la sua figura alta, diritta, asciutta, austera e bonaria insieme; questi piccoli fogli suscitano in noi un'apparizione spirituale dell'Uomo. Orbene, tale apparizione sarà ancora più suggestiva se mettiamo una voce umana

a servizio di questo manoscritto: così da esso si sprigionerà una rievocazione acustica, parallela a quella visiva, una rievocazione anche nel senso etimologico del vocabolo: così diventerà per noi parola parlata la parola pensata da Lui, il suo *verbum mentis* esteriorizzato e trasfuso su queste cinquantadue cartelle vergate dalla sua scarna mano. La sorte vuole che tale voce rievocatrice sia la mia, e quindi io leggerò con profonda reverenza il contenuto della prima e dell'ultima cartella, e di alcune altre che riguardano gli studi e le opere nel campo della malaria, dove il Commemorante ed il Commemorato spesso accomunarono le loro forze. Per non affaticare la vista, leggo una copia dattiloscritta, mentre con l'immagine di Marchiafava davanti agli occhi della mente, vogliamo tutti di proposito illuderci di ascoltare la Sua propria parola.

« In una piccola villa, presso Monza, nel crepuscolo melanconico del giorno dei morti del 1914, morì Angelo Celli, nato a Cagli nelle Marche, il 25 marzo 1857.

In questa Accademia di medicina di Roma della quale fu socio e ben meritò, e ove, si può dire, non è ancora spenta l'eco di quelle importanti discussioni sulla profilassi della malaria nelle quali prese così viva parte Angelo Celli, conviene che egli sia ricordato con sincero rimpianto. Ed io, che fui scelto a questo onore, lo farò evitando mi faccia velo l'amicizia che a lui mi univa da oltre trent'anni.

Angelo Celli terminò la carriera universitaria in un periodo memorabile della medicina: cioè quando ai progressi della clinica, dell'anatomia patologica e della patologia sperimentale convergente ad una vera fisiopatologia, si erano congiunte le ricerche sulla etiologia dei morbi infettivi eseguite con metodi adeguati e quindi già feconde di vere e durature scoperte ».

« Fin dal 1883 A. Celli si occupò con Marchiafava della malaria. Da poco tempo le ricerche di Tommasi-Crudeli e di Klebs, che pur troppo non raggiunsero lo scopo prefisso, e poi quelle di Laveran in Algeria, che riuscirono a mettere in evidenza il vero parassita della malaria, avevano stimolato allo studio del problema etiologico di questa malattia di tanto interesse per l'Italia.

Ora, dopo la scoperta di Laveran e dopo che Marchiafava aveva dimostrato che il pigmento malarico non si forma nella milza, come ritenevano Virchow, Frerichs e Mosler, nè nel plasma del sangue dalla emoglobina dissociata dai globuli rossi, come ritenevano Arnstein e Kelsch, ma dentro i globuli rossi, A. Celli studiò con Marchiafava la malaria dell'Agro Romano e delle Paludi Pontine. I fatti più noti messi in evidenza furono la sede endoglobulare del parassita, le forme ameboidi senza pigmento e la loro importanza clinica, la descrizione del parassita dalla fase apigmentata, ameboide alle forme di scissione, l'accumulo delle forme di scissione dei parassiti nei capillari del cervello nelle perniciose, la necrosi *ottonata* dei globuli rossi parassitiferi ecc.



Dopo le classiche scoperte del nostro Golgi sopra i parassiti della quartana e della terzana benigna, e il rapporto del ciclo di vita di questi parassiti con le vicende febbrili, nel settembre del 1889, si dette da Celli e da Marchiafava la prima descrizione di un'altra specie parassitaria malarica, cioè dei parassiti delle febbri dominanti nell'estate e nell'autunno a Roma, delle febbri gravi in confronto delle altre onde origina la perniciosità malarica. Con quella descrizione si differenziò chiaramente il parassita delle febbri estivo-autunnali, delimitando così il gruppo di queste febbri per caratteri endemologici, clinici e parassitari, aggiungendosi che il parassita di queste febbri è così diverso per l'aspetto morfologico e per il comportamento biologico da quelli della quartana e della terzana benigna, che al primo esame microscopico può farsene la diagnosi.

La descrizione data del parassita delle febbri estivo-autunnali fu confermata nei fatti fondamentali da tutti gli autori che se ne sono occupati in seguito, compreso Roberto Koch, il quale chiamò il nostro parassita delle febbri estivo-autunnali, il parassita della febbre tropicale, che è la *terzana maligna*, descritta da Bignami e da me nel 1891, e nella quale avevamo già notato il rapporto fra le fasi del ciclo di vita del parassita e gli stadi dell'accesso febbrile, *ciclo men facile a riconoscersi, perchè la moltiplicazione di questo parassita, la schizogonia, non si compie dovunque nel sangue circolante ma, a preferenza, nei capillari degli organi interni* (cervello, milza, intestino, midollo delle ossa ecc.).

Sulla base delle nostre osservazioni sopra gli infermi e dei risultati delle autopsie, noi affermammo che la perniciosità vera si manifesta soltanto nelle infezioni da questo parassita, come si può affermare anche oggi, dopo 30 anni di esperienza. Ciò si sosteneva da noi, quando l'illustre scopritore dei parassiti della malaria scriveva che le febbri perniciose sono soltanto accidenti gravi e complicazioni delle febbri palustri ordinarie, provocati dalla temperatura esterna, dalla insolazione, dalle condizioni individuali ».

« Della teoria dell'inoculazione della malaria per le zanzare noi in genere degli Istituti Patologici e d'Igiene di Roma, eravamo tutti convinti, e Dionisi tentò anche qualche ricerca sperimentale che non riuscì. Intanto lo studio morfologico più accurato delle semilune e dei corpi che da essa derivano e l'osservazione di fenomeni sessuali in altri sporozoi fecero emettere l'ipotesi che le semilune rappresentassero forme parassitarie sessuali destinate a compiere un altro ciclo di vita fuori dell'organismo umano e forse in un insetto succhiatore del sangue.

Finalmente nello scorcio del 1898 si conobbe la grande scoperta di Ronald Ross sul ciclo di vita del Proteosoma dei passerii nel *Culex pipiens* (grey mosquito), che è il primo ciclo di vita di un emosporidio nel corpo di una specie di zanzare che sia stato studiato. Questo ciclo biologico del proteosoma è identico a quello che si compie per i parassiti della malaria umana in zanzare del genere *Anopheles*, come ha dimostrato Grassi, e che, intraveduto da Ross, fu poi completamente studiato in Roma da Grassi, da

Bignami e da Bastianelli nelle varie specie di parassiti malarici, e che si può riassumere così: L'Anfionte, che risulta dalla fecondazione del macrogamete, si sviluppa come vermicolo, nell'intestino medio dell'*Anopheles*, ne attraversa la parete e fissatosi all'esterno di questa, diviene rotondo e, mentre il suo nucleo si moltiplica, aumenta di volume e si trasforma in una oocisti contenente un grande numero di sporozoit, i quali, usciti dalla capsula del celoma si raccolgono nelle glandole salivari della zanzara, dalla quale per puntura sono inoculati nell'uomo colla saliva ».

« Ora Angelo Celli che aveva seguito con entusiasmo tutti gli studi fatti in Roma intorno alla maniera con la quale l'uomo prende la malaria, si dedicò alla profilassi di questa, e iniziò in Italia quel meraviglioso ordinamento della lotta antimalarica, che fu feconda di tanto bene. Al suo invito pieno di entusiasmo e di fede risposero i medici delle regioni malariche d'Italia, da quelle di malaria mite dell'alta Italia a quelle di malaria grave dell'Italia centrale e dell'Italia meridionale: Maremma Toscana, Campagna Romana e Paludi Pontine, regioni malariche della Campania, delle Puglie, della Basilicata, delle Calabrie, della Sicilia e della Sardegna. I risultati già ottenuti, quasi tutti raccolti nei volumi della Società per gli Studi della Malaria, dimostrano quale e quanta è stata la operosità, quali lo zelo e il sacrificio di questi medici sotto la guida dell'infaticabile Maestro.

Angelo Celli riconoscendo bene che il solo e grande ostacolo al bonificamento e alla colonizzazione dell'Agro romano, delle Paludi Pontine e di tutte le regioni malariche d'Italia era la malaria, comprese la suprema necessità della lotta contro il flagello perchè i lavori di bonifica idraulica e agraria si compissero senza vittime umane ».

« Per la profilassi dell'uomo, non trascurando la distruzione delle zanzare, la protezione meccanica e la cura pronta e radicale dei malarici, alla profilassi chininica si volse con grande fede come quella destinata ad impedire che i parassiti malarici eventualmente inoculati nel sangue potessero svilupparsi e divenire febbrigeni. Rese agevole la profilassi chininica dando la chinina in forma di confetti e di cioccolatini, questi per i bambini, contenenti il tannato di chinina, quelli per gli adulti. Così la Cervelletta, ridonata all'agricoltura intensiva, acquistò il valore di un vero modello di applicazione della profilassi antimalarica che si estese poi in tutto l'Agro romano sotto l'impulso di Angelo Celli, per opera della direzione dell'ufficio di igiene del Comune di Roma e della benemerita Croce Rossa.

Alla diffusione della cura e della benefica profilassi chininica si opponevano non piccoli ostacoli, oltre i pregiudizi, l'inerzia, l'apatia degli agricoltori e dei proprietari delle terre malariche, come il forte costo della chinina, le adulterazioni di questa, la mancanza di una seria vigilanza. Allora Angelo Celli fu convinto della necessità che lo Stato dovesse intervenire in questa opera di altissimo interesse sociale con leggi adeguate. E con tenacia di propositi mai interrotta, perserverando e persuadendo, con i benemeriti onore-

voli De Asarta, Fortunato, Franchetti, Guicciardini, Wollemborg, riuscì ad ottenere che si facesse una legislazione diretta contro la malaria come risulta dalle seguenti leggi: del 23 dicembre 1900 sull'esercizio di Stato del chinino; del 2 novembre 1901 sulla distribuzione del chinino dello Stato ai lavoratori delle zone malariche da farsi dai medici comunali a spesa dei rispettivi proprietari; del 22 giugno 1902 sulla vendita del chinino di Stato a prezzo minore ai Comuni e alle Opere pie per distribuirlo gratuitamente ai lavoratori; del 25 febbraio 1904 che autorizza i Comuni e le Opere pie a distribuire ai poveri gratuitamente il chinino e altri medicinali per la cura della malaria; del 19 marzo 1904 sul diritto dei lavoratori di zone malariche ad avere il chinino gratuito anche per la profilassi, dai Comuni e dai medici comunali. Se a queste leggi si aggiungono le disposizioni, che considerano la morte per malaria come avvenuta per infortunio sul lavoro e le leggi sul bonificazione idraulico ed agrario, specialmente nell'Agro Romano (legge 13 dicembre 1903), la silvicoltura e la sistemazione dei bacini montani, si deve concludere che un lavoro di legislazione migliore non poteva farsi in così breve tempo per dare un impulso decisivo alla redenzione dell'Italia dalla malaria ».

«Le leggi contro la malaria, che onorano l'Italia, furono prese ad esempio da altre Nazioni, come l'Austria-Ungheria per le provincie adriatiche, la Grecia, la Bulgaria, le Colonie francesi, inglesi, olandesi, il Brasile, l'Argentina, e se ne ebbero gli stessi risultati benefici ottenuti in Italia, come risulta dalle comunicazioni di parecchi malariologi stranieri.

Bourmoff di Sofia scriveva nel 1912 che era già il terzo anno che praticava la profilassi chininica in Bulgaria, e che il popolo bulgaro doveva alla potenza delle dottrine di A. Celli di passare l'estate senza soffrire di febbri delle paludi, senza che la malaria interrompesse il lavoro dei campi e di vedere i loro bambini floridi, salvi dalle febbri.

Kouzis scrive che la Grecia è debitrice ad A. Celli della Lega greca contro la malaria, la quale ha fatto votare la legge del chinino di Stato, come in Italia, e che ha dato risultati ottimi contro il flagello della malaria.

Mense, di Cassel, ricordati i meriti di Angelo Celli, conclude che egli deve cingere la fronte dell'alloro per le ricerche scientifiche e della corona civica come lavoratore instancabile per la salute di milioni di uomini. Lunga e difficile, egli aggiunge, è la strada dal pensiero all'azione. Se il popolo italiano non apre le tombe a 12.000 cadaveri per la malaria, e risparmia innumerevoli giornate di malattia, si deve ad Angelo Celli!

Del merito di Angelo Celli di aver giovato con l'esempio dell'Italia alla lotta antimalarica in altre nazioni fanno altissimi elogi Gilbert e Nicolle, Nocht, Petroff, Poletti, Ross, Roster, Ruge, Sergent, Savas, elogi che si leggono nel numero supplementare della Propaganda Antimalarica, pubblicato nel 1912 nel 25° anno d'insegnamento di Angelo Celli, che io ricordo, tacendo di quelli degli italiani, perchè, come ha detto Bignami, il giudizio degli stranieri contemporanei precede e anticipa quello dei posteri.



Prove del riconoscimento degli alti meriti di Angelo Celli sono anche le onorificenze accademiche conferitegli in Italia, in Inghilterra, in Germania, in Austria-Ungheria, in Grecia, nel Brasile, negli Stati Uniti d'America ecc. Fu nominato *Doctor honoris causa* dell'Università di Atene, gli fu conferita la medaglia d'oro dal Ministero di Agricoltura per le sue benemeritenze nella redenzione dalla malaria della Campagna Romana e delle altre plaghe malariche d'Italia, e la *Mary Kingsley Medal* dalla Scuola di Medicina tropicale di Liverpool per le benemeritenze conseguite nella lotta contro la malaria ».

« Egli si spense nella visione dell'Italia redenta dalla malaria, di una Campagna romana non micidiale ai poveri lavoratori, dai campi tutti coltivati, dalle fattorie ricche ove ferve il lavoro lieto senza vittime umane e senza perdita di animali, dalle case e dalle borgate salubri, abitate da agricoltori sani, forti, sobri, industri, non più schiavi dell'altrui cupidigia, che benedicono il lavoro della terra che li fa vivere e li rende buoni, di una campagna romana non più, come scrisse sdegnato il poeta astigiano: « *vuota insalubre region... dai squallidi oppressi volti... dai campi aridi incolti* »; non più onta e desolazione, ma degna corona di Roma immortale capitale d'Italia. E poichè Angelo Celli sapeva bene che la Dea Febbre delle paludi invocata dal Poeta della nuova Italia fra le rovine dell'antica Roma (e della quale la scienza ha dileguato ormai tutti i misteri), se debellata in alcune regioni, se impotente in altre sugli organismi resi immuni per virtù della profilassi chininica, è sempre là nella nostra campagna pronta a riprendere tutto il suo tragico potere, se per poco si affievolisca la vigilanza ininterrotta, così il suo voto fervido era che per l'opera concorde di tutti si continui sempre ben diretta, sempre vigile, sempre disciplinata la lotta contro la malaria, fino al completo risanamento di tutte le parti d'Italia che ne sono afflitte.

Se noi dimostreremo con i fatti che questo voto supremo di Angelo Celli è anche il nostro daremo alla sua memoria il migliore tributo della nostra fedeltà, onde Egli si allieterà nel « luogo aperto luminoso ed alto » ove soggiornano gli Spiriti di coloro che passarono la vita facendo il bene ».

Egredi Consoci, pongo fine alla rievocazione di ETTORE MARCHIAFAVA offrendo in omaggio all'Accademia Nazionale dei Lincei queste cinquantadue cartelle manoscritte dell'indimenticabile Maestro, che fu uno dei più eminenti Membri dell'Accademia stessa; e godo di consegnarle nelle mani del nostro onorevole Presidente, Guido Castelnuovo, che, oltre ad essere uno dei più alti estimatori di Lui, gli fu anche caro ed ottimo Amico.



*Seduta dell'8 novembre 1947.*

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente porge il suo saluto a tutti i Soci e in particolare ai nuovi eletti, ringraziandoli per la collaborazione che daranno ai lavori dell'Accademia.

Comunica quindi la dolorosa notizia della morte dei Soci Corrispondenti Michele Cipolla e Giuseppe Checchia Rispoli e del Socio Straniero Max Planck e ne rievoca brevemente la figura e l'opera con le seguenti parole:

«Dobbiamo purtroppo lamentare la perdita di MICHELE CIPOLLA Socio Corrispondente da un anno. È morto il 7 settembre scorso a Palermo dove insegnava Analisi matematica da oltre 20 anni, molto apprezzato ed amato dai suoi allievi. Autore di pregiate Memorie di Algebra e di Teoria dei gruppi finiti, sono particolarmente note le Sue ricerche di Teoria dei numeri. Nei suoi corsi Egli associava il rigore logico alla semplicità e solleva dire ai suoi allievi che solo le cose semplici restano nella scienza».

«Mentre si avviava alla nostra Università per presiedere la Commissione di esami, è morto improvvisamente GIUSEPPE CHECCHIA RISPOLI, Professore di Geologia, Socio Corrispondente dal 1935. Particolarmente notevoli sono i suoi scritti di Paleontologia. Lavoratore instancabile ha pubblicato anche quest'anno un lavoro nelle nostre «Memorie», ultimo di una serie di numerose Note dedicate allo studio degli Echinidi raccolti in Somalia dalla Missione Geologica dell'A.G.I.P.».

«È scomparso il 4 dello scorso ottobre un nostro illustre Socio straniero: MAX PLANCK, il fondatore della fisica moderna. Già noto per ricerche in vari campi della scienza da Lui prediletta e per lucidissimi trattati su vari rami della fisica matematica, il Planck ebbe nel 1900 la geniale idea di introdurre la ipotesi della discontinuità nell'emissione dell'energia raggiante per giungere ad una formula che desse la distribuzione dell'energia nello spettro del corpo nero e fosse confermata dall'esperienza. Nacquero così i *quanti* come ipotesi di lavoro, ma la ipotesi trovò poi tali clamorose conferme che ora essa è diventata la base della fisica del secolo attuale. Del Planck meritano di essere anche segnalate alcune conferenze di teoria della conoscenza, tradotte in varie lingue, e in italiano dal Persico, mirabili per acume e lucidità di pensiero».

A tutti i Soci scomparsi il Presidente invia il reverente saluto della Accademia

Fa presente poi che quest'anno ricorre il centenario della nascita di ETTORE MARCHIAFAVÀ che fu tra i più illustri Soci lincei e che morì or sono dodici anni. Ne ricorda la figura austera, la grande modestia, i meriti insigni di profondo ricercatore in vari rami della patologia e specialmente nel campo della malariologia e la grande bontà. Chi ha avuto la fortuna di conoscerlo, non lo dimenticherà mai.

Comunica poi che il Socio De Blasi, che del Marchiafava fu amico e discepolo, ha espresso il desiderio di onorare la memoria del grande Maestro facendo dono all'Accademia di 52 cartelle manoscritte della commemorazione che Ettore Marchiafava fece di Angelo Celli all'Accademia di Medicina di Roma il 28 febbraio 1915. Il Socio De Blasi, dopo aver premesso che nello scorso giugno alcuni Soci avanzarono la proposta, accolta cordialmente dal Presidente, di fare esplicito ricordo del centenario della nascita di Ettore Marchiafava in una delle sedute accademiche, rievoca la figura e le opere del Grande scomparso e del suo discepolo e amico Angelo Celli, e data lettura di alcune delle cartelle manoscritte del Marchiafava, termina offrendo in omaggio all'Accademia il manoscritto stesso. Il Presidente ringrazia il prof. De Blasi per la bella rievocazione delle figure del Marchiafava e del Celli, per il generoso dono offerto all'Accademia del prezioso manoscritto del Marchiafava.

Il Presidente comunica poi che hanno ringraziato per la nomina i Soci Nazionali proff.: Chiarugi, Ciaccio, Cotronei, Rossi e i Soci Corrispondenti proff.: Amoroso, Ascoli, Caglioti, Cappelletti, Cecchini, Colonnetti, Giambattista Dal Piaz, Margaria, Oliviero M. Olivo, Quilico, Redaelli, Segre e Valle e i Soci Stranieri proff.: Adrian, Chain, De Broglie, Jeffrey, Joliot, Lugeon, Niggli, Robinson, Runnström, Schrödinger, Sierpinski, Spencer Jones, Veblen.

Per quanto concerne i Soci Stranieri il Presidente desidera far rilevare, con il più vivo compiacimento, che le risposte da essi pervenute sono tutte improntate alla più viva cordialità e ad uno spirito di profonda e sincera amicizia verso il nostro Paese e la nostra Accademia.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Vernoni presenta il lavoro di un chirurgo il dott. Giacomo Giangrasso, dal titolo « Comportamento della sierosa peritoneale umana nelle flogosi acute, subacute e croniche », mettendo in rilievo quanto vantaggio possano trarre le scienze sperimentali dall'opera di studio e di ricerca sui materiali umani asportati e finora inutilizzati.

Il Presidente presenta alla Classe il volume commemorativo del 3° centenario delle celebrazioni di Newton, svoltesi sotto gli auspici della Royal Society ed edito dalla Società stessa che ne ha fatto omaggio di una copia alla nostra Accademia. Alle celebrazioni newtoniane, che si sono svolte in Inghilterra nel 1946, la nostra Accademia è stata rappresentata dal Socio Abetti.

L'Accademico Segretario presenta quindi le opere pervenute in omaggio all'Accademia mettendo in particolare rilievo i tre volumi della « Fisica sperimentale » del Socio Alessandro Amerio, la commemorazione di Arrigo Carano del Socio Alberto Chiarugi, un estratto dalla « Palaentolōgraphia italica » contenente uno studio dello stesso Chiarugi sul « Palaecodium saharianum » n. gen. n. sp. nuova Codiacea paleozoica del Deserto libico, un fascicolo di

note autobiografiche del Socio Achille Russo dal titolo: «Confidenze di uno Zoologo», due studi del Socio Filippo Silvestri dal titolo «Contributo alla conoscenza dei Diploidi termofili dell'America Meridionale» e «Ridescrizione del genere *Cynedesmus* O. F. Cook»; il vol. I dell'Opera Omnia di Leonardo Eulero, edito dalla Società di Scienze Naturali Svizzera, e «Mineralogia etnea» di Salvatore di Franco.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio Cantelli presenta una Memoria di Milicer Gruzewska K. dal titolo «Sulla legge limite delle variabili casuali equivalenti». La Memoria sarà sottoposta all'esame di una Commissione.

Presentano Note per la pubblicazione negli Atti accademici i Soci Bargellini, Caglioti, Segre, Cotronei, Lombardi, Picone, Sergi e Krall.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note e Memorie pervenute all'Accademia tra le quali figura una Nota del prof. Loria dal titolo: «L'avverso destino di Evangelista Torricelli». In proposito il Presidente ricorda che quest'anno cade il 3° centenario della morte di Evangelista Torricelli e di Bonaventura Cavalieri, entrambi discepoli del Castelli che fu a sua volta allievo di Galileo. Entrambi hanno un posto privilegiato nella preistoria del calcolo infinitesimale. Il Cavalieri, col metodo degli indivisibili, ha preceduto il concetto di integrale definito. Il Torricelli, che si può considerare il maggior discepolo di Galileo, ha calcolato con ingegnosi procedimenti, nuovi integrali di funzioni algebriche, anche integrali impropri secondo la nomenclatura odierna. Il Presidente conclude ricordando come al Torricelli, morto a 39 anni, si devono anche risultati fondamentali di fisica e la notissima e geniale invenzione del barometro.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CHECCHIA RISPOLI G., «*Salenia Hawkinsi*»; nuovo echinide del Cenomaniano della Somalia.

CHECCHIA RISPOLI G., Pygasteridi del Cenomaniano della Somalia.

DEL PIANTO E. e BALLIO A., Sull'attività batteriostatica del 2-mercaptobenzotiazolo e di alcuni suoi derivati (pres. dal Socio G. BARGELLINI).

KRALL G. e CALIGO D., Moltiplicatore critico  $\lambda_{cr}$  di una distribuzione di carico su una volta autoportante. Nota II (pres. dal corrisp. G. KRALL).

LOMBROSO C. e BOCCHIOTTI S., Azione degli acidi malonicò e monoiodoacetico nel processo di liposintesi durante la prolungata autolisi asettica. (pres. dal corrisp. U. LOMBROSO).

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Carnera, a nome anche del Collega Silva, impossibilitato ad intervenire alla seduta, legge la relazione sulla Memoria del dott. Nicolini dal titolo «Caratteristiche osservate sulla componente del moto polare»,

con la quale si propone la pubblicazione della Memoria negli Atti Accademici. La proposta è approvata con le consuete riserve di carattere finanziario.

### TEMI PER DISCUSSIONI

Esaurito l'ordine del giorno della seduta, il Presidente prega i Colleghi di prendere accordi sulla data delle sedute speciali che dovranno aver luogo nel corrente anno accademico per la trattazione di temi scientifici, in prosecuzione dell'iniziativa già adottata lo scorso anno e che è stata coronata da tanto lusinghiero successo.

Si stabilisce che la conferenza del Socio Abetti sul tema « Relazioni tra fenomeni solari e fenomeni terrestri » abbia luogo venerdì 9 aprile e che la conferenza del Socio Vernoni sia tenuta nella seduta del 13 marzo.

Inoltre, nella seduta del 14 febbraio il dott. Giacomello, assistente di chimica all'Università, terrà una lezione nella sede accademica, sul tema: « Analisi röntgenografica della costituzione delle molecole ».

### COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Cassinis, anche a nome dei Colleghi Dore e Boaga, ritiene doveroso informare il Presidente dell'ottimo esito avuto dalla Mostra Nazionale e Convegno di Cartografia e di Ottica che hanno avuto luogo recentemente a Firenze e ai quali i predetti tre Soci hanno rappresentato, per incarico del Presidente, il Presidente stesso e l'Accademia dei Lincei.

Il Socio Cassinis dichiara quindi di essere stato incaricato, da parte di un gruppo di studiosi che hanno festeggiato in questo giorno il 40° anniversario della laurea, di rendersi interprete presso il Presidente dell'affettuoso e reverente saluto che gli antichi discepoli rivolgono al loro Maestro prof. Castelnuovo. Il Presidente ringrazia e prega il Socio Cassinis di portare ai colleghi che hanno voluto ricordare la sua opera di maestro il più cordiale ed affettuoso saluto.

Il Socio Abetti informa la Classe di aver appreso che il Presidente Castelnuovo è stato nominato Presidente dell'U.N.E.S.C.O. e desidera porgere al Presidente stesso le sue più vive felicitazioni. Il Presidente ringrazia, dichiarandosi lieto che l'Accademia sia largamente rappresentata nell'U.N.E.S.C.O. Infatti Vice Presidenti di detta Unione sono i Soci Colonnetti, De Ruggiero e Bianchi Bandinelli.

I proff. De Ruggiero e Bianchi Bandinelli e il prof. Edoardo Amaldi, in rappresentanza del Vice Presidente Colonnetti, sono attualmente a Città del Messico per rappresentare l'Italia ai lavori dell'U.N.E.S.C.O. Il Presidente auspica che l'ammissione dell'Italia a detta Unione possa contribuire a una sempre più profonda e intima collaborazione scientifica internazionale.



## OPERE GIUNTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 novembre 1947.

- AMERIO Alessandro. — *Fisica sperimentale*. Vol. I. Meccanica, Acustica, Calore. Vol. II. Ottica. Vol. III. Elettrologia. 3<sup>a</sup> ed. Milano-Messina, Casa Ed. G. Principato, 1945, 1946, 1947. Pp. 604, 437, 481, in-8°, con figg.
- ARCIDIACONO Giuseppe. — *Breve saggio della teoria delle operazioni aritmetiche*. Estr. da «Memorie e Rendiconti della Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Acireale», s. I, cl. di scienze, vol. I, 1947.
- BUMP James D. — Vedi COLBERT Edwin A.
- CHIARUGI Alberto. — *In memoriam: Enrico Carano*. Estr. da «Nuovo giornale italiano botanico», n. s., vol. LII 1945, pagine 102-117.
- *Palaecodium saharianum n. gen. n. sp., nuova Codiacea del deserto Libico*. Estr. da «Palaentographia Italica», vol. XLI, anno 1942-46, pp. 121-130, tab. IX e 2 figg.
- COLBERT Edwin H. and BUMP James D. — *A skull of torosaurus from South Dakota and a revision of the genus*. Estr. da «Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia», vol. XCIX, 1947, pp. 93-106.
- CONTI S. — *Laghetti non glaciali dell'alto Appennino ligure-emiliano e tosco-emiliano*. Alessandria, Tip. Ferrari, Occella e C., 1946. Pp. 29, in-8°, con figg. («Pubblicazioni dell'Ist. di geologia dell'Università di Genova», serie D, Geomorfologia, 1945, quad. 3).
- *Revisione critica di «Lithothamnium Tamossissimum» Reuss. — Le «Corallinacee» del calcare miocenico (Leithakalk) del bacino di Vienna*. Alessandria, Tip. Ferrari-Occella e C., 1946, Pp. 70, in-8°, con tavv. («Pubblicazioni dell'Ist. di geologia della Università di Genova», serie A, Paleontologia, 1945, quad. 1-2).
- DAS NEVES Victor. — *Solução dos problemas: Trissecção da ângulo rectificação da circunferência quadratura do círculo*. Lisboa, Tip. Silvas, 1946. Pp. 11, in-8°.
- DI FRANCO Salvatore. — *Mineralogia Etnea*. Catania, Tip. Zuccarello e Izzi, 1942. Pp. 175, in-4°, con figg.
- DRUMAUX P. — *La récession des nébuleuses extragalactiques et leur répartition macroscopique*. Estr. da «Annales de la Société scientifique de Bruxelles», s. I, t. LX, 1946.
- *La répartition macroscopique des nébuleuses extragalactiques*. Estr. da «Annales de la Société scientifique de Bruxelles», s. I, to. IX, 1946.
- EULERUS Leonhardus. — *Commentationes mechanicae ad theoriæ corporum flexibilium et elasticorum pertinentes*. Ediderunt Fritz Stüssi et Herni Favre. Vol. I. Lipsiae - Berolini, G. B. Teubner, 1947. (Leonhardi Euleri opera omnia sub auspiciis Societatis scientiarum Naturalium Helveticae, series II, opera mechanica et astronomica, vol. X).
- GIANGRASSO Giacomo. — *Comportamento della sierosa peritoneale umana nelle Flogosi acute, subacute e croniche*. (Studio istologico con tecnica speciale). Roma, Edizioni «Universo», 1947. Pp. 32 in-8° con figg.
- IVES Herbert E. — *Television: 20th anniversary*. Estr. da «Bell Laboratories Record», vol. XXV, 1947, n. 5.
- LORIA Gino. — *Prime linee di una bibliografia Torricelliana*. Estr. da «Torricelliana», 1945.
- OBSERVATOIRE DE PARIS. — *Exposition «Le Verrier et son temps»... Catalogue*, Paris, Gauthier-Villars, 1946. Pp. 75, in-8° con tavv.
- PKATTE K. — *Wie heiss ist die Sonne?* Waidhofen, a. d. Ybbs, Leopold Stummer, 1947. Pp. 12, in 8°.
- PROVENZAL Giulio. — *Considerazioni storiche sulla nuova chimica*. Estr. da «Annali di Medicina navale e coloniale», 1947.

- PUMA Marcello. — *Nuova teoria quantistica della luce*. Roma, Istituto Pitagora, 1947. Pp. 105, in-8°, con figg.
- RUSSO Achille. — *Confidenze di uno zoologo, 2ª puntata — Note autobiografiche*. Estr. da «Scienza e Tecnica», vol. VII, 1943, fasc. 7-8.
- SILVESTRI Filippo. — *Contributo alla conoscenza dei «Diplopodi» termitofili dell'America meridionale*. Estr. da «Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici», vol. VIII, 1947.
- SILVESTRI Filippo. — *Ridescrizione del genere «Cynedesmus» O. F. Cook (Diplopoda, Polydesmoidea)*. Estr. da «Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici», vol. VII, 1947.
- U.R.S.S. ACADEMY OF SCIENCES. — V. L. Komarov Botanical Institute. — *Volume of scientific works carried out in Leningrad in the course of the three years of the great national war (1941-1943)*. (in lingua russa). Leningrad, Pafer-journal and book publishing House, 1946. Pp. 467, in-8°, con figg.

*Seduta del 13 dicembre 1947.*

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà alla Classe la dolorosa notizia della morte, avvenuta a Torino il 3 del corrente mese, del prof. ORESTE MATTIROLO, il Socio più anziano della nostra Accademia e ne rievoca brevemente la vita e le opere, inviando alla Sua memoria il reverente saluto dell'Accademia.

Comunica poi che hanno ringraziato per la nomina i Soci Stranieri: de Kàrmàn, Gutemberg, Hevesy, Houssay, Muller, e rileva lo spirito d'amicizia verso l'Italia e verso l'Accademia che ha ispirato le loro risposte.

## PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Vengono presentati alla Classe il plico dell'Arch. Gaetano Vinaccia e quello del dott. Alfredo De Baldass. La Classe, preso atto dell'integrità dei sigilli, ha deliberato che detti plichi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Cotronei, a nome del Socio Giuseppe Levi, legge la relazione sulla Memoria del dott. Renato Dulbecco dal titolo «Azione dei raggi del radio sullo sviluppo della gonade e sui caratteri somatici del sesso nell'embrione di pollo», con la quale si propone la pubblicazione della Memoria stessa negli Atti accademici. La proposta è approvata con le consuete riserve di carattere finanziario.

Il Socio Cantelli, anche a nome del Presidente Castelnovo e del Socio Picone, dà lettura della relazione sulla Memoria della dott. K. Milicer-Gruzevska dal titolo: «Sulla legge limite delle variabili casuali equivalenti», e l'Accademico Segretario Bordoni, in assenza dei relatori Soci Silvestri,

Pierantoni e Trotter, legge la relazione sulla Memoria di D. Vito Zanon dal titolo « Diatomee di Buenos Aires (Argentina) ». Entrambe le relazioni, che propongono la pubblicazione di dette Memorie negli Atti accademici, sono approvate con le solite riserve di carattere finanziario.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per i « Rendiconti » i Soci Vernoni, Cotronei, Boaga, Sansone (a mezzo di Cantelli), Bonino, Picone e Sergi.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute all'Accademia.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

SACCO F., La costituzione geologica sintetica delle Alpi.

CASTOLDI L., Attorno a un « teorema della divergenza » per tensori qualunque negli spazi di Riemann (pres. dal Socio L. BERZOLARI).

CASTOLDI L., Sopra la derivata sostanziale di un integrale multiplo negli spazi di Riemann (pres. dal Socio L. BERZOLARI).

CONTI R., Estensione alle successioni di funzioni a variazione limitata di un criterio di Pólya-Cantelli per la convergenza uniforme su intervalli infiniti (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

CORTI A., Il lacunoma osservato col microscopio a contrasto di fase (pres. dal Corrisp. G. VERNONI).

D'AMATO F., Contributo al problema della agglutinazione cromosomica (« stickiness ») spontanea (pres. dal Socio A. CHIARUGI).

DELLA CORTE M., Sulla distribuzione di densità negli sciami estesi (pres. dal Corrisp. L. TIERI).

GRASSO V., Il rinvenimento di una nuova specie di *Ustilago* dell'orzo in Italia (*Ustilago nigra Tapke*) (pres. dal Socio G. NEGRI).

LOMBARDO-RADICE L., Sulle condizioni di appartenenza al radicale per gli elementi di un'algebra legata a un gruppo finito (pres. dal Socio M. PICONE).

MANUNTA C., Sul metabolismo dell'azoto in « *Bombyx mori* ». III. L'acido allantoinico durante lo sviluppo larvale nella razza bivoltina Awojiku (pres. dal Socio G. LEVI).

MANUNTA C., Sul metabolismo dell'azoto in « *Bombyx mori* ». IV. Ricerca degli enzimi allantoinasi ed allantoinasi nei bachi da seta durante lo sviluppo larvale (pres. dal Socio G. LEVI).

MANUNTA C. e MORITTU G., I pigmenti carotenoidi nella dorifora delle patate (pres. dal Socio G. LEVI).

MARCANTONI A., Sopra alcune formule relative alla rappresentazione gaussiana della sfera sul piano (pres. dal Corrisp. G. BOAGA).

MAZZI V., Peculiari riassetamenti della sostanza cromofila con caratteri neurosecretori nelle cellule del nucleo della radice mesencefalica del trigemino del Tritone crestato (pres. dal Corrisp. N. BECCARI).

RIZZO C., Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. - A) La reazione ortoclinostatica nell'adulto normale. I. (pres. dal Socio G. COTRONEI).

SACCHETTI A., Il significato meccanico delle variazioni promeriche (pres. dal Corrisp. S. SERGI).

STEFANELLI A., L'orientamento delle fibre nervose intracentrali indagato sperimentalmente in riferimento alla fibra di Mauthner (pres. dal Socio G. COTRONEI).

VILLA M., Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. I. Intorno del 2° ordine (pres. dal Socio L. BERZOLARI).

VILLA M., Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci (pres. dal Socio L. BERZOLARI).

### PRESENTAZIONI DI LIBRI

L'Accademico Segretario presenta le opere giunte in omaggio, mettendo in particolare rilievo il volume di A. Amerio e M. Nozari dal titolo « Esercitazioni di fisica », il « Manual de Astronomia geodésica » di Manuel Pires de Matos, l'opera di Louis N. Ridenour intitolata « Radar system engineering », la « Mathematical theory of rocket flight » di J. B. Rosser, R. R. Newton e G. L. Gross, due Note del Socio Cassinis sulla « Teoria degli strumenti goniometrici » e sulla « Risoluzione dei sistemi di equazione algebriche lineari », un estratto dal volume « Lavori di botanica » pubblicato in occasione del settantesimo genetliaco del Socio Giuseppe Gola, una Nota dell'ing. Luigi Solaini sul « Contributo della geofisica alla ricerca dell'acqua », una pubblicazione edita in occasione del Cinquecentesimo anniversario della fondazione della Smithsonian Institution, e infine una pubblicazione edita dall'Accademia Danese sugli strumenti e sulle opere scientifiche di Tyge Brahe, comunemente noto come Tycho Brahe.



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 dicembre 1947.

- AMERIO A. e NOZARI M. — *Esercitazioni di Fisica*. 2ª ed. Milano, Libreria Ed. Politecnica Cesare Tamburini, 1947. Pp. XVI-476, in-8° con figg. e tavv.
- CASSINIS Gino. — *Risoluzione dei sistemi di equazioni algebriche lineari*. Estr. da « Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano », vol. XVII, 1946.
- *Sulla teoria degli strumenti goniometrici*. Estr. da « Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei » (Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali), ser. 8ª, vol. I, fasc. 12.
- COMITATO PER LE ONORANZE AL PROF. G. GOLA. — *Giuseppe Gola*. Notizie bibliografiche. Estr. dal vol. « Lavori di Botanica » pubblicato in occasione del 70° genetliaco del prof. Giuseppe Gola. Padova, 1947.
- FIELD MUSEUM OF NATURAL HISTORY OF CHICAGO. — *Fifty years of progress. 1893-1943*. Estr. da « Field Museum News », vol. XIV, 1943, nn. 9-10.
- GROSS George L. — Vedi: ROSSER J. Berkeley.
- MADEIRA José António. — *Considerações sobre a perceptibilidade auditiva dos sinais horários ritmicos radiotelegráficos no processo das coincidências por extinção de sinais*. Coimbra, Tip. do « Atlantida », 1942. Pp. 11, in-8°. (Publicações do Sindicato nacional dos engenheiros geógrafos, ser. 3ª, n. 2).
- *Estudo comparativo dos processos de registro gráfico e de recepção acustica (extinção de sinais) na determinação da hora de recepção de um sinal horário ritmico*. Coimbra, Coimbra Editora, s. d. Pp. 12, in-8°, con figg. (Publicações do Sindicato nacional dos engenheiros geógrafos).
- NEWTON Robert R. — Vedi: ROSSER J. Berkeley.
- NOZARI M. — Vedi: AMERIO A.
- PIRES DE MATOS Manuel. — *Manual de astronomia geodésica*. Lisboa, Tip. Silva, 1941. Pp. 159, in-8°, con figg. e tavv. (Publicações do Sindicato nacional dos engenheiros geógrafos, ser. 2ª, n. 1).
- RADIO INDUSTRIA. — *Numero unico nel cinquantenario della radio*. Sotto gli auspici della Presidenza del Consiglio dei Ministri con la collaborazione dell'Ass. Naz. Industrie Elettrotecniche. 1947, numeri 129-130.
- RAEDER Hans, STRÖMGREN Elis, STRÖMGREN Bengt. — Tycho Brahe's description of his instruments and scientific work as given in « Astronomiae instauratae mechanica ». København, Ejnar Munksgaard, 1946. Pp. 144, in-8°, con tavv. (Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab).
- REIDENOUR Louis N. — *Radar system engineering*. New York and London, Mc Graw-Hill book Company, 1947. Pp. XVIII-748, in-8°, con figg. e tavv. (Massachusetts Institute of technology. Radiation Laboratory series).
- ROSSER J. Berkeley, NEWTON Robert R., GROSS George L. — *Mathematical theory of rocket flight*. New York and London, Mc Graw-Hill book Company, 1947. Pp. VII-276, in-8°, con figg.
- SOLAINI Luigi. — *Il contributo della geofisica alla ricerca dell'acqua*. Estr. da « Rivista del catasto e dei servizi tecnici erariali », vol. XXIII, 1945, n. 1.
- STRÖMGREN Bengt. — Vedi: RAEDER Hans.
- STRÖMGREN Elis. — Vedi: RAEDER Hans.
- TRUE Webster P. — *The first hundred years of the Smithsonian Institution. 1846-1946*. Washington, 1946. Pp. VIII-64, in-8°, con tavv.

#### ERRATA CORRIGE

La Nota di C. CODEGONE (Vol. II, ser. VIII, fasc. 6, p. 799 di questi « Rendiconti »), fu presentata dal Socio M. PANETTI e non dal Corrisp. G. POLVANI come erroneamente stampato.

Nella Nota di TARANTA (Vol. II, ser. VIII, fasc. 6, p. 847 di questi « Rendiconti »), la fig. 1 e la fig. 3 sono state per errore scambiate.

Nella Nota di F. DI RAIMONDO (Vol. II, ser. VIII, fasc. 6, p. 864 di questi « Rendiconti ») il titolo va letto *Riviviscenza di germi patogeni e non patogeni formalizzati dopo trattamento con ammoniaca.*

A p. 216 del presente volume (serie VIII, vol. III, fasc. 3-4, righe 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> dall'alto) in luogo di: W. SIERPIŃSKI, presentata dal Socio M. PICONE leggi: del Socio Straniero W. SIERPIŃSKI.

---

## INDICI DEL VOLUME





## INDICE PER AUTORI

## A

- ACANFORA M. O. — Sulla litotecnica preistorica. Esperimenti di fabbricazione, 658.  
 ALOISI M. e BUFFA P. — L'ossidazione biologica della glicerilfosforilcolina, 403.

## B

- BAIADA E. — Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali. Nota I, 258.  
 — Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali. Nota II, 264.  
 BARBUTI U. — Sull'integrale massimo e minimo e sulla unicità della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali del primo ordine, 272.  
 BARZOTTI I. — Il gruppo di Brauer delle algebre semplici di tipo I, 188.  
 BIANCHI G. — Contributo alla conoscenza dei fenomeni di passività anodica dello stagno in soluzione alcalina. Nota III, 94.  
 — Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota IV, 97.  
 — Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota V, 586.  
 BINI M. — Principi di un nuovo metodo per la determinazione immediata del punto nave astronomico, 555.  
 BIOCCA E. e IPPOLITO M. — Ricerche chimico-biologiche sul metodo indio di preparazione del curaro Makù. Nota III, 162.  
 BOCCHIOTTI S., vedi LOMBROSO C.  
 BODEWIG E. — L'approximation des racines complexes d'une équation transcendante à une inconnue, 218.  
 BONINO G. B. e MARIANI E. — Sul calcolo dei coefficienti di attività degli elettroliti forti in soluzione concentrata, 442.  
 BONINO G. B. e ROLLA M. — Sul calcolo dell'effetto cinetico primario di sale, 445.  
 BRUNELLI G. — Su alcune caratteristiche del Mare Mediterraneo, 34.  
 BUFFA P., vedi ALOISI M.

- BUZANO P. — Determinazione dell'altezza di scoppio della bomba atomica lanciata su Hiroshima, 482.

## C

- CAGLIOTI V., SARTORI G., SILVESTRONI P. — Ricerche ossidimetriche e polarografiche sui complessi cianidrici del nichel, 448.  
 CAFIERO F. — Un'osservazione sulla continuità rispetto ai valori iniziali degli integrali dell'equazione:  $y' = f(x, y)$ , 479.  
 CASTIGLI-PITOTTI M. — Sulla precoce localizzazione degli abbozzi, del sangue in « Petromyzon fluviatilis » e « Petromyzon planeri » studiata col metodo delle perossidasi, 623.  
 CASTOLDI L. — Il Principio di Hamilton per sistemi dinamici a vincoli anolonomi generali, 329.  
 — Sopra una proprietà dei moti permanenti di fluidi incomprimibili in cui le linee di corrente formano una congruenza normale di linee isotache, 333.  
 — Attorno a una dimostrazione geometrica di un teorema di Analisi, 496.  
 — Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. Nota I, 498.  
 — Attorno ad una determinazione di W. Thomson dell'età della Terra, 561.  
 CESARI L. — Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue. Nota I, 486.  
 — Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue. Nota II, 489.  
 CICALA P. — Sull'analisi delle piccole deformazioni nel campo elastoplastico, 325.  
 CINQUINI-CIBRARIO M. — Una proprietà delle superficie integrali delle equazioni non lineari di ordine  $n$  di tipo iperbolico, 49.  
 CITTERIO P. e RANZI S. — Sostanze modificanti lo sviluppo embrionale e viscosità di soluzioni contenenti macromolecole, 150.  
 COLOMBO G. — Intorno alla distribuzione degli zeri di certi polinomi, 530.

PERRIER C. e LOMBARDI G. — Ricerche sulle Emoglobine cristallizzate. Nota II, cristalli di emoglobina negli incroci del cavallo e dell'asino, 452.

PETTINEO B. — Sulle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes, 230.

— Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes, Nota I, 236.

— Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes, Nota II, 512.

— Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes. Nota III, 518.

— Sul massimo e sul minimo integrale di una funzione secondo Picone-Stieltjes, 521.

— Sulla misurabilità degli insiemi pluridimensionali, 525.

PICONE M. — Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità, 427.

## R

RADICATI L. A. — La funzione di Lagrange di alcune particelle elementari, 351.

RANZI S., vedi CITTERIO P.

RAUNICH L. — Gli elementi morfologici del sangue di «Sepschalcides», 654.

RICHARD U. — Dilatazione di una fune pesante sospesa a due estremi fissi, 321.

RIEDEL A. — Su di una faunetta cassiana della Valle di Zoldo (Belluno), 598.

RIEDEL A. e SCHIAVINATO G. — La differenziazione magmatica nelle rocce del Loncina (Colli Euganei), 115.

RODOLICO F. — Chiarimenti sulla johannsenite del Campigliese, 603.

ROLLA M., vedi BONINO G. B.

ROLLERO A. — L'intorno del 5° ordine di un punto di una superficie nello spazio proiettivo, 311.

RONISVALLE C., vedi MONTEROSSO B.

ROTH E. — Sulle forme che contengono una data varietà algebrica, 541.

ROVERETO G. — Ancora dell'età del macigno, 467.

RUGGIERI G., vedi GOIDANICH G.

RUSSO A. — Problemi connessi alla chiusura e alla riattivazione delle tonnare nel Mediterraneo, 28.

## S

SACCO F. — L'Abissolismo, 463.

SARTORI G., vedi CAGLIOTI V.

SCANGA F., vedi PENSO G.

SCHIAVINATO G., vedi RIEDEL A.

SCHREIBER G. — Il problema dell'accrescimento interfascio e delle variazioni volumetriche del nucleo durante lo sviluppo, 129.

— Volume nucleare e poliploidismo, 380.

SCONZO P. — Teoria approssimata del pianetino (552) Sigelinde, 346.

SCORZA DRAGONI G. — A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: considerazioni preliminari, 470.

— A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: proposizioni preliminari, 474.

SEGRE B. — Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui. Nota, I, 167.

— Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui. Nota II, 172.

— Un nuovo metodo per lo scioglimento delle singolarità, 411.

— Gli automorfismi del corpo complesso, ed un problema di Corrado Segre, 414.

— Una nuova caratterizzazione della sfera, 420.

— Sulla torsione integrale delle curve chiuse sgembe, 422.

SIERPINSKI W. — Remarque sur l'axiome du choix pour l'espace de fonctions continues, 216.

SILVESTRONI P., vedi CAGLIOTI V.

STAMPACCHIA G. — Sulla semicontinuità degli integrali doppi, in forma ordinaria nel calcolo delle variazioni, 247.

SUPINO G. — Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli. Nota I, 81.

— Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli. Nota II, 87.

## T

TERRACINI A. — Su alcuni sistemi triplamente infiniti di curve su una superficie, 545.

TIGANO O. — Sulle superficie isoterme-asintotiche, 298.

TORALDO DI FRANCIA G. — Il principio di Huygens-Fresnel come conseguenza di quello dell'interferenza inversa, 356.

— Sull'effetto delle piccole irregolarità di lavorazione negli specchi per riflettori astronomici, 568.

TREVISAN G. — Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata, 199.

## V

VACCARO G. — Le ipersuperficie d'ordine  $n$  con un punto  $(n-2)$ -plo. — I. Genesi delle singolarità della varietà di diramazione, 288.

— Le ipersuperficie d'ordine  $n$  con un punto  $(n-2)$ -plo. — II. Singolarità della ipersuperficie dedotte da quelle della varietà di diramazione, 314.

VERONA O. e FLORENZANO G. — Su di una nuova specie di *Brettanomyces* isolata da uva, 383.

VIOLA T. — Sui fondamenti geometrici del teorema del cambiamento di variabili negli integrali a più dimensioni, 277.

## W

WAŻEWSKI T. — Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires, 210.

## Z

ZWIRNER G. — Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni al problema di Niccoletti per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico, 44.

— Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni ai problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie, 242.

## INDICE PER MATERIE

### A

**Analisi.** — Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali. Nota I. E. BAIADA, 258.

— Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali. Nota II. E. BAIADA, 264.

— Sull'integrale massimo e minimo e sulla unicità della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali del primo ordine. U. BARBUTI, 272.

— Il primo problema al contorno per il piano a più tagli. H. HORNICH, 63.

— Su una equazione integrale della Statistica Matematica. G. OTTAVIANI, 59.

— Sui fondamenti geometrici del teorema del cambiamento di variabili negli integrali a più dimensioni. T. VIOLA, 277.

**Antropologia.** — Sulla litotecnica preistorica. Esperimenti di fabbricazione. M. O. ACANFORA, 658.

**Astronomia.** — Sulle variazioni di latitudine anteriori al 1890. T. NICOLINI, 337.

— Teoria approssimata del pianetino (552) Sigelinde. P. SCONZO, 346.

### B

**Biologia.** — L'ossidazione biologica della glicerilfosforilcolina. M. ALOISI e P. BUFFA, 403.

— Su alcune caratteristiche del Mare Mediterraneo. G. BRUNELLI, 34.

— Sulla precoce localizzazione degli abbozzi del sangue in «*Petromyzon fluviatilis*» e «*Petromyzon planeri*» studiata col metodo delle perossidasi. M. CASIGLI-PITOTTI, 623.

— Sostanze modificanti lo sviluppo embrionale e viscosità di soluzioni contenenti macromolecole. P. CITTERIO e S. RANZI, 150.

— Ulteriori ricerche sull'influenza della tiomina sullo sviluppo embrionale. — Esperienze su «*Petromyzon fluviatilis*», M. L. CORTELLESA, 620.

— Un nuovo metodo per riconoscere la sostanza amiloide in sezioni a fresco di tessuti in degenerazione. Osservazioni microfluoroscopiche. R. DE ROSA, 618.

— Problemi di tecnica e di citologia ipofisaria. Nuovi metodi di colorazione differenziale per le cellule della preipofisi. M. GALGANI, 629.

— Ricerche sperimentali sull'origine del simpatico toraco-lombare nell'embrione di pollo. R. LEVI-MONTALCINI, 140.

— Ricerche sulle correlazioni nello sviluppo del sistema nervoso. — Regressione secondaria del ganglio ciliare dopo asportazione della vescicola mesencefalica in embrione di pollo. R. LEVI-MONTALCINI, 144.

— Attività secretoria nel nucleo magnocellulare preottico di «*Triturus cristatus carinifex*» (Laur.). V. MAZZI, 155.

— Sulla presenza di cellule basofile del tipo 3 e del tipo 8 nella preipofisi del Tritone crestato. V. MAZZI, 651.

— Note araneologiche. — XXVII. Su la maniera usata da «*Latrodectus i3-guttatus*» Rossi, nel catturare la preda, e considerazioni relative a tale attività nell'ordine degli Aranei. B. MONTEROSSO e C. RONDISVALLE, 406.

— Studi sul meccanismo d'azione della Streptomicina. — I. Alterazioni dell'«*Escherichia coli*», in fase biotica e trattata colla Streptomicina, osservate al microscopio elettronico. G. PENSO e F. SCANGA, 146.

— La determinazione di arti soprannumerari in «*Bufo vulgaris*» in rapporto allo stimolo. T. PERRI, 613.

— Gli elementi morfologici del sangue di «*Seps chalcides*». L. RAUNICH, 654.

— Problemi connessi alla chiusura e alla riattivazione delle tonnare nel Mediterraneo. A. RUSSO, 28.

**Botanica.** — Su di una nuova specie di «*Brettanomyces*» isolata da uva. O. VERONA e G. FLORENZANO, 383.



**Botanica-Genetica.** — Volume nucleare e poliploidismo. G. SCHREIBER, 390.

## C

**Chimica.** — Ricerche ossidimetriche e polarografiche sui complessi e anidrici del nichel. V. CAGLIOTI, G. SARTORI, P. SILVESTRONI, 448.

**Chimica generale.** — Sul calcolo dei coefficienti di attività degli elettroliti forti in soluzione concentrata. G. B. BONINO e E. MARIANI, 442.

— Sul calcolo dell'effetto cinetico primario di sale. G. B. BONINO e M. ROLLA, 445.

**Citologia.** — Assorbimento di sostanze lipoidi. A. CORTI, 636.

— Il problema dell'accrescimento interfascio e delle variazioni volumetriche del nucleo durante lo sviluppo. G. SCHREIBER, 129.

**Citologia vegetale.** — Agglutinazione cromatica («stickiness») in «Allium Cepa» L. e altre Liliaceae. F. D'AMATO, 135.

**Commemorazioni.** — Rievocazione di Ettore Marchiafava nel centenario della sua nascita. D. DE BLASI, 670.

**Comunicazioni varie.** 680.

**Cristallochimica.** — Proprietà fisiche dei cristalli misti. — Deduzione della regola di Retgers da quella di Petterson-Tschermak e loro incompatibilità con quella di Vegard. C. PERRIER, 457.

— Ricerche sulle Emoglobine cristallizzate. — II. Cristalli di emoglobina negli incroci del cavallo e dell'asino. C. PERRIER e G. LOMBARDI, 452.

**Cristallografia.** — Sugli operatori matriciali di simmetria macroscopica. Nota I. F. FUMI, 101.

— Assi di simmetria composta e operatori matriciali di rotazione impropria. Nota II. F. FUMI, 109.

— III) Rappresentazione analitica dei reticoli cristallini di traslazione. F. FUMI, 370.

— IV) Celle elementari di Bravais e traslazioni primitive di Seitz. F. FUMI, 376.

— V) Operatori matriciali di simmetria e quaternioni. F. FUMI, 573.

**Cristallografia fisica.** — Giustificazione tensoriale della mancanza di piezoelettricità nella classe pentagonicoitetraedrica. F. FUMI, 580.

## E

**Elettrochimica.** — Contributo alla conoscenza dei fenomeni di passività anodica dello stagno in soluzione alcalina. Nota III. G. BIANCHI, 94.

— Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota IV. G. BIANCHI, 97.

— Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota V. G. BIANCHI, 586.

**Errata corrige.** — 686.

## F

**Fisica.** — Attorno ad una determinazione di W. Thomson dell'età della Terra. L. CASTOLDI, 561.

— Sull'assorbimento e diffusione degli ultrasuoni da parte di soluzioni ed emulsioni. E. GROSSETTI, 88.

— Teoria speciale della relatività e teoria balistica della luce. Q. MAJORANA, 435.

— La funzione di Lagrange di alcune particelle elementari. L. A. RADICATI, 351.

— Il principio di Huygens-Fresnel come conseguenza di quello dell'interferenza inversa. G. TORALDO DI FRANCIA, 356.

— Sull'effetto delle piccole irregolarità di lavorazione negli specchi per riflettori astronomici. G. TORALDO DI FRANCIA, 568.

**Fisica applicata.** — Abbagliamento in luce gialla ed in luce bianca. R. DEAGLIO, 91.

**Fisica-Matematica.** — Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni della elasticità. M. PICONE, 427.

**Fisiologia vegetale.** — Azione antimiotica dei prodotti del metabolismo fungino. F. M. GEROLA, 124.

— Pressati lichenici e mitosi cellulari. F. M. GEROLA, 387.

— Associazioni di miceli ed azioni mitoinibitrici. F. M. GEROLA, 389.

— Veleni antimiotici e potere di difesa dei tessuti. F. M. GEROLA, 606.

## G

**Geologia.** — Condizioni di giacitura diapirica dei calcari liasici dei Monti Cornicolani (Lazio). C. MAXIA, 591.

— Ancora dell'età del macigno. G. ROVERETO, 467.

— L'abissolismo. F. SACCO, 463.

**Geologia applicata.** — Sui criteri di ricerca per energia geotermica. F. FALINI, 360.

**Geometria.** — Sulle connessioni affini e sul vettore di Einstein. A. COSSU, 295.

— Alcune osservazioni sulle varietà subordinate di una varietà a connessione affina asimmetrica. A. COSSU, 303.

— Su alcuni tipi di quartiche piane. V. DALLA VOLTA, 301.

— Su alcuni lavori di W. L. Edge. G. FANO, 179.

— Sulle curve appartenenti a una superficie generale d'ordine  $n \geq 4$  dell' $S_3$ . A. FRANCHETTA, 71.

— Sui diametri coniugati delle ovali a centro. R. INZINGER, 293.

— Sui sistemi di ipersuperficie di  $S_r$  aventi lo stesso sistema primo polare. C. LONGO, 282.

— Sui sistemi di ipersuperficie di  $S_r$  che ammettano lo stesso sistema primo polare nei casi in cui l'omografia determinata dai poli sia particolare. C. LONGO, 536.

— Esistenza topologica di diramazioni negative per le curve doppie. C. F. MANARA, 67.

— L'intorno del 5° ordine di un punto di una superficie nello spazio proiettivo. A. ROLLERO, 311.

— Sulle forme che contengono una data varietà algebrica. L. ROTH, 541.

— Su alcuni sistemi triplamente infiniti di curve su una superficie. A. TERRACINI, 545.

— Le ipersuperficie d'ordine  $n$  con un punto  $(n-2)$ -plo. — I. Genesi delle singolarità della varietà di diramazione. G. VACCARO, 288.

— Le ipersuperficie d'ordine  $n$  con un punto  $(n-2)$ -plo. — II. Singolarità della ipersuperficie dedotte da quelle della varietà di diramazione. G. VACCARO, 314.

**Geometria algebrica.** — Sulle curve sgheembe di residuale uno. F. GAETA, 78.

## M

**Matematica.** — Il gruppo di Brauer delle algebre semplici di tipo 1. I. BARSOTTI, 188.

— L'approximation des racines complexes d'une équation transcendente à une inconnue. E. BODEWIG, 218.

— Determinazione dell'altezza di scoppio della bomba atomica lanciata su Hiroshima. P. BUZANO, 482.

— Un'osservazione sulla continuità rispetto ai valori iniziali degli integrali dell'equazione:  $y' = f(x, y)$ . F. CAFIERO, 479.

— Attorno a una dimostrazione geometrica di un teorema di Analisi. L. CASTOLDI, 496.

— Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. Nota I. L. CASTOLDI, 498.

— Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue. Nota I. L. CESARI, 486.

— Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue. Nota II. L. CESARI, 489.

— Una proprietà delle superficie integrali delle equazioni non lineari di ordine  $n$  di tipo iperbolico. M. CINQUINI-CIBRARIO, 49.

— Intorno alla distribuzione degli zeri di certi polinomi. G. COLOMBO, 530.

— Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota III. S. FAE-DO, 37.

— Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota IV. S. FAE-DO, 192.

— Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni. G. FICHERA, 502.

— Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili mediante successioni di particolari funzioni armoniche. G. FICHERA, 508.

— Su una questione posta da S. Lie. A. FINZI, 185.

— Sulle trasformazioni singolari di un gruppo continuo e finito e sulle trasformazioni, che non posseggono parametri canonici. A. FINZI, 204.

— Tavola della funzione euleriana  $\Gamma(z)$  per valori complessi dell'argomento. A. GHIZZETTI, 254.

— Sulla irregolarità delle superficie multiple cicliche e lo scioglimento della torsione delle superficie algebriche. Nota I. A. LO VOI, 223.

— Sulla irregolarità delle superficie multiple cicliche e lo scioglimento della torsione delle superficie algebriche. Nota II. A. LO VOI, 228.

- Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche. C. MIRANDA, 55.
  - Sulle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes. B. PETTINEO, 230.
  - Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes. Nota I. B. PETTINEO, 236.
  - Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes. Nota II. B. PETTINEO, 512.
  - Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes. Nota III. B. PETTINEO, 518.
  - Sul massimo e sul minimo integrale di una funzione secondo Picone-Stieltjes. B. PETTINEO, 521.
  - Sulla misurabilità degli insiemi pluridimensionali. B. PETTINEO, 525.
  - A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: considerazioni preliminari. G. SCORZA DRAGONI, 470.
  - A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: proposizioni preliminari. G. SCORZA DRAGONI, 474.
  - Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui. Nota I. B. SEGRE, 167.
  - Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui. Nota II. B. SEGRE, 172.
  - Un nuovo metodo per lo scioglimento delle singolarità. B. SEGRE, 411.
  - Gli automorfismi del corpo complesso, ed un problema di Corrado Segre. B. SEGRE, 414.
  - Una nuova caratterizzazione della sfera. B. SEGRE, 420.
  - Sulla torsione integrale delle curve chiuse sghembe. B. SEGRE, 422.
  - Remarque sur l'axiome du choix pour l'espace de fonctions continues. W. SIERPIŃSKI, 216.
  - Sulla semicontinuità degli integrali doppi, in forma ordinaria, nel calcolo delle variazioni. G. STAMPACCHIA, 247.
  - Sulle superficie isoterme-asintotiche. O. TIGANO, 298.
  - Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata. G. TREVISAN, 199.
  - Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires. T. WAZEWSKI, 210.
  - Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni al problema di Niccoletti per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico. G. ZWIRNER, 44.
  - Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni ai problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie. G. ZWIRNER, 242.
- Meccanica.** — Il Principio di Hamilton per sistemi dinamici a vincoli anolonomi generali. L. CASTOLDI, 329.
- Sopra una proprietà dei moti permanenti di fluidi incomprimibili in cui le linee di corrente formano una congruenza normale di linee isotache. L. CASTOLDI, 333.
  - Sull'analisi delle piccole deformazioni nel campo elastoplastico. P. CICALA, 325.
  - Asismica delle torri. G. KRALL, 3.
  - Dinamica ed aerodinamica dei fili. Premesse. Vibrazioni visibili. Nota I. G. KRALL, 11.
  - Dinamica ed aerodinamica dei fili. Vibrazioni acustiche. Nota II. G. KRALL, 17.
  - Anemometro a testa sferica. C. MORTARINO, 548.
  - Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità. M. PICONE, 427.
  - Dilatazione di una fune pesante sospesa a due estremi fissi. U. RICHARD, 321.
  - Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli. Nota I. G. SUPINO, 81.
  - Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli. Nota II. G. SUPINO, 87.
- Mineralogia.** — Un nuovo ossicloruro di antimonio fra i prodotti di alterazione dell'antimonite alle Cetine di Cotorniano presso Rosia (Siena). M. FORNASERI, 365.
- Osservazioni ottiche e mineralogiche sulla legge di Brewster. U. PANICHI, 23.
  - Chiarimenti sulla johannsenite del Campigliese. F. RODOLICO, 603.

## N

**Nautica.** — Principi di un nuovo metodo per la determinazione immediata del punto nave astronomico. M. BINI, 555.

**O**

**Opere pervenute in dono all'Accademia,** 681, 685.

**P**

**Paleontologia.** — Su di una faunetta casiana della Valle di Zoldo (Belluno). A. RIEDEL, 598.

**Patologia.** — Ricerche chimico-biologiche sul metodo indio di preparazione del curaro Makù. Nota III. E. BIOCICA e M. IPPOLITO, 162.

**Patologia vegetale.** — Recenti osservazioni sulla biologia della « Deuterophoma tracheiphila » Petri e considerazioni sulla eziologia del « mal secco » degli agrumi. G. GOIDANICH e G. RUGGIERI, 395.

Una nuova specie di carbone del grano in simbiosi con le carie « *Tilletia* sp. » sul frumento. V. GRASSO, 608.

**Personale Accademico,** 677, 682.

**Petrografia.** — La differenziazione magmatica nelle rocce del Lonzina (Colli Euganei). A. RIEDEL e G. SCHIAVINATO, 115.

**Presentazione di libri,** 678, 684.

**Presentazione di Note e Memorie,** 679, 683.

**Presentazione di plichi suggellati,** 682.

**R**

**Relazioni di Commissioni,** 679, 682.

**S**

**Scienza della Alimentazione.** — Azione di preparati di pancreas (lipocaic, lipodierasi) sul contenuto in grassi del fegato di cane spancreato. C. LOMBROSO e S. BOCCHIOTTI, 641.

— Variazioni di doppi legami dei grassi contenuti nel fegato di cane spancreato durante autolisi asettica in presenza o assenza di fattori lipodieretici. C. LOMBROSO e S. BOCCHIOTTI, 644.

— Azione degli acidi malonico e monoiodoacetico e della florizina sulla lipodieresi. C. LOMBROSO e S. BOCCHIOTTI, 649.

**Storia delle Scienze.** — L'avverso destino di Evangelista Torricelli. G. LORIA, 665.

**T**

**Temi per discussioni,** 680.



## INDICI DEI FASCICOLI

## FASCICOLO I-2

LUGLIO-AGOSTO 1947

## NOTE DI SOCI

KRALL G. - Asismica delle torri . . . . .	Pag. 3
KRALL G. - Dinamica ed aerodinamica dei fili. Premesse. Vibrazioni visibili. Nota I . . . . .	11
KRALL G. - Dinamica ed aerodinamica dei fili. Vibrazioni acustiche. Nota II . . . . .	17
PANICHI U. - Osservazioni ottiche e mineralogiche sulla legge di Brewster . . . . .	23
RUSSO A. - Problemi connessi alla chiusura e alla riattivazione delle tonnare nel Mediterraneo. . . . .	28
BRUNELLI G. - Su alcune caratteristiche del Mare Mediterraneo . . . . .	34

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

FAEDO S. - Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota III (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	Pag. 37
ZWIRNER G. - Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni al problema di Niccoletti per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	44
CINQUINI-CIBRARIO M. - Una proprietà delle superficie integrali delle equazioni non lineari di ordine $n$ di tipo iperbolico (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	49
MIRANDA C. - Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche (pres. dal Corrisp. <i>R. Caccioppoli</i> ) . . . . .	55
OTTAVIANI G. - Su una equazione integrale della Statistica Matematica (pres. dal Corrisp. <i>F. P. Cantelli</i> ) . . . . .	59
HORNICH H. - Il primo problema al contorno per il piano a più tagli (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	63
MANARA C. F. - Esistenza topologica di diramazioni negative per le curve doppie (pres. dal Corrisp. <i>O. Chisini</i> ) . . . . .	67
FRANCHETTA A. - Sulle curve appartenenti a una superficie generale d'ordine $n \geq 4$ dell' $S_3$ (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i> ) . . . . .	71
GAETA F. - Sulle curve sghembe di residuale uno (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i> ) . . . . .	78
SUPINO G. - Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli. Nota I (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i> ) . . . . .	81
SUPINO G. - Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli. Nota II (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i> ) . . . . .	87
GROSSETTI E. - Sull'assorbimento e diffusione degli ultrasuoni da parte di soluzioni ed emulsioni (pres. dal Socio <i>A. Carrelli</i> ) . . . . .	88
DEAGLIO R. - Abbagliamento in luce gialla ed in luce bianca (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i> ) . . . . .	91
BIANCHI G. - Contributo alla conoscenza dei fenomeni di passività anodica dello stagno in soluzione alcalina. Nota. III (pres. dal Corrisp. <i>O. Scarpa</i> ) . . . . .	94

BIANCHI G. - Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota IV (pres. dal Socio <i>L. Lombardi</i> ) . . . . .	Pag. 97
FUMI F. - Sugli operatori matriciali di simmetria macroscopica. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>C. Perrier</i> ) . . . . .	101
FUMI F. - Assi di simmetria composta e operatori matriciali di rotazione impropria. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>C. Perrier</i> ) . . . . .	109
RIEDEL A. e SCHIAVINATO G. - La differenziazione magmatica nelle rocce del Lonzina (Colli Euganei) (pres. dal Socio <i>A. Bianchi</i> ) . . . . .	115
GEROLA F.M. - Azione antimitotica dei prodotti del metabolismo fungino (pres. dal Socio <i>G. Gola</i> ) . . . . .	124
SCHREIBER G. - Il problema dell'accrescimento interfascico e delle variazioni volumetriche del nucleo durante lo sviluppo (pres. dal Socio <i>G. Gola</i> ). . . . .	129
D'AMATO F. - Agglutinazione cromatica («stickiness») in <i>Allium Cepa</i> L. e altre Liliaceae (pres. dal Corrisp. <i>A. Chiarugi</i> ) . . . . .	135
LEVI-MONTALCINI R. - Ricerche sperimentali sull'origine del simpatico toraco-lombare nell'embrione di pollo (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .	140
LEVI MONTALCINI R. - Ricerche sulle correlazioni nello sviluppo del sistema nervoso. - Regressione secondaria del ganglio ciliare dopo asportazione della vescicola mesencefalica in embrione di pollo (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .	144
PENSO G. e SCANGA F. - Studi sul meccanismo d'azione della Streptomicina. I. Alterazioni dell'« <i>Escherichia coli</i> », in fase biotica e trattata colla Streptomicina, osservate al microscopio elettronico (pres. dal Corrisp. <i>V. Puntoni</i> ) . . . . .	146
CITTERIO P. e RANZI S. - Sostanze modificanti lo sviluppo embrionale e viscosità di soluzioni contenenti macromolecole (pres. dal Corrisp. <i>G. Brunelli</i> ) . . . . .	150
MAZZI V. - Attività secretoria nel nucleo magnocellulare preottico di « <i>Triturus cristatus carnifex</i> » (Laur.) (pres. dal Corrisp. <i>N. Beccari</i> ) . . . . .	155
BIocca E. e IPPOLITO M. - Ricerche chimico biologiche sul metodo indio di preparazione del curaro Makù. Nota III (pres. dal Corrisp. <i>V. Puntoni</i> ) . . . . .	162

## FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE-OTTOBRE 1947.

## NOTE DI SOCI

SEGRE B. - Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui. Nota I . . . . .	Pag. 167
SEGRE B. - Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui. Nota II . . . . .	172
FANO G. - Su alcuni lavori di W. L. Edge . . . . .	179

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

FINZI A. - Su una questione posta da S. Lie (pres. dal Socio <i>U. Amaldi</i> ) . . . . .	Pag. 185
BARSOTTI I. - Il gruppo di Brauer delle algebre semplici di tipo I (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	188
FAEDO S. - Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota IV (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	192
TREVISAN G. - Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata (pres. dal Corrisp. <i>R. Caccioppoli</i> ) . . . . .	199

FINZI A. - Sulle trasformazioni singolari di un gruppo continuo e finito e sulle trasformazioni, che non posseggono parametri canonici (pres. dal Socio <i>U. Amaldi</i> )	204
WAŻEWSKI T. - Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> )	210
SIERPINSKI W. - Remarque sur l'axiome du choix pour l'espace de fonctions continues (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> )	216
BODEWIG E. - L'approximation des racines complexes d'une équation transcendante à une inconnue (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> )	218
LO VOI A. - Sulla irregolarità delle superficie multiple cicliche e lo scioglimento della torsione delle superficie algebriche. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i> )	223
LO VOI A. - Sulle irregolarità delle superficie multiple cicliche e lo scioglimento della torsione delle superficie algebriche. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i> )	228
PETTINEO B. - Sulle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes (pres. dal Corrisp. <i>M. Cipolla</i> )	230
PETTINEO B. - Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>M. Cipolla</i> )	236
ZWIRNER G. - Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni ai problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i> )	242
STAMPACCHIA G. - Sulla semicontinuità degli integrali doppi, in forma ordinaria nel calcolo delle variazioni (pres. dal Corrisp. <i>R. Caccioppoli</i> )	247
GHIZZETTI A. - Tavola della funzione euleriana $\Gamma(z)$ per valori complessi dell'argomento (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> )	254
BAIADA E. - Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i> )	258
BAIADA E. - Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i> )	264
BARBUTI U. - Sull'integrale massimo e minimo e sulla unicità della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali del primo ordine (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i> )	272
VIOLA T. - Sui fondamenti geometrici del teorema del cambiamento di variabili negli integrali a più dimensioni (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> )	277
LONGO C. - Sui sistemi di ipersuperficie di $S_r$ aventi lo stesso sistema primo polare (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	282
VACCARO G. - Le ipersuperficie d'ordine $n$ con un punto $(n-2)$ plo. - I. Genesi delle singolarità della varietà di diramazione (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	288
INZINGER R. - Sui diametri coniugati delle ovali a centro (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	293
COSSU A. - Sulle connessioni affini e sul vettore di Einstein (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	295
TIGANO O. - Sulle superficie isoterme-asintotiche (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i> )	298
DALLA VOLTA V. - Su alcuni tipi di quartiche piane (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	301
COSSU A. - Alcune osservazioni sulle varietà subordinate di una varietà a connessione affine asimmetrica (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	303
ROLLERO A. - L'intorno del 5° ordine di un punto di una superficie nello spazio proiettivo (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	311
VACCARO G. - Le ipersuperficie d'ordine $n$ con un punto $(n-2)$ -plo. - II. Singolarità della ipersuperficie dedotte da quelle della varietà di diramazione (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	314
RICHARD U. - Dilatazione di una fune pesante sospesa a due estremi fissi (pres. dal Corrisp. <i>E. Persico</i> )	321
CICALA P. - Sull'analisi delle piccole deformazioni nel campo elastoplastico (pres. dal Socio <i>M. Panetti</i> )	325
CASTOLDI L. - Il Principio di Hamilton per sistemi dinamici a vincoli anolonomi generali (pres. dal Socio <i>L. Berzolari</i> )	329

CASTOLDI L. — Sopra una proprietà dei moti permanenti di fluidi incomprimibili in cui le linee di corrente formano una congruenza normale di linee isotache (pres. dal Socio <i>L. Berzolari</i> ) . . . . .	Pag. 333
NICOLINI T. — Sulle variazioni di latitudine anteriori al 1890 (pres. dal Socio <i>L. Carnera</i> ) . . . . .	337
SCONZO P. — Teoria approssimata del pianetino (552) Sigelinde (pres. dal Socio <i>G. Silva</i> ) . . . . .	346
RADICATI L. A. — La funzione di Lagrange di alcune particelle elementari (pres. dal Socio <i>E. Persico</i> ) . . . . .	351
TORALDO DI FRANCIA G. — Il principio di Huygens-Fresnel come conseguenza di quello dell'interferenza inversa (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i> ) . . . . .	356
FALINI F. — Sui criteri di ricerca per energia geotermica (pres. dal Corrisp. <i>G. Checchia Rispoli</i> ) . . . . .	360
FORNASERI M. — Un nuovo ossicloruro di antimonio fra i prodotti di alterazione dell'antimonite alle Cetine di Cotorniano presso Rosia (Siena) (pres. dal Corrisp. <i>E. Onorato</i> ) . . . . .	365
FUMI F. — III) Rappresentazione analitica dei reticoli cristallini di traslazione (pres. dal Corrisp. <i>C. Perrier</i> ) . . . . .	370
FUMI F. — IV) Celle elementari di Bravais e traslazioni primitive di Seitz (pres. dal Corrisp. <i>C. Perrier</i> ) . . . . .	376
SCHREIBER G. — Volume nucleare e poliploidismo (pres. dal Socio <i>G. Gola</i> ) . . . . .	380
VERONA O. e FLORENZANO G. — Su di una nuova specie di <i>Brettanomyces</i> isolata da uva (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i> ) . . . . .	383
GEROLA F. M. — Pressati lichenici e mitosi cellulari (pres. dal Socio <i>G. Gola</i> ) . . . . .	387
GEROLA F. M. — Associazioni di miceli ed azioni mitoinibitrici (pres. dal Socio <i>G. Gola</i> ) . . . . .	389
GOIDÀNICH G. e RUGGIERI G. — Recenti osservazioni sulla biologia della « <i>Deuterophoma tracheiphila</i> » Petri e considerazioni sull'eziologia del «mal secco» degli agrumi (pres. dal Corrisp. <i>A. Trotter</i> ) . . . . .	395
ALOISI M. e BUFFA P. — L'ossidazione biologica della glicerilfosforilcolina (pres. dal Corrisp. <i>G. Vernoni</i> ) . . . . .	403
MONTEROSSO B. e RONSISVALLE C. — Note araneologiche. — XXVII. Su la maniera, usata da « <i>Latrodectus 13-guttatus</i> » Rossi, nel catturare la preda e considerazioni, relative a tale attività nell'ordine degli Aranei (pres. dal Socio <i>A. Russo</i> ) . . . . .	406

## FASCICOLO 5-6.

NOVEMBRE-DICEMBRE 1947.

## NOTE DI SOCI

SEGRE B. — Un nuovo metodo per lo scioglimento delle singolarità . . . . .	Pag. 411
SEGRE B. — Gli automorfismi del corpo complesso, ed un problema di Corrado Segre . . . . .	414
SEGRE B. — Una nuova caratterizzazione della sfera . . . . .	420
SEGRE B. — Sulla torsione integrale delle curve chiuse sghembe . . . . .	422
PICONE M. — Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità . . . . .	427
MAJORANA Q. — Teoria speciale della relatività e teoria balistica della luce . . . . .	435
BONINO G. B. e MARIANI E. — Sul calcolo dei coefficienti di attività degli elettroliti forti in soluzione concentrata . . . . .	442
BONINO G. B. e ROLLA M. — Sul calcolo dell'effetto cinetico primario di sale . . . . .	445
CAGLIOTI V., SARTÒRI G. e SILVESTRONI P. — Ricerche ossidimetriche e polarografiche sui complessi cianidrici del nichel . . . . .	448



PERRIER C. e LOMBARDI G. - Ricerche sulle Emoglobine cristallizzate. - II. Cristalli di emoglobina negli incroci del cavallo e dell'asino . . . . .	Pag. 452
PERRIER C. - Proprietà fisiche dei cristalli misti. - Deduzione della regola di Retgers da quella di Petterson-Tschermak e loro incompatibilità con quella di Vegard . . . . .	457
SACCO F. - L'Abissolittismo . . . . .	463
ROVERETO G. - Ancora dell'età del macigno . . . . .	467

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

SCORZA DRAGONI G. - A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: considerazioni preliminari (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i> ) . . . . .	Pag. 470
SCORZA DRAGONI G. - A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: proposizioni preliminari (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i> ) . . . . .	474
CAFIERO F. - Un'osservazione sulla continuità rispetto ai valori iniziali degli integrali dell'equazione: $y' = f(x, y)$ (pres. dal Corrisp. <i>R. Caccioppoli</i> ) . . . . .	479
BUZANO P. - Determinazione dell'altezza di scoppio della bomba atomica lanciata su Hiroshima (pres. dal Corrisp. <i>E. Persico</i> ) . . . . .	482
CESARI L. - Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	486
CESARI L. - Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	489
CASTOLDI L. - Attorno a una dimostrazione geometrica di un teorema di Analisi (pres. dal Socio <i>L. Berzolari</i> ) . . . . .	496
CASTOLDI L. - Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. (Nota I (pres. dal Socio <i>L. Berzolari</i> ) . . . . .	498
FICHERA G. - Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	502
FICHERA G. - Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili mediante successioni di particolari funzioni armoniche (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	508
PETTINEO B. - Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>M. Cipolla</i> ) . . . . .	512
PETTINEO B. - Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes. Nota III (pres. dal Corrisp. <i>M. Cipolla</i> ) . . . . .	518
PETTINEO B. - Sul massimo e sul minimo integrale di una funzione secondo Picone-Stieltjes (pres. dal Corrisp. <i>M. Cipolla</i> ) . . . . .	521
PETTINEO B. - Sulla misurabilità degli insiemi pluridimensionali (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	525
COLOMBO G. - Intorno alla distribuzione degli zeri di certi polinomi (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i> ) . . . . .	530
LONGO C. - Sui sistemi di ipersuperficie di $S_r$ che ammettano lo stesso sistema primo polare nei casi in cui l'omografia determinata dai poli sia particolare (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	536
ROTH L. - Sulle forme che contengono una data varietà algebrica (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i> ) . . . . .	541
TERRACINI A. - Su alcuni sistemi triplamente infiniti di curve su una superficie (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i> ) . . . . .	545
MORTARINO C. - Anemometro a testa sferica (pres. dal Socio <i>M. Panetti</i> ) . . . . .	548
BINI M. - Principi di un nuovo metodo per la determinazione immediata del punto nave astronomico (pres. dal Corrisp. <i>M. Tenani</i> ) . . . . .	555
CASTOLDI L. - Attorno ad una determinazione di W. Thomson dell'età della Terra (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i> ) . . . . .	561
TORALDO DI FRANCIA G. - Sull'effetto delle piccole irregolarità di lavorazione negli specchi per riflettori astronomici (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i> ) . . . . .	568

FUMI F. - V) Operatori matriciali di simmetria e quaternioni (pres. dal Corrisp. C. Perrier) . . . . .	Pag. 573
FUMI F. - Giustificazione tensoriale della mancanza di piezoelettricità nella classe pentagonoicositetraédrica (pres. dal Corrisp. C. Perrier) . . . . .	580
BIANCHI G. - Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota V (pres. dal Socio L. Lombardi) . . . . .	586
MAXIA C. - Condizioni di giacitura diapirica dei calcari liasici dei Monti Cornicolani (Lazio) (pres. dal Corrisp. G. Checchia Rispoli) . . . . .	591
RIEDEL A. - Su di una faunetta cassiana della Valle di Zoldo (Belluno) (pres. dal Socio G. Dal Piaz) . . . . .	598
RODOLICO F. - Chiarimenti sulla johannsenite del Campigliese (pres. dal Corrisp. G. Carobbi) . . . . .	603
GEROLA F. M. - Veleni antimitotici e potere di difesa dei tessuti (pres. dal Socio G. Gola) . . . . .	606
GRASSO V. - Una nuova specie di carbone del grano in simbiosi con le carie «Tilletia sp.» sul frumento (pres. dal Socio G. Negri) . . . . .	608
PERRI T. - La determinazione di arti soprannumerari in «Bufo vulgaris» in rapporto allo stimolo (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	613
DE ROSA R. - Un nuovo metodo per riconoscere la sostanza amiloide in sezioni a fresco di tessuti in degenerazione. Osservazioni microfluoroscopiche (pres. dal Socio U. Pierantoni) . . . . .	618
CORTELLESSA M. L. - Ulteriori ricerche sull'influenza della tionina sullo sviluppo embrionale. - Esperienze su «Petromyzon fluviatilis» (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	620
CASTIGLI-PITOTTI M. - Sulla precoce localizzazione degli abbozzi del sangue in «Petromyzon fluviatilis» e «Petromyzon planeri» studiata col metodo delle perossidasi (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	623
GALGANO M. - Problemi di tecnica e di citologia ipofisaria. Nuovi metodi di colorazione differenziale per le cellule della preipofisi (pres. dal Corrisp. N. Beccari) . . . . .	629
CORTI A. - Assorbimento di sostanze lipoidee (pres. dal Corrisp. G. Vernoni) . . . . .	636
LOMBROSO C. e BOCCHIOTTI S. - Azione di preparati di pancreas (lipocaici, lipodierasi) sul contenuto in grassi del fegato di cane spancreato (pres. dal Corrisp. U. Lombroso) . . . . .	641
LOMBROSO C. e BOCCHIOTTI S. - Variazioni di doppi legami dei grassi contenuti nel fegato di cane spancreato durante autolisi asettica in presenza o assenza di fattori lipodieretici (pres. dal Corrisp. U. Lombroso) . . . . .	644
LOMBROSO C. e BOCCHIOTTI S. - Azione degli acidi malonico e monoiodoacetico e della florizina sulla lipodieresi (pres. dal Corrisp. U. Lombroso) . . . . .	649
MAZZI V. - Sulla presenza di cellule basofile del tipo $\beta$ e del tipo $\delta$ nella preipofisi del Tritone crestato (pres. dal Corrisp. N. Beccari) . . . . .	651
RAUNICH L. - Gli elementi morfologici del sangue di «Seps chalcides» (pres. dal Corrisp. G. Brunelli) . . . . .	654
ACANFORA M. O. - Sulla litotecnica preistorica. - Esperimenti di fabbricazione (pres. dal Corrisp. S. Sergi) . . . . .	658

#### COMMEMORAZIONI

LORIA G. - L'avverso destino di Evangelista Torricelli . . . . .	Pag. 665
DE BLASI D. - Rievocazione di Ettore Marchiafava nel centenario della sua nascita . . . . .	670

#### SEDUTA DELL'8 NOVEMBRE 1947

Personale accademico . . . . .	Pag. 677
Presentazione di libri . . . . .	678

Presentazione di Note e Memorie. . . . .	Pag. 679
Relazioni di Commissioni . . . . .	679
Temi per discussioni. . . . .	680
Comunicazioni varie . . . . .	680
Opere pervenute in dono all'Accademia, presentate nella seduta dell'8 novembre 1947	681

## SEDUTA DEL 13 DICEMBRE 1947

Personale accademico . . . . .	Pag. 682
Presentazione di plichi suggellati . . . . .	682
Relazioni di Commissioni . . . . .	682
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	683
Presentazione di libri . . . . .	684
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 dicembre 1947	685
Errata corrige . . . . .	686
Indice per Autori . . . . .	689
Indice per materie . . . . .	694
Indici dei fascicoli . . . . .	699

---









